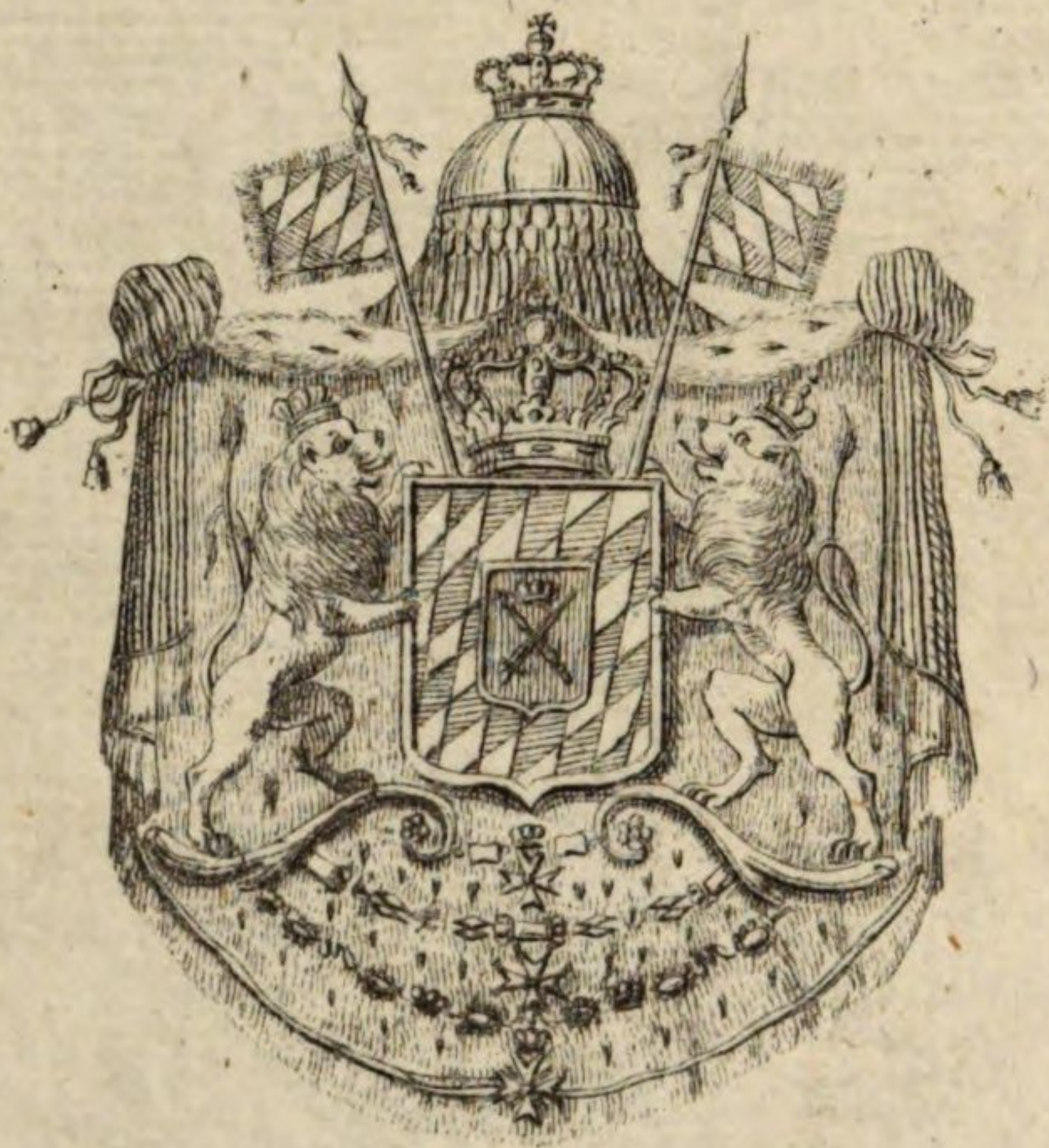




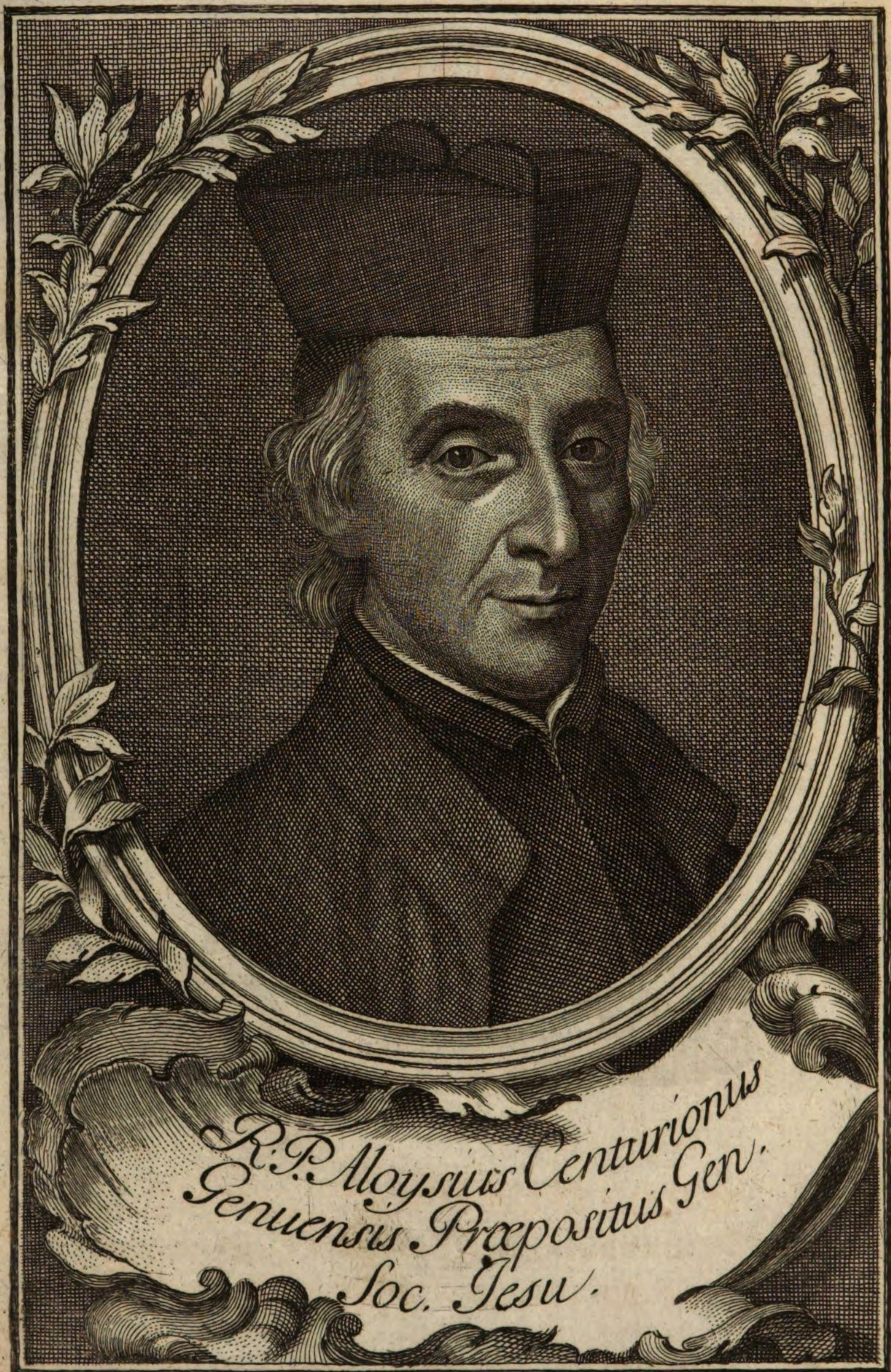
Math. part.
293.



**BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.**

R

THE HOPKINS
GENUINE
LOCAL



TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PLANÆ, ET SPHÆRICÆ

AUCTORE

ANTONIO LECCHIO

E SOCIETATE JESU

MATHESEOS PROFESSORE

IN UNIVERSITATE BRAYDENSII.

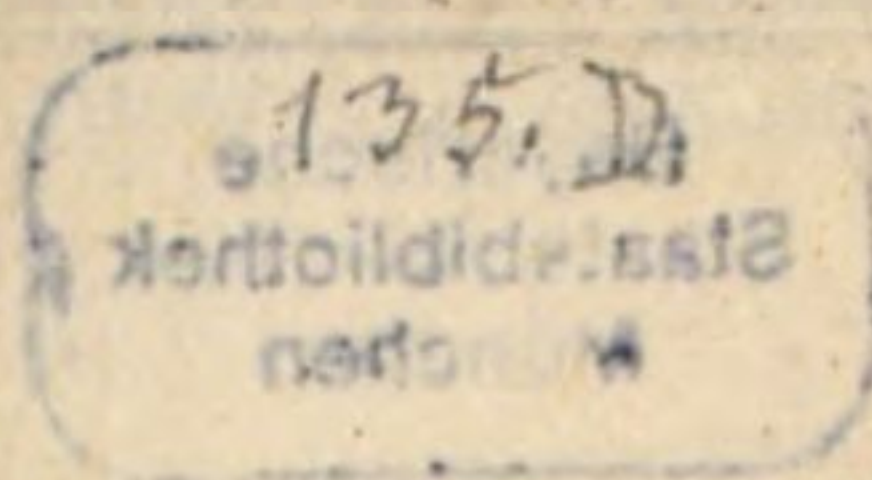


MEDIOLANI MDCCLVI.

EX TYPOGRAPHIA BIBLIOTHECÆ AMBROSIANÆ

APUD JOSEPH MARELLUM

SUPERIORUM FACULTATE AC PRIVILEGIO.



TRIGONOMETRIE

THEORETICO-PRACTICA

PLANAE, ET SPHERICAE

AUCTOR

ANTONIO LECCHIO

PROFESSORIS

MATHEMATICARUM

IN UNIVERSITATE PAVLOVA



MEDICINA

PHYSIOLOGICA, ANATOMICA, MEDICINA

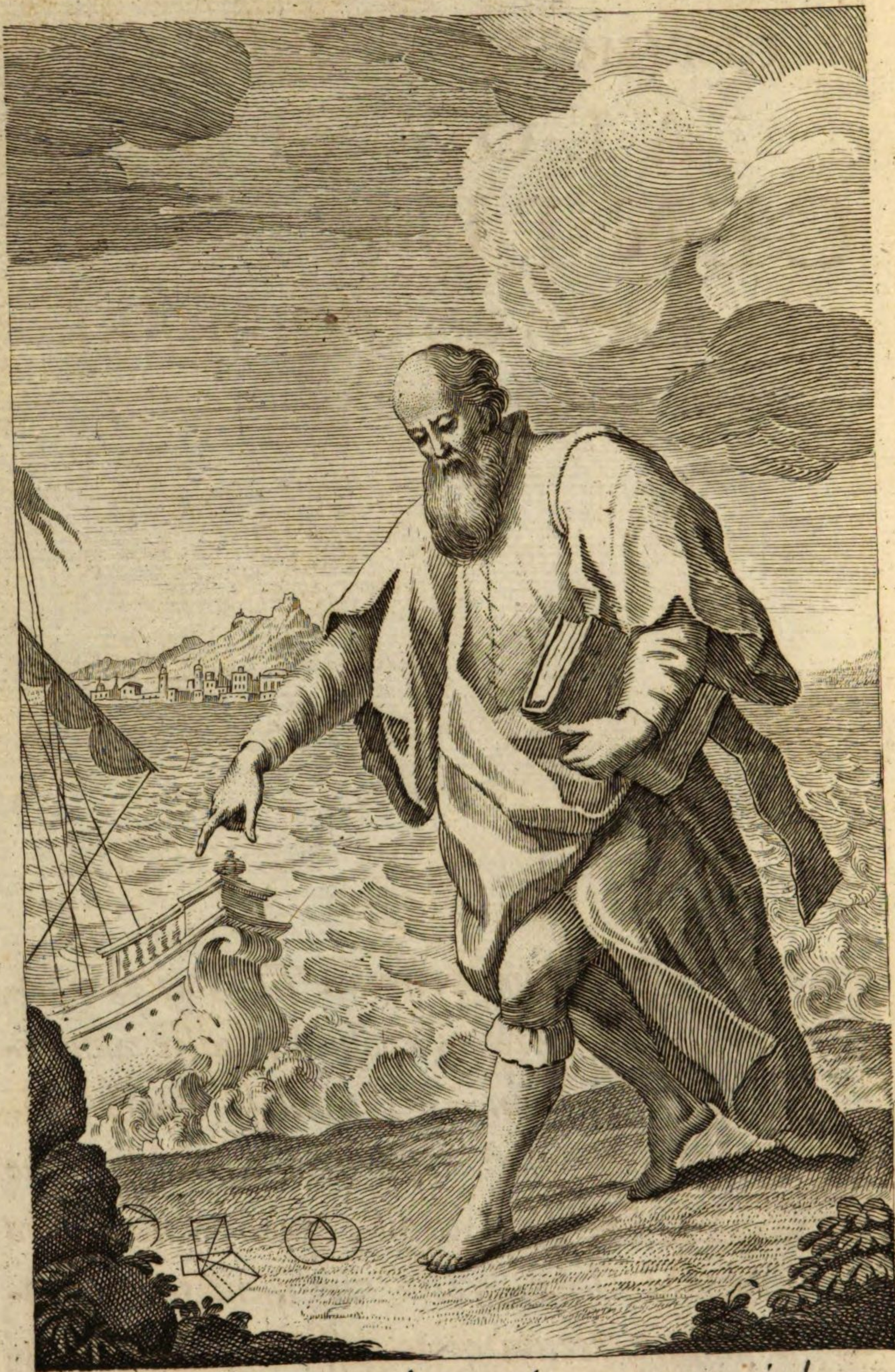
ABUD JOSEPH MARCELLI

PROFESSORIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München



Robustior hominum
etiam. et quod dicitur. I. ac.



Vestigia hominum video.
Aristip. apud Diog. Laert. Iac. Mercator Sculp.

OPTIMO PATRI NOSTRO
ALOYSIO
CENTURIONI
PRÆPOSITO GENERALI
SOCIETATIS JESU.



Uum primum Te Societati nostræ præpositum fuisse nunciatum est, tametsi omnes magna voluptas incredibilisque spes cæpit, quod nemini non erat cognita Tuæ erectæ vis mentis amplitudoque animi, rerum quas gesseras, multis magnis-

gnisque consiliis explicata: tamen Provincia
Mediolanensis sibi potissimum lætandum puta-
vit, quod alterum Societati Præpositum con-
tinenter ipsa suffecisset; Teque inprimis, cu-
jus præsentem sapientiæ virtutisque imaginem
integram atque recentem in animis haberemus.
Sed omnino Universitas hæc Braydensis jucun-
dissimum præcepit suavitatis sensum; neque
propterea solum, quod Te vix juventutem
adepto humaniorum litterarum Professore usam
se meminisset, sed majorem in modum, quod
Provinciam ante quinquennium quum modera-
rere, atque hanc Academiam inviseres, stu-
dia omnium nostrum mira humanitate incende-
ris. Quæ humanitas quum tua semper fuit ac
propria erga omnes, tum singularis plane er-
ga eos patuit, qui perpetuo infinitoque labore
Scholarum muniis tradendisque disciplinis exer-
centur. Quos autem sciebas studere præterea
atque eniti, ut paullo fructuosiore Societati
Reique publicæ operam darent scribendo, eos
& benevolentissimo amplexus es animo, & co-
horta-

hortatione plurimum excitasti ad præclaram
laudem; qua in re nemo sapiens Tuæ consi-
lium humanitatis non magnopere laudandum
censuerit; quamvis enim nostrates, ab ingenio
quisque suo, animos capiunt, animi autem
fructus utilitatisque publicæ spe incenduntur,
quin spem aliam præmiumque expectare de-
ceat aut vero petere: tamen si eorum, qui
præsumt, favor & gratia accedat, ita usuve-
nit, ut alacrius sibi unusquisque enitendum
putet; atque ita Te prædicantem audivimus,
si quis bonos auctores sequitur, in humanis
quidem rebus esse expetendum, sed illorum,
qui moderantur, benevolentiam ceteris omni-
bus laudibus multo pluris a nobis fieri so-
lere; & vero religiosissimo, non solum sa-
pientissimo consilio; namque, si Moderatoribus
parendo, paremus Deo, sane videmur Deo
placere, quum iisdemmet placemus. Itaque
etiam videmus nunquam tantam copiam do-
ctissimorum Virorum in Societate fuisse, qui
scribendo nomen nostrum gloria honoraverunt,
quam

quam quum Moderatores extiterunt, qui voluntate prosequerentur hujusmodi genus hominum, qui in libris impallescentes, ac pulvere, improbi laboris satietate, obscuri & taciti contabescunt. Neque hæc eo dico quod me putem in eorum numero esse collocandum; Memet novi probe meique ingenii vires, quam sint exiguae, sane quidem & magis omnibus sentio; Sed Tibi, quoniam meus insumptus labor in aliis operibus tantum probatus est, ut etiam adderes animum, hortatorque gravis accederes; & parui tum, atque hos jam censeo, quos postremo confeci calamo, de Trigonometria libros deberi Tibi, cui quum hoc opus inscriptum leges, velim cogites non magis id meo me nomine facere, quam communi quodam studio Braydensis Universitatis vota representare, ut immortalis Deus Te velit esse & privato nostro & publico Societatis bono diu incolumem.

Joannes Antonius Lecchius.



PROEMIUM.



QUEMADMODUM Planorum, ac Solidorum Geometria tractaretur, satis explicatum arbitror superioribus Elementis. Sequitur, ut, quæ proxima erat Elementorum pars, Trigonometriam planam, ac sphaericam complectar; cujus tractationem a me flagitarunt plerique, opinione fortasse nonnulla, quam de superioribus Libris habebant. Itaque feci non invitus, ut horum voluntati ne deessem; non ut aliquid huic facultati novi adjicerem, sed ut ea, quæ in Scriptoribus dispersa, atque infinita viderentur esse, ratione, & distributione sub uno aspectu ponerentur. De quibus dicere aggrediar, si pauca prius de instituto, ac de judicio meo dixerò. Nam eorum, qui antea Trigonometriam tradiderunt, quamvis par pæne laus sit, & scribendi gloria; omnes tamen, alius aliò, delapsi sunt; ac pro se quisque, uti sunt multæ in naturis hominum, & ingeniis dissimilitudines, eam methodum secutus est, quam privatim adamaverat. *In omni autem re, monet Tullius, difficillimum est for-*

nam assequi optimi: quòd aliud aliis videtur, ac suo quisque studio maximè ducitur. Sunt qui Epitomes trigonometricas concinnavere magna cum laude; sed, quantulùm experiundo didici, nihil hæ ferme docent sine magistro. Obest in his nimium concisa brevitās: quo vitio laborant interdum ingeniosissimi quique Scriptores. *Nam, quòd quisque est solertior, & ingeniosior, inquit Tullius, hoc docet iracundiùs, & festinantiùs; ac quòd ipse celeriter arripuit, id ab aliis eodem impetu percipi posse putat.* Sunt qui Trigonometrià planà contenti, sphæricam omiserunt, sine qua quivis unus certò pedem figere nunquam poterit aut in cælestibus, aut etiam in terrestribus. Alii utramque Trigonometriam complexi, de logarithmorum mirifico invento prorsus silent; tum quæ ad Tabularum constructionem spectant, vel cursim docent, vel ad alios Scriptores remittunt: quæ cursitatio, ac veluti fluctuatio modò huc, modò illuc, nimium, quantum Tirones distrahit, quibus consultiùs esset eodem duce cursum currere eundem, ac jugi tenore ad hujus facultatis caput, fontemque pervenire.

Neque etiam iis assentior, qui ea nuper sentire cœperunt, quæ doleo jam probari in vulgus; quique in ea hæresi sunt, ut putent in scientia omnium principe demonstrationum salebras omitti oportere: caput esse ad benè, aptèque docendum, si ex singulis Matheseos partibus excerpas praxes, ut vocant, præcipuas, unde unde proficiantur. Ajunt hac arte comparari eam, quam ipsi appellant discendi, docendique facilitatem. In quo verbo lapsa consuetudo deflexit de via, sensimque eò deducta est, ut hisce lenociniis quærat latebra inscitiae: quem locum breviter perstrinxi superiore Libro. Conferamus igitur in pauca; & quoniam ab hac laude rigide omnia demonstrandi proficiscitur Geometria, & quidquid est, ex hoc est; absurdè

absurdè facerem, si ab ea, quam hætenus tenueram, methodo in hac Trigonometriæ tractatione discederem.

Denique ferè omnes Scriptores in theoria luculenter tradenda toti sunt; usum, exercitationemque trigonometrici calculi omittunt: quæ res multorum ingenia, progressionemque retardat. *Nam, quemadmodum, inquit Tullius lib. 1. de Officiis, nec Medici, nec Imperatores, nec Oratores, quamvis artis præcepta perceperint, quidquam magna laude dignum sine usu, & exercitatione consequi possunt;* Sic utriusque Trigonometriæ theoremata demonstrantur quidem egregiè, ut faciunt plerique; sed rei magnitudo usum, exercitationemque desiderat. Quos enim stimulos adolescenti addit ad theoriam ipsam discendam, si duci statim se sentiat ope Trigonometriæ ad dimetiendam stellarum distantiam a terra, motum, ac magnitudinem globi terraquei, ad tot Geodesiæ instrumenta, ac praxes, ad Iridis etiam, ac pleraque alia in Mathesi mixtà phænomena? Quantò alacrius theoriam ipsam complectitur, quam frugiferam aded, & humanis usibus aptam experitur? At, inquiet aliquis, per se ipsi Tirones hunc fructum demetere possunt. Audio, si paribus omnes ad discendum stimulis comparati essent a natura. Sed, uti in omnibus officiis tribuendis monebat Tullius, quæri oportere, quid cuique maximè necesse sit, & quid quisque, vel sine nobis, aut possit consequi, aut non possit; ita & in tradendis disciplinis. Complures fatigat, ac ferme abjicit iter illud in theoria directum, quamvis multò brevius; quin imò diverticulis reficiuntur; seque ipsos probant, an satis habeant virium in theoriæ usu. Neque tamen ita deducendi sunt in alienarum facultatum possessionem, ut cœptum iter abrumpant. Neutiquam sanè. Nam hujus etiam exercitationis adhibendus est modus, ad mediocritatemque revocandus, quantum satis est,

ut tanquam ex edito colle circumspiciat paulisper Tiro, quàm latè pateat Trigonometriæ campus; tum in viam se dare ne recuset. Quemadmodum Virgilianus Heros Sybillæ per campos Elysios Ænæam deducendi præibat: *Dixit, & antetulit gressum, camposque nites Desuper ostentat; debinc summa cacumina relinquunt.* Hisce ad praxim excursiunculis, ac crebra exercitatione comparatur ea, quæ præceptis omnibus potior est, facilitas theoriæ trigonometricæ, qua fit, ut, simul ac tibi collibitum fuerit, ad quævis problemata dirimenda alacer, & expeditus transilire possis.

Habes, amice Lector, instituti mei rationem, in qua si fortasse tibi videar usque eò morosus fuisse, ut mihi non satisfacerent vel ipsi primarum partium Scriptores, neque intra eorum septa consisterem, spero me tibi causam probasse; cupio quidem certè. De rebus ipsis utere tuo iudicio: nihil enim impedio. Hæc tamen ipsa, non tam re, quàm voluntate, qua pluribus prodesse possem, laudabis, opinor.



PROLEGOMENA.

HActenus quid commodi de me ipso polliceri possint harum artium Studiosi, timide dixi; quid autem utilitatis polliceri sibi quisque possit de ipsius Trigonometriæ usu, paucis dicam. Qua in re juvabit, opinor, Studiosos in hoc primo hujus facultatis aditu prænosse, quid impulerit antiquos etiam Geometras, ut novas sibi methodos quærerent dimetiendarum longitudinum; quibusve de causis non satis fiderent Scalæ geometricæ, aliisque Instrumentis, quæ tom. 1. Geometriæ descripsimus: unde *aut necessitas, aut origo Trigonometriæ* affulserit; & quo progressu, & inventis amplificata fuerit *Sinum cognitio, Tangentium, atque Secantium*, quantumque in rebus tam astronomicis, quam geometricis utilitatem attulerit. Præstat enim interdum nedum facultates ipsas, sed illarum quoque ortus cognoscere, progressionisque mirabiles.

I. *Trigonometria rectilinea est ea Geometriæ pars, quæ triangula rectilinea considerat dumtaxat respectu laterum, & angulorum, quin ullam habeat rationem spatii, quod illa comprehendunt.* Hæc autem abunde a nobis tractata superioribus Elementis videri poterat, ubi complures methodos demonstravimus, quibus cognosci possent latera, & anguli trianguli cujusvis. Erat quidem in illis Elementis mira facilitas theoriæ, quæ in primam elementariam institutionem opportunè cadit; sed, si a simplici theoria ad praxim deducantur, labant interdum, neque iis fidere tutò possumus, aut debemus.

Quod ut uno, aut altero exemplo illustrem, quid planius, aut simplicius in longitudinum mensuris capiendis excogitari poterat, quàm divisio Scalæ geometricæ?

tricæ? At, quamvis in hoc Instrumento rite construendo diligentia adhibeatur artificis, quàm quæ maxima possit; nihil tamen rarius, quàm exactam divisionem obtinere; in qua vel levissimus quisque error abnormem, & vix ferendam in praxi varietatem inducit. Quoties enim Scalæ simplicis particulæ singulæ in charta, repræsentant singulas in campo leucas? At quàm facilè in aliquam ex tam minutulis Scalæ divisionibus irrepere potest solius centesimæ partis error, qui vix sensu deprehendi in Instrumento posset? Error autem solius centesimæ partis leucæ gallicæ, quam repræsentare jubetur Scalæ particula, errorem inducit hexapedarum 21. Est & alia complurium aberrationum origo, dum jubemur angulos per Instrumenta inventos in chartam transferre, ac describere, ut similia triangu-
 gula construuntur: in qua operatione error vel minimus in quantitate angulorum exhibenda commissus, mirum, quantùm praxim omnem turbet, atque incertam reddat, præsertim in maximis distantiiis determinandis.

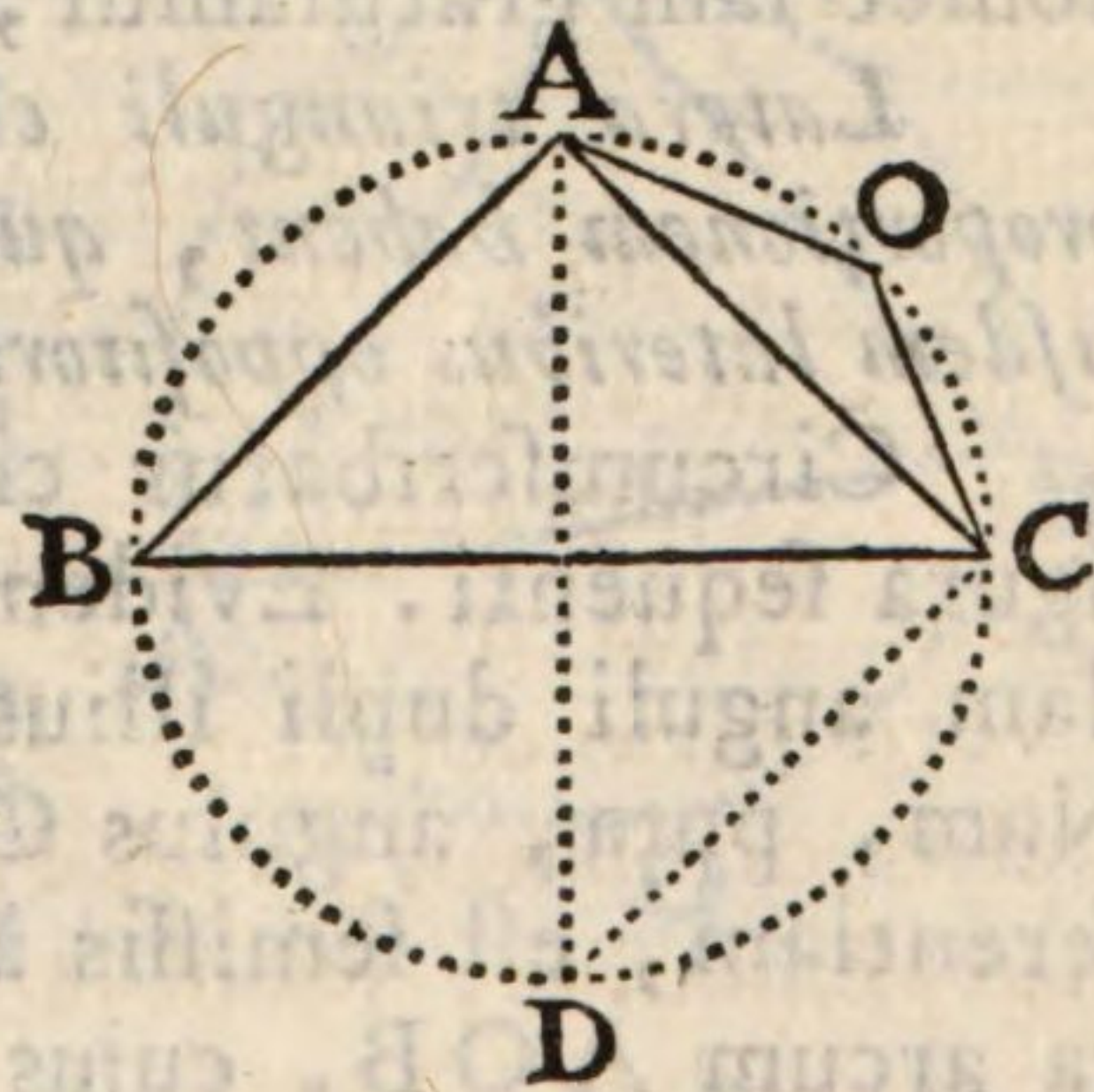
2. Quare Geometrarum industria eò se vertit, ut certius sibi subsidium dimetiendarum longitudinum ab alia theoria pararent, in qua, quibusdam datis in triangulo rectilineo, reliqua possent determinare. Ac primò (ut eorum indaginem quadam verisimilitudine confecer, & Tironibus adumbrem), cùm triangulum omne tribus angulis constet, ac tribus lateribus, hæc omnium prima fortasse suspicio movit aliquos, ut quærerent, an aliqua constans esset ratio inter angulos, & latera: exploratum quippe jam ipsis erat majori angulo opponi latus majus, & vicissim, in eodem triangulo. Si verò ratio constans inveniri posset, uberrimus hinc fructus oriebatur; qui enim in uno triangulo supputabatur calculus, idem aptari poterat reliquis omnibus huic similibus. Quare huc tandem quæstio omnis recidebat:

debat : *An determinari posset, certaue lege definiri ratio, quæ haberetur inter latera, & angulos ejusdem trianguli.* Nam quamvis angulus, & linea sint quantitates heterogeneæ, tamen ratio unius lineæ ad aliam jurè comparari potest cum ratione unius anguli ad alium; ita ut, quemadmodum linea esse potest dupla, vel tripla alterius, ita & angulus duplus, vel triplus alterius; atque hinc per hæc vestigia examinari poterat problema : *An latera trianguli essent inter se, uti anguli oppositi iisdem lateribus.*

3. Ponatur itaque triangulum isosceles ABC rectangulum, cujus latus $AB =$ lateri AC , & angulus A duplus anguli $B = C$. Jam verò, si anguli cujusvis trianguli haberent inter se proportionem eandem, quam habent latera iisdem angulis opposita, quoniam angulus A duplus est anguli B , etiam latus BC oppositum angulo A , duplum esse deberet lateris AC oppositi angulo B ; quod fieri non potest; nam, cum duo latera AB, AC sint invicem æqualia per hyp., haberemus $BC = AC + AB$; quod est absurdum. Quamobrem *Anguli trianguli non sunt inter se, uti latera iisdem angulis opposita.*

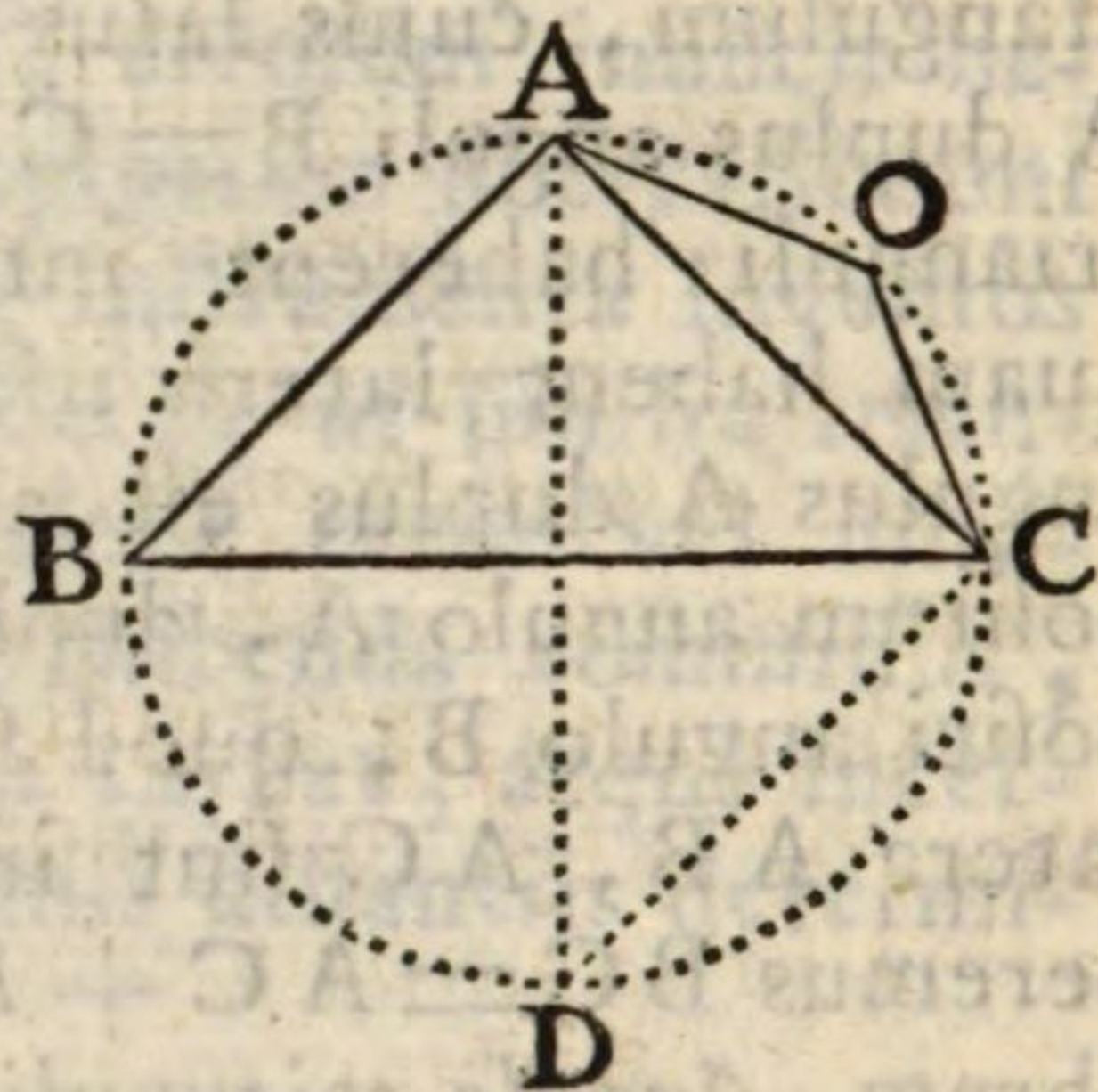
4. Hac spe dejecti, alias statim vias rimati sunt; atque hæc illos cogitatio subiit, an hæc constans proportio inveniri posset inter angulos, & chordas eorumdem angulorum; hoc est, *An anguli cujusvis trianguli esse possint inter se, uti chordæ eorumdem angulorum.*

Triangulo isosceli ABC rectangulo in A , circumscribatur circulus. Quoniam chorda anguli est ipsissima chorda arcus, qui angulum metitur, ac præterea mensura anguli



ad circumferentiam est semissis arcus a lateribus intercepti (n. 171. Geom. planæ); hinc ducta diametro AD , perspicuum est rectam DC esse chordam anguli BAC ; quia verò constat $DC = AC$, erit AC chorda arcus, qui metitur angulum A .

Similiter angulum B ad circumferentiam metitur AO semissis arcus AOC ; ac proinde chorda anguli B est recta AO . Quare, si anguli trianguli cujuscvis essent inter se, uti eorum chordæ respondentes, hæc haberetur proportio: uti angulus A est ad angulum B ; ita AC chorda anguli A , esset ad AO chordam anguli B . Atqui, per hyp., angulus A duplus est anguli B ; ergo chorda AC dupla esset chordæ AO . Cùm autem sit $AO = OC$; hinc recta AC æquaret lineam angulosam AOC ; quod repugnat definitioni rectæ lineæ; ac proinde *Anguli trianguli cujuscvis non sunt inter se, uti eorum chordæ respondentes.*



5. Pronum itaque fuit dubitare deinceps, an, si non anguli, saltem latera trianguli comparari possent chordis horum angulorum; ac tandem Geometris affulfit theorema, ex quo natam, excultamque Trigonometriam gratulamur, nimirum:

Latera trianguli cujuscvis constanter eam inter se proportionem habent, quam chordæ duplorum angulorum iisdem lateribus oppositorum.

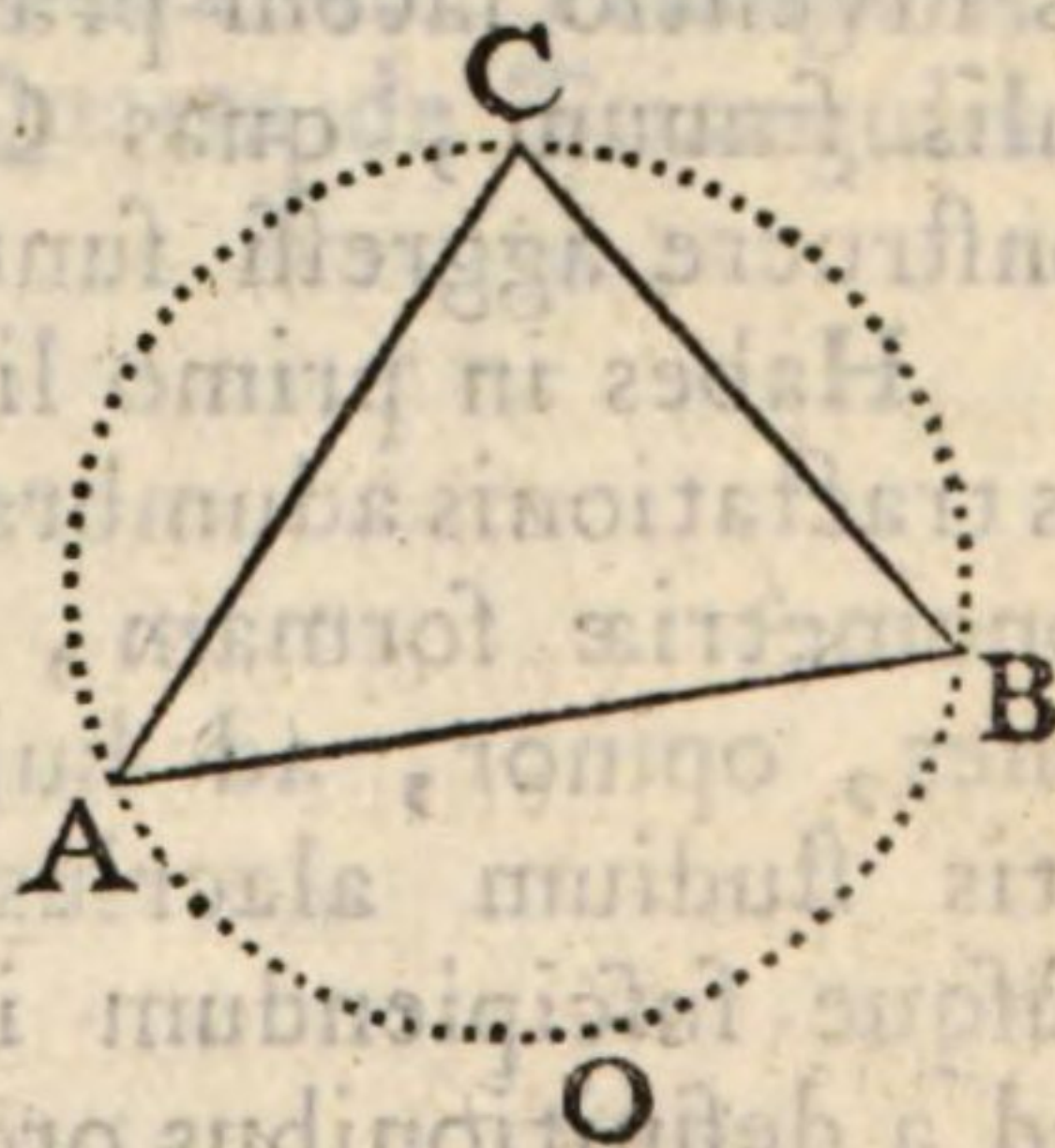
Circumscribatur circulus triangulo ABC , ut in figura sequenti. Evidens est latus quodlibet esse chordam anguli dupli illius, cui idem latus opponitur. Nam, puta, angulus C , cujus vertex est ad circumferentiam, est semissis anguli, qui haberet pro mensura arcum AOB , cujus latus AB est chorda.

6. Hæc

6. Hæc simplex observatio opinione majorem attulit fructum. Nam primis Geometris oborta statim est hæc cogitatio, cui analysim triangulorum debemus: nimirum, si determinaretur in numeris valor omnium chordarum angulorum, facile hac via cognosci possent latera, & anguli cujusvis trianguli, in quo vel unum latus, & duo anguli darentur, vel duo latera, & unus angulus, vel denique tria latera.

Quod ut unico exemplo assequantur Tirones, antequam in hanc tractationem ingrediar, ponamus dari duos angulos A, B, & latus AB trianguli ABC: Dico simplici regula trium, ut vocant, facile inveniri valorem reliquorum laterum AC, CB. Nam I. datis duobus angulis A, B, datur & tertius C; II. Fiat, *Ut chorda dupli anguli C ad chordam dupli anguli B; ita latus BA oppositum angulo C, ad latus CA oppositum angulo B.* Quare, si determinarentur in numeris chordæ omnium angulorum, uti a Geometris præstitum est, & artificium mox trademus, tres primi termini hujus proportionis erunt cogniti; quartus itaque invenietur. Eadem methodo determinabitur latus CB.

Vides jam quanta facilitate aperiatur inde via, ut, quibusdam datis, & anguli cognoscantur, & latera triangulorum omnium, si modò in numeris confici posset tabula omnium hujusmodi chordarum. In hanc curam totis viribus incubuerunt antiqui perinde, & recentiores Geometræ, qui multò etiam fore commodius censuerunt, si valorem, non integrarum chordarum, sed tantum semissium supputarent in numeris; quod eodem recidit; *Nam chordæ sunt inter se, uti earum semisses.*



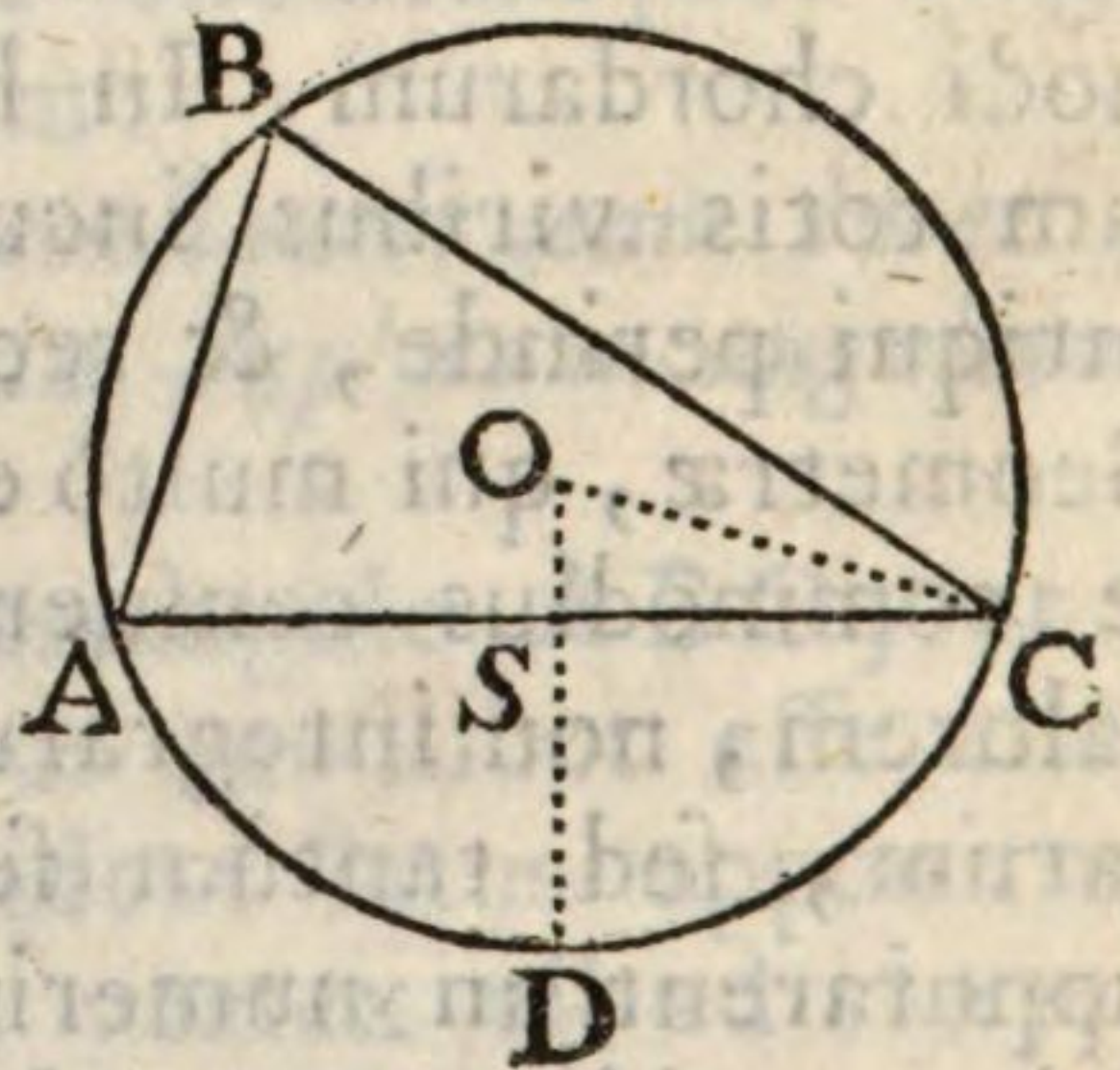
Ut

Ut autem Tirones rudem saltem, & inchoatam idæam afferant eorum, quæ pluribus erunt exponenda, brevissimè rem sic explico. Demonstravimus nuper latera trianguli esse inter se, uti semisses chordarum duplorum angulorum, qui eisdem lateribus opponuntur. Itaque a centro O in latus AC demittatur perpendicularis OSD ; ducaturque radius OC .

- I. Chorda AC est bifariam secta in puncto S ;
- II. Arcus ADC est pariter bifariam sectus in puncto D ;
- III. Angulus COD æquatur angulo B ad circumferentiam. Quæ omnia constant ex Elementis.

Vocant autem Geometræ *Sinum anguli*, puta, COD , rectam perpendicularem CS demissam ab extremitate C arcus CD , qui eundem angulum metitur, in radium OD , qui transit per extremitatem alteram D ejusdem arcus. Quamobrem, cum angulus COD sit æqualis angulo B , erit perpendicularis CS pariter finus anguli B . Est autem CS semissis chordæ CA , dupli anguli B ; Ergo *Sinus anguli nihil est aliud, quàm semissis chordæ dupli ejusdem anguli*. Demonstravimus autem latera trianguli esse inter se, uti semisses chordarum duplorum angulorum, eisdem lateribus oppositorum; Ergo *Latera trianguli sunt inter se, uti sinus angulorum hisce lateribus oppositorum*. Hujus theorematis inventio facem prætulit Tabulis sinuum, quas Geometræ construere aggressi sunt.

Habes in primo limine hujus tractationis adumbratam Trigonometriæ formam, quæ Tirones, opinor, ad hujus facultatis studium alacriùs, fidentiùsque suscipiendum incitabit. Sed a definitionibus ordiamur.



DEFINITIONES.

7. **A**Rs dimetiendi, seu resolvendi triangula, dicitur *Trigonometria*. Porro triangulum omne, ut per se patet, ex tribus lateribus constat, & ex tribus angulis; ex quibus, si tria sint nota, tria reliqua, quæ sunt ignota, inveniuntur. Hæc inventio dicitur *Resolutio*, seu *Analysis* triangulorum. Scientia igitur ea, quæ ex datis trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera, laterumve rationes, aut mixtim assequitur, *Trigonometria* appellatur, quæ triangulorum dimensionem græco vocabulo exprimit.

Triangulum duplex est, aliud *planum*, & aliud *sphæricum*. Triangulum planum est, quod ex tribus rectis constat lineis, quæ ejus latera dicuntur. Triangulum sphæricum est, quod in sphæræ superficie a tribus ejusdem sphæræ maximorum circulorum arcubus comprehenditur.

Hinc Trigonometria quoque duplex est, nempe plana, quæ circa triangula plana; & sphærica, quæ circa triangula sphærica versatur.

Quare in quatuor partes hunc tractatum dividemus. Prima aget de constructione Tabularum Sinuum, Tangentium, & Secantium; Secunda de Triangulis planis; Tertia de Logarithmis; Quarta de Triangulis sphæricis.



TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PARS PRIMA.

*De Trigonometria plana, seu rectilinea, & de constructione
Tabularum Sinuum, Tangentium,
& Secantium.*



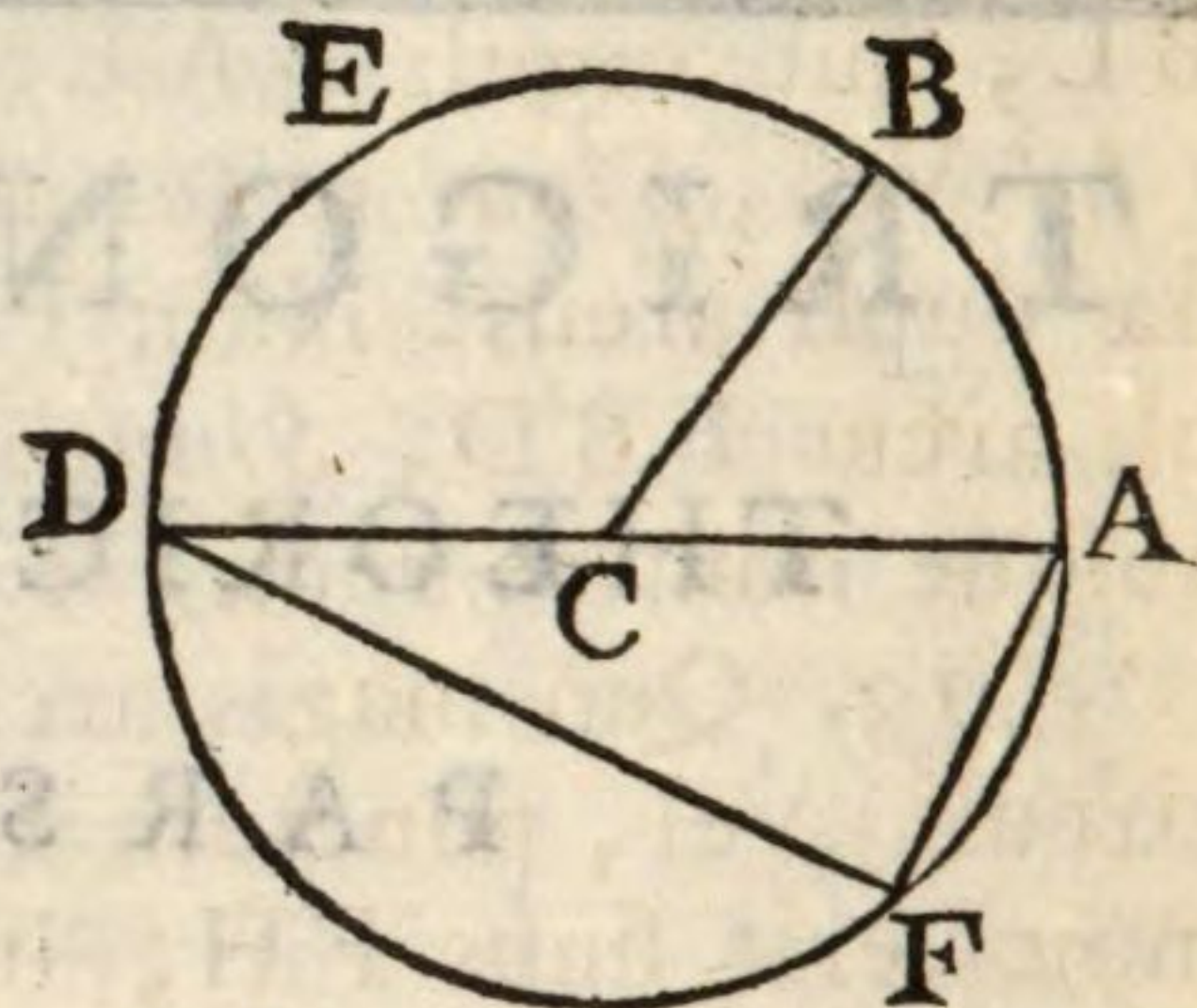
UTITUR quatuor linearum generibus Trigonometria, nempe Sinibus, Tangentibus, Secantibus, ac Sinibus versis, quorum in analysi triangulorum, in Geometria practica, in Astronomia, aliisque usus est maximus. Vocant autem plerique Recentiores has omnes lineas generatim *Functiones* arcuum circuli, vel angulorum eisdem arcus habentium pro mensura.

DEFINITIONES.

Quid sint Sinus, Tangentes, & Secantes; & quorsum collimet harum linearum inventio, & artificium.

8. **A**nguli plani rectilinei ACB , vel BCD *quantitas*, seu *mensura* est circuli arcus AB , vel BED ex anguli vertice C , tanquam centro, ad quodvis intervallum descripti, comprehensus inter rectas AC , BC , vel BC , DC , angulum BCA , vel BCD constituentes.

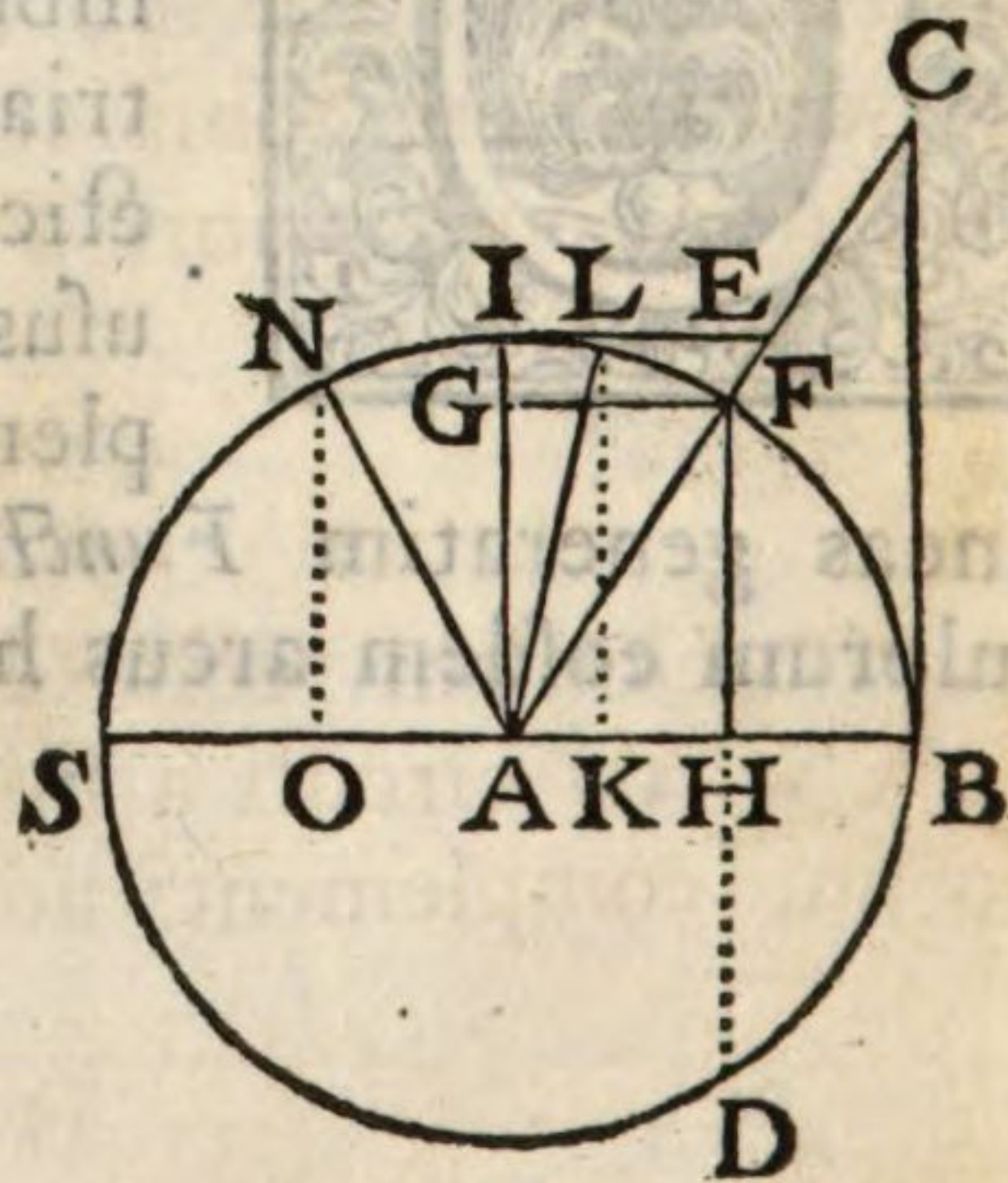
9. *Subtensa*, seu *Chorda* alicujus arcus, est linea recta ducta ab uno ad alterum extremum ejusdem arcus. Sic recta AF est chorda arcus AF , quem ipsa subtendit, peræquè ac alterius arcus $ABDF$.



Scholion.

Quando simpliciter dicitur chorda arcus, semper intelligitur chorda minoris arcus, ex duobus, quos illa subtendit. Diameter autem dicitur chorda maxima.

10. *Complementum* alicujus arcus, aut anguli, est id, quod eidem deest ad complendum quadrantem circuli, vel angulum rectum. Sic arcus IF dicitur complementum alterius arcus BF ; & reciprocè arcus BF est complementum primi arcus IF .



11. *Sup-*

11. *Supplementum* dati arcus, aut anguli, est id, quod eidem deest ad complendum semicirculum, aut duos rectos. Sic hujus arcus BF est supplementum arcus SNF; & reciprocè.

12. *Sinus rectus* alicujus arcus, aut anguli, est recta perpendicularis, cadens ab uno extremorum dati arcus in circuli diametrum ab altero extremo ejusdem arcus puncto ductam. Sic linea FH est sinus rectus arcus BF, aut anguli BAF; LK est sinus rectus arcus BL, aut anguli BAL.

Vel, *Sinus rectus* alicujus arcus est dimidium chordæ dupli arcus. Nam FH est semissis chordæ FD, dupli arcus FBD. *Sinus rectus* simpliciter vocatur *sinus*, absque nomine recti, & dicitur etiam *sinus primus*.

13. Quò magis arcus BF accedet ad quadrantem circuli, vel, punctum F quò propius fiet puncto I, eò major erit sinus FH; ita ut, si punctum L intervallo infinitè parvo distet a puncto I, angulus LAB considerari poterit tanquam rectus; punctum K coincidat cum puncto A, & sinus LK cum radio IA. Hinc radius est sinus anguli recti, estque omnium maximus; & hac de causa dicitur *sinus totus*, vel *sinus quadrantis*, quoniam refertur ad quadrantem, qui est mensura anguli recti.

14. *Sinus complementi*, sive *sinus secundus* arcus FB, & anguli FAB, est FG sinus illius arcus FI, qui quadrantem complet; adeoque & sinus illius anguli FAI, qui cum priore FAB complet rectum IAB.

Corollarium I.

15. **Q**uoniam recta $GF = AH$, hinc distantia centri circuli a sinu recto assumi semper poterit pro sinu complementi ad unum rectum.

Scholion.

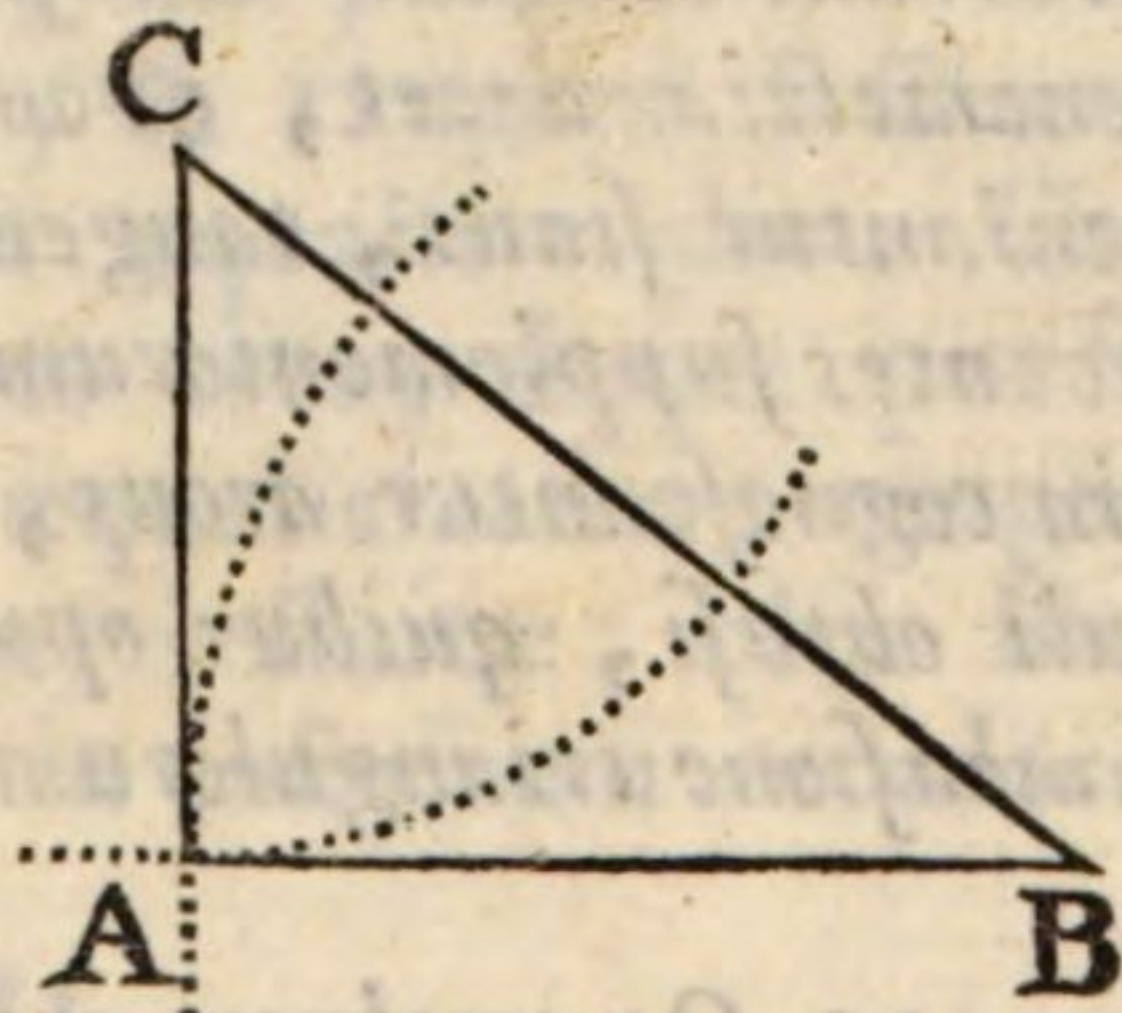
CUm Scriptores de sinu aliquo loquuntur, semper intelligunt sinum rectum: nisi illum vocent sinum complementi, aut versum.

19. *Tangens alicujus arcus, aut anguli, est recta, quæ extremitatem arcus contingit, comprehensa inter contactum, & concursum cum linea, ex centro per alterum extremum ejusdem arcus extra circulum producta. Sic (Fig. n. 18.) recta BC est tangens arcus BF; & recta IE est tangens arcus IF. Hujusmodi autem tangens appellatur prima.*

Secans alicujus arcus est linea ducta ex centro circuli per extremum arcus, & ad tangentem extra circulum terminata. Atque ita linea AC est secans arcus BF, & linea AE secans arcus IF; vocaturque hujusmodi secans prima.

Corollarium.

20. **H**Inc in omni triangulo rectangulo, si alterutrum duorum laterum, puta, AB, accipiat^rur tanquam radius, seu sinus totus, latus alterum AC evadit tangens anguli B adjacentis primo lateri AB; & hypotenusa CB evadit secans ejusdem anguli B. Sin autem latus AC accipiat^rur pro radio, seu sinu toto, latus AB evadit tangens anguli C, & hypotenusa CB secans ejusdem anguli C.



semicirculum constituit. Et angulus recto major FAS eundem habet sinum, quem angulus acutus FAB , qui cum eo efficit duos rectos. Ratio est, quia ex Definit. secunda n. 12. sinus arcus FB est FH dimidium chordæ FD . Cum autem eadem subtenfa sit chorda duorum arcuum FBD , FSD , qui simul circulum integrum constituunt; erit quoque ejusdem chordæ semissis FH , sinus semissium eorundem arcuum FNS & FB , qui semicirculum componunt.

Corollarium.

23. **S**I quærat^r valor anguli, cujus datur sinus FH , poterit indifferenter exhiberi angulus acutus FAB , vel obtusus FAS ; nisi fortè præcognoscatur *in qua specie debeat esse angulus*, qui pertinet ad datum sinum FH , nimirum, an obtusus, vel acutus.

Scholion.

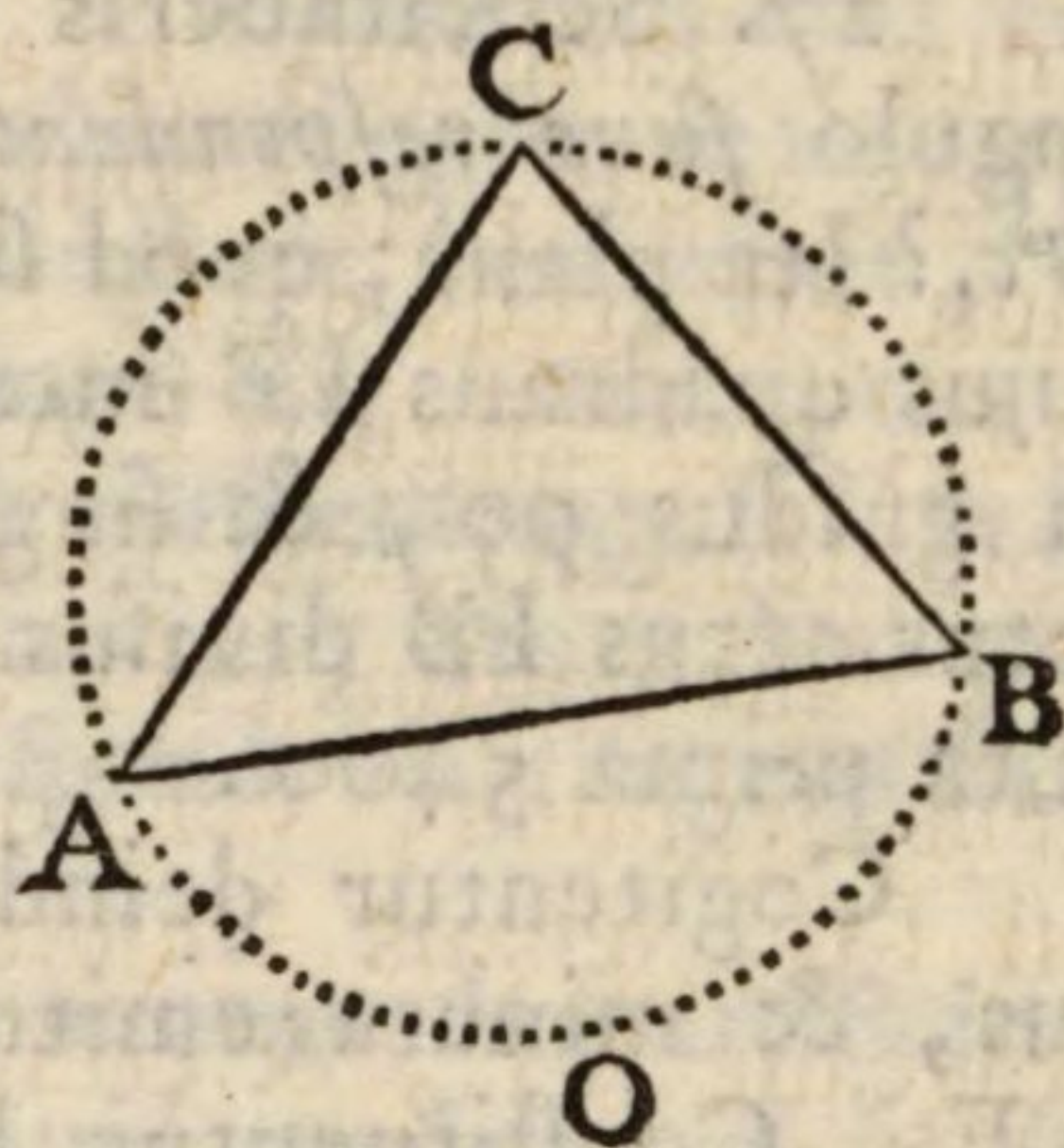
HArum autem linearum, quas hætenus definivimus, quædam totæ intra circulum reperiuntur, ut sinus; quædam totæ extra, ut tangentes; aliæ partim intra, & partim extra, ut secantes.

24. Evanefcente arcu BF , ubi punctum F coincidat cum B , sinus rectus FH , & tangens BC evanescunt; sed secans AC evadit æqualis radio. Crescente arcu BF , crescunt omnes tres, donec puncto F abeunte in I , sinus FH fit æqualis radio; tangens verò BC , & secans AC evadunt infinitæ; cum fiant parallelæ, adeoque punctum C in infinitum recedat.

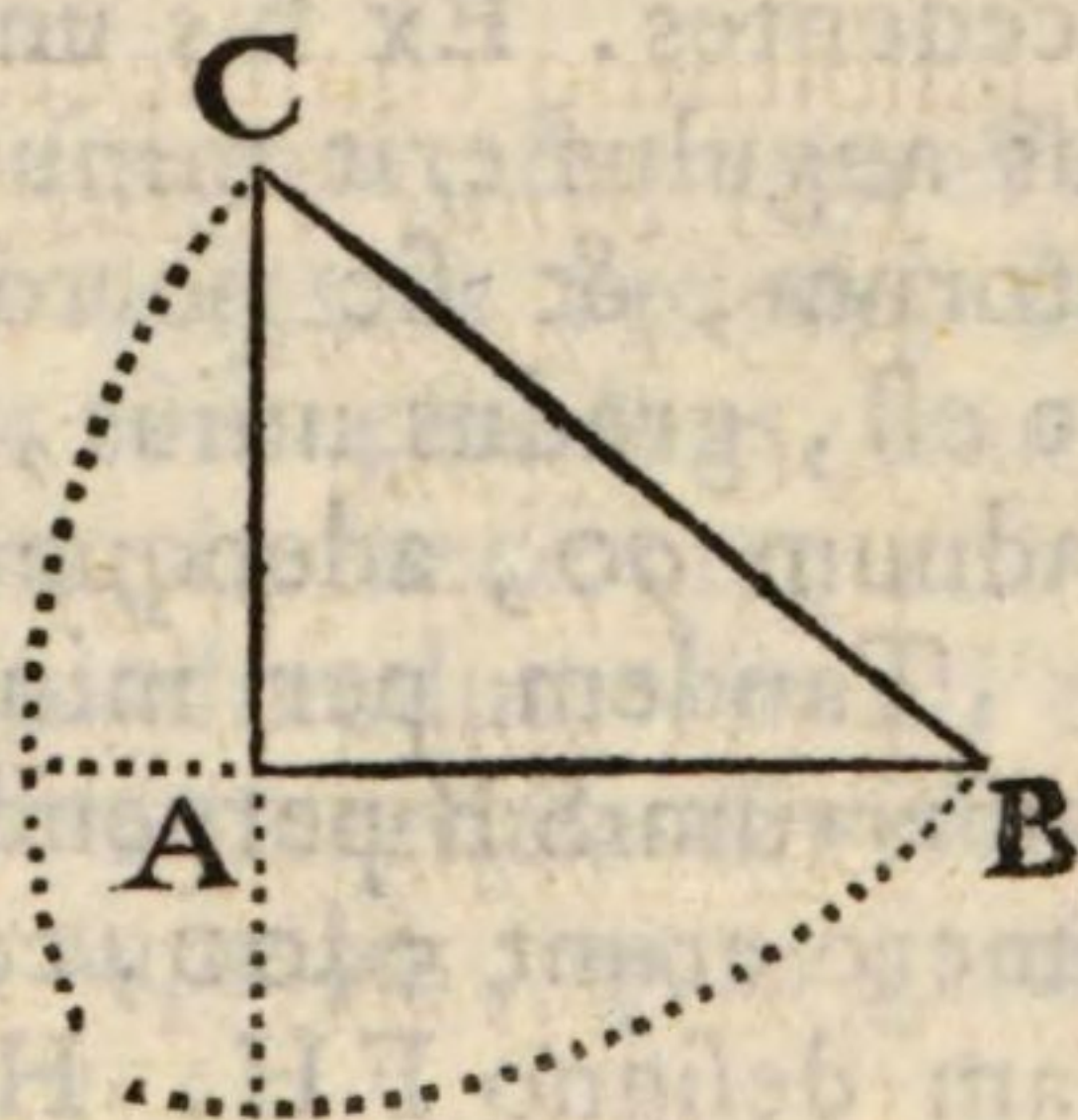
Corollarium.

TAngens anguli recti, uti & secans vocantur infinitæ.

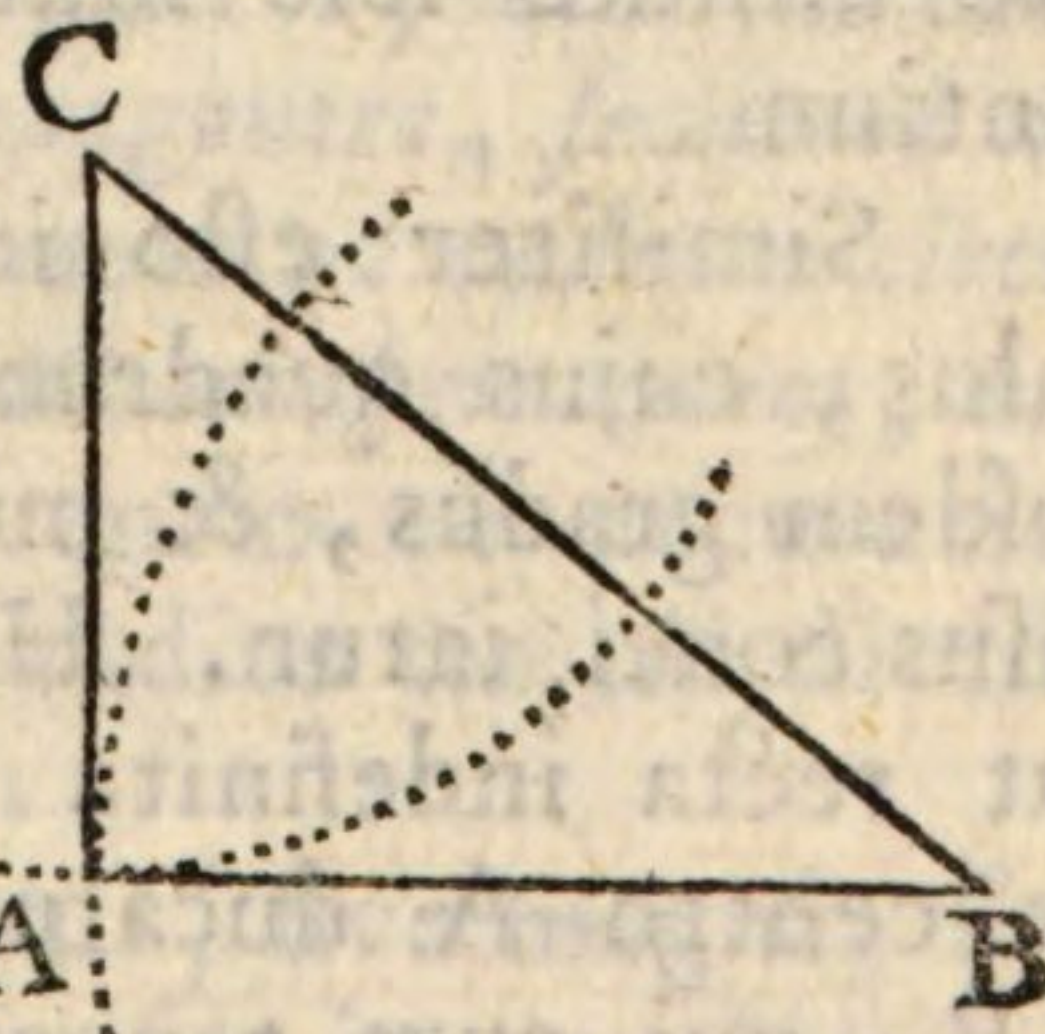
pro mensura semissem arcus $A O B$ a suis lateribus intercepti; & consequenter (*n.* 5.) hujus anguli sinus erit sinus semisseos ejusdem arcus $A O B$. Atqui (*n.* 5.) sinus semisseos hujus arcus æquatur semissi subtensæ $A B$, seu lateris oppositi angulo C ; ergo angulus C habet pro sinu semissem lateris $A B$, quod eidem angulo C opponitur. Eodem modo demonstrabitur duos angulos A & B habere pro sinu semissem laterum oppositorum.



In omni pariter triangulo rectangulo vidimus *n.* 16. hypotenusam BC vicem obire sinus totius, seu radii circuli, centro B , intervallo BC , vel centro C , intervallo CB , descripti.



Similiter (*n.* 20.) in omni triangulo rectangulo ABC respectu acuti anguli B tangens est AC , ipsi oppositum latus; & alterum AB , ipsi adjacens, est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò BC est secans, si centro B per A describatur circulus.



Pari modo respectu alterius acuti C tangens est AB ; sinus totus, seu radius est AC ; secans BC , si centro C per A describatur circulus.

Hypotenusa igitur utriusque acuti anguli secans est; ac proinde, cum hi anguli inæ-

quales sunt, diversis numeris in Tabulis sinuum hypotenusa exprimitur; uti deinceps constabit.

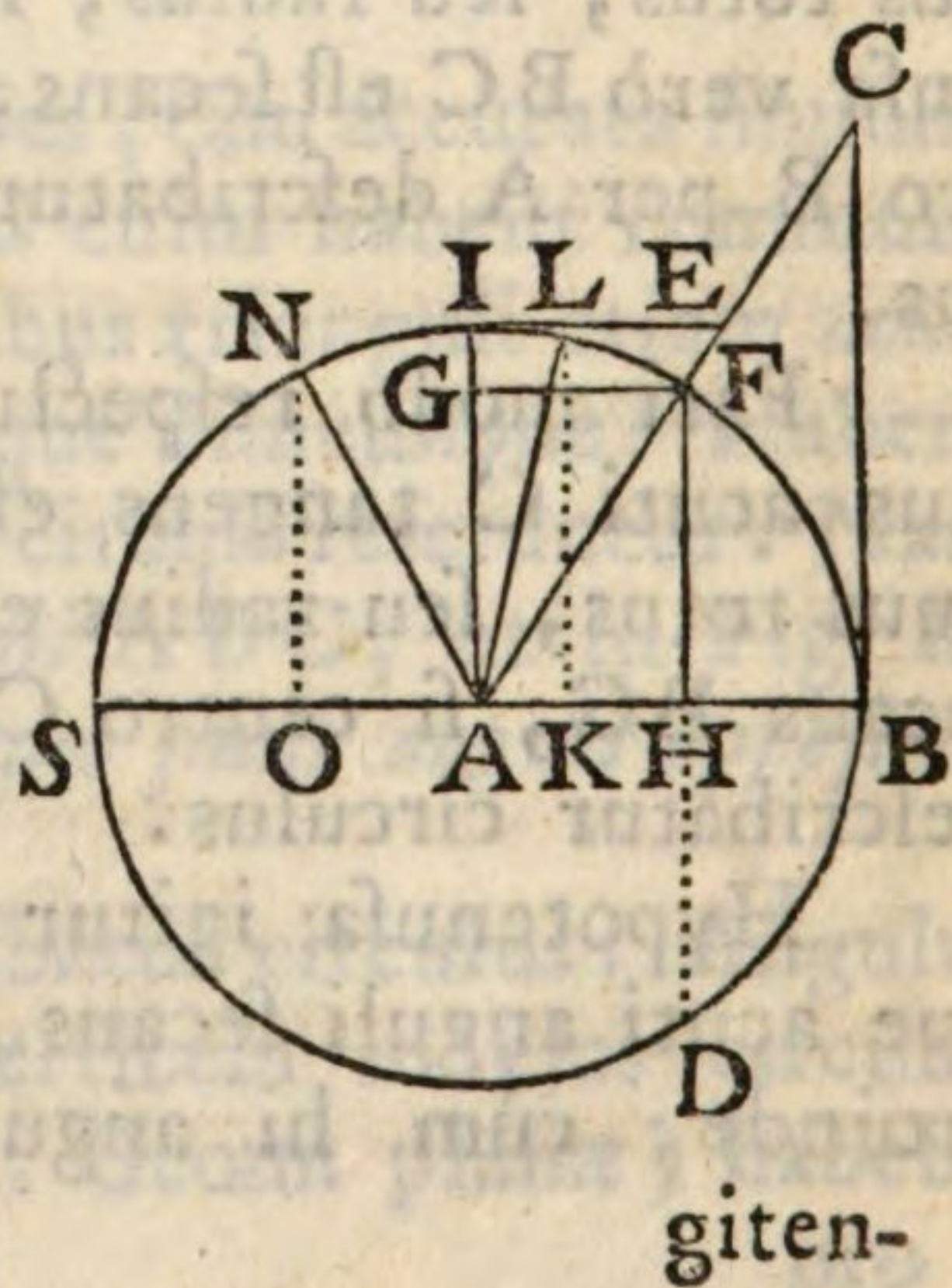
Hæc autem analogia notanda in primis est, ut sinus, tangentes, secantes ad usum deducantur.

27. Sciscitaberis rursus, an cuilibet arcui, aut angulo *suus respondeat sinus, cuique proprius, tangens &c.*? Ita planè; quod sic declaro. Esto circulus $IBDS$, cujus quadrans IB intelligatur, ut moris est, divisus in gradus 90, & singuli gradus in minuta 60; sic ut totus arcus IB divisus sit in partes æquales, seu minuta prima 5400.

Cogitentur deinde ex centro C ad singulos gradus, & minuta emitti rectæ; quarum unam designo AF . Constituentur hoc facto anguli 5400, quibus subtenduntur arcus totidem uno sese invicem minuto excedentes. Ex his unum designo FAB . Itaque primus angulus erit minuti unius, secundus duorum minutorum, & sic porro; sexagesimus minutorum 60, hoc est, gradus unius, & sic deinceps; postremus IAB graduum 90, adeoque rectus.

Tandem per minuta singula ducantur rectæ ad diametrum SB perpendiculares; quæ proinde etiam ipsæ numero erunt 5400, computando radium IA ; quarum unam designo FH . Hæ sinus erunt arcuum, & angulorum uno minuto sese mutuò superantium.

Similiter esto idem circulus, cujus quadrans IB in eosdem gradus, & minuta divisus concipiatur. Hunc tangat recta indefinita BC ; & ex centro A ducatur radius AB , qui cum tangente constituet angulum rectum. Co-



giten-

gitentur deinde per quadrantis gradus singulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF &c.: quo facto constituentur anguli CAB &c. ad 5400, ut supra, quibus subtenduntur arcus totidem BF &c.

Itaque tangens arcus BF, & eidem subtenti anguli FAB, erit recta BC, circulum tangens in uno extremo B ipsius arcus, inter punctum contactus, & productam AC per aliud extremum C, intercepta.

Secans ejusdem arcus BF, & ejusdem anguli FAB, erit radius AF a tangente terminatus; atque hac methodo arcui cuivis, & angulo respondebit tangens sua, & secans.

28. Quæret denique, quorsum omne hoc artificium recidat, & quem in usum? ac quid tandem rei sit *invenire sinus, tangentes, & secantes anguli cujuslibet, & arcus?*

Respondeo, Trigonometriæ scopum, & progressum esse planissimum. Nam circuli cujusvis radius, five sinus totalis intelligitur divisus in eundem numerum partium æqualium, nimirum, in 100000, aut in 10000000 partes æquales; quemadmodum circuli cujusvis five magni, five parvi circumferentia dividi solet a Geometris in 360 partes æquales, quas gradus vocant.

Tum geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus singuli sinus, tangentes, secantes contineant. *Invenire itaque sinus, tangentes, secantes nihil est aliud, quàm eorum proportionem ad radium circuli, aut veram, aut a vera insensibiliter aberrantem, numeris exprimere.* Hæc autem inventio eò accuratior futura est, quò plures in partes radius circuli divisus assumitur; uti deinceps ostendam.

29. Quia verò cujuslibet circuli, five magni, five parvi radius semper intelligitur divisus in eundem numerum partium æqualium; hinc necesse est, ut partes

minoris radii minores sint, quàm partes majoris radii; quod idem dici solet de gradibus circumferentiæ circulatorum inæqualium. Hac de causa Tabulæ sinuum, in quibus exponitur, quot ex illis radii partibus singuli sinus contineant, non exhibent eorum sinuum *magnitudinem absolutam, sed unice respectivam*, hoc est, *eorum proportionem ad radium circuli*. Exempli causa: Quamvis, ope calculi trigonometrici mox explicandi, sinus anguli graduum 30, inveniatur esse 50000 partium radii divisi in 100000 partes æquales; decerni inde tamen non potest ejusdem sinus magnitudo absoluta, puta, 3 pedum, 4 pedum &c. Nam hinc deducitur unice proportio, quam dati anguli sinus habet ad reliquos, & ad sinum totum, seu radium; nimirum, sinus 30 graduum, erit semissis sinus anguli recti; nam primus cognoscitur esse 50000 partium, & alter ponitur esse 100000 earumdem partium.

At, quamvis ex Tabulis magnitudo absoluta sinuum non cognoscatur, hoc non impedit, quominus inveniri possit magnitudo absoluta laterum trianguli, cujus videlicet unum latus, & duo anguli cognoscantur. Nam sinus inventi per Tabulas, uti mox ostendam, erunt proportionales lateribus oppositis duorum angulorum; & consequenter, si sinus anguli oppositi lateri cognito sit duplus alterius sinus, etiam latus cognitum erit duplum lateris quæsitum; ac proinde, si latus cognitum sit 50 pedum, latus quæsitum erit 25. Idem dicendum de tangentibus, & secantibus.

30. Gradus est trecentesima sexagesima pars totius circumferentiæ circuli. Minutum primum est sexagesima pars gradus; minutum secundum sexagesima pars minuti primi; & ita deinceps. Sic autem scribuntur. Ut $24^{\circ} 18' 15'' 40'''$ &c., sunt gradus 24, minuta prima 18, secunda 15, tertia 40.

Scholion.

UTilius fortasse esset, inquit Joannes Keil in Elem. Trig., circulum in decupla ratione secare; quæ divisio forsitan aliquando obtinebit. Verum, si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans, mensura anguli recti, erit harum partium 90; si circulus in 100 partes secetur, quadrans erit 25 partium.

31. Canon *Trigonometricus linearis* est Tabula, in qua ad singulos gradus, & minuta quadrantis circuli disponuntur sinus, tangentes, & secantes in eisdem partibus, in quas circuli radius dividitur. Communiter autem radius sumitur particularum 100000, aut 10000000. Canon hic dicitur linearis, quoniam lineas continet, nempe sinus, tangentes &c., etsi numeris exprimantur: qua de causa differt a canone logarithmico, de quo infra agendum erit.

32. Datus, aut cognitus in Trigonometria dicitur arcus, cum scitur, quot gradus, & minuta contineat; datus autem angulus, quando ejus arcus datur.

33. Datus insuper dicitur sinus, vel tangens &c., quando scitur, quot radii particulas contineat.



DE CANONE

Trigonometrico, sive de Constructione Tabularum.

34. **S**I in plano aliquo quadrans tantæ magnitudinis construeretur, ut ejus arcus commodè in 90 gradus, & singuli gradus in 60 minuta, itemque utraque ejus semidiameter, sive sinus totus in 10000000 partes æquales, puta, palmos, vel etiam in plures, paucioresve dividi posset; facili negotio, inquit P. Clavius in sua Trigonometria appositè ad captum Tironum, sine ulla supputationis molestia, aut labore, omnium sinuum magnitudines cognoscerentur, si ex singulis arcus minutis rectæ ad utramque semidiameterum perpendiculares ducerentur. Quot enim particulas, seu palmos ex illis 10000000 continere inveniuntur perpendiculares istæ, tot pariter particularum forent sinus recti arcuum quadrantis; idemque dicito de reliquis sinibus, tangentibus, & secantibus. Sed quoniam id & mechanicum esset, & ferme factu impossibile, ut quadrans tantæ magnitudinis reperiatur, qui commodè tot divisiones recipiat, præsertim ob immanem postremarum tangentium, & secantium longitudinem; non aliis, quàm Geometriæ, & Arithmeticæ principiis repetenda erit hæc computatio.

35. Methodus itaque inveniendi sinus omnium angulorum, & arcuum, qui eosdem angulos metiuntur, vocatur *Constructio Tabularum*; in quibus omnes sinus exprimuntur in partibus, in quas sinus totus divisus esse concipitur; ac singuli sinus inventi suis respectivè angulis, aut arcubus proximo intervallo adjiciuntur; idemque fieri solet in canone tangentium, atque secantium.

36. Quoniam verò sinus totus, hoc est, semidiameter cujusvis circuli, intelligitur ab Astronomis divisus

visus in aliquot partes æquales, ut ratione harum partium omnes alios sinus metiantur, proportionefve omnium sinuum ad sinum totum, five ad semidiametrum in numeris exprimant; explicandum paucis erit, *in quot partes semidiametrum distribuerint antiqui, & recentiores Astronomi*. Neque enim omnes eodem modo eam sunt partiti. Ptolomæus namque semidiametrum fecat in 60 partes æquales, totam verò diametrum in 120; quamlibet deinde partem concipit divisam esse in 60 minuta, & quodvis minutum in 60 minuta secunda; & ita deinceps. Arzahel vero Arabs constituit semidiametrum partium 150, ac proinde totam diametrum partium 300; quas quidem partes rursus distribuit in minuta, ut Ptolomæus.

37. Sed utrovis modo semidiameter, five diameter dividatur, permolestum est alios omnes sinus, five chordas in ejusmodi partibus investigare; cum semper multiplicatio, divisio, extractioque radicum per fractiones Astronomicas instituenda sit; vel certè partes in minuta prima, ac secunda convertendæ, & contra, minuta in partes: quæ res laboriosa est non solum parum exercitatis in Arithmetica, verum etiam peritissimis.

38. Monteregeius tangentium inventor, Antiquorum minutias abstulit, sumpsitque radium 6000000; at habito respectu ad divisionem, putavit commodiorem 1000000. Rheticus, qui secantes etiam adjunxit, radium supposuit partium 100000000000; Briggs 1000000000000000000. Communis tamen usus omnium id temporis obtinuit, ut in supputationibus, quæ ex sinibus, aut chordis depromuntur, sinus totus statuatur partium 100000000, qui retinendus est. Ita enim opus non erit partes has in minuta prima, ac secunda distribuere, more Veterum; cum una harum partium sit multò minor, quàm unum minutum secundum radii in partes 60, secundum Ptolomæum, divisi, & consequenter tutò negligi possit in calculo. Nam

unum

unum secundum minutum est $\frac{1}{216000}$ totius semidiametri divisæ in 60 partes; cum 60 partes contineant 216000 minuta secunda. At una particula semidiametri divisæ in partes 10000000 est $\frac{1}{10000000}$ totius semidiametri. Constat autem minutiam hanc esse multò minorem illà. Quamobrem, etiamsi in sinu aliquo negligatur interdum una ferè particula ex 10000000 particulis sinus totius, multò tamen minor error committetur, quàm si negligatur unum ferè minutum secundum ex 216000 secundis, in quæ sinus totus intelligitur esse divisus. Quid præterea præstari oporteat, ut Tabula sinuum exquisitè adhuc construatur, posito sinu toto partium 100000, aut etiam pauciorum, exponam n. 70.

39. Multæ præterea observationes aliæ, quoad divisionem radii, seu sinus totius, erunt suis quæque locis adjiciendæ n. 69. 70. 71. 72. 73.; quas hoc loco congerere molestum, & grave Tironibus esset. Interim eosdem monitos velim non id agi hîc a nobis, ut immani fanè, & inutili prorsum labore Tabulæ rursus computentur. Harum constructionem, & calculum antiquis Geometris, P. Clavio, P. De Chales, Ozanamo, & nuperrimè Rivard, Deparcieux, aliisque debemus, qui posteris laborem hunc præripuerunt. Id unice agitur, ut qua ratione illæ computari possint, planissimè exponam. Hæc enim cognitio multum conferet ad earundem Tabularum usum rite intelligendum. Ac quamvis multæ etiam a Recentioribus methodi ad contrahendum calculi laborem inventæ sint; ex omnibus tamen illam seligam, quæ & captu facillima sit, & scopum attingat.

Itaque I. Ut sinus arcuum inveniantur, satis erit methodum tradere, qua cognosci possint *chordæ diversorum*

forum arcuum. Nam semiffis chordæ alicujus arcus est sinus semiffeos ejusdem arcus. II. Tangentes, & secantes ope sinuum invenientur.

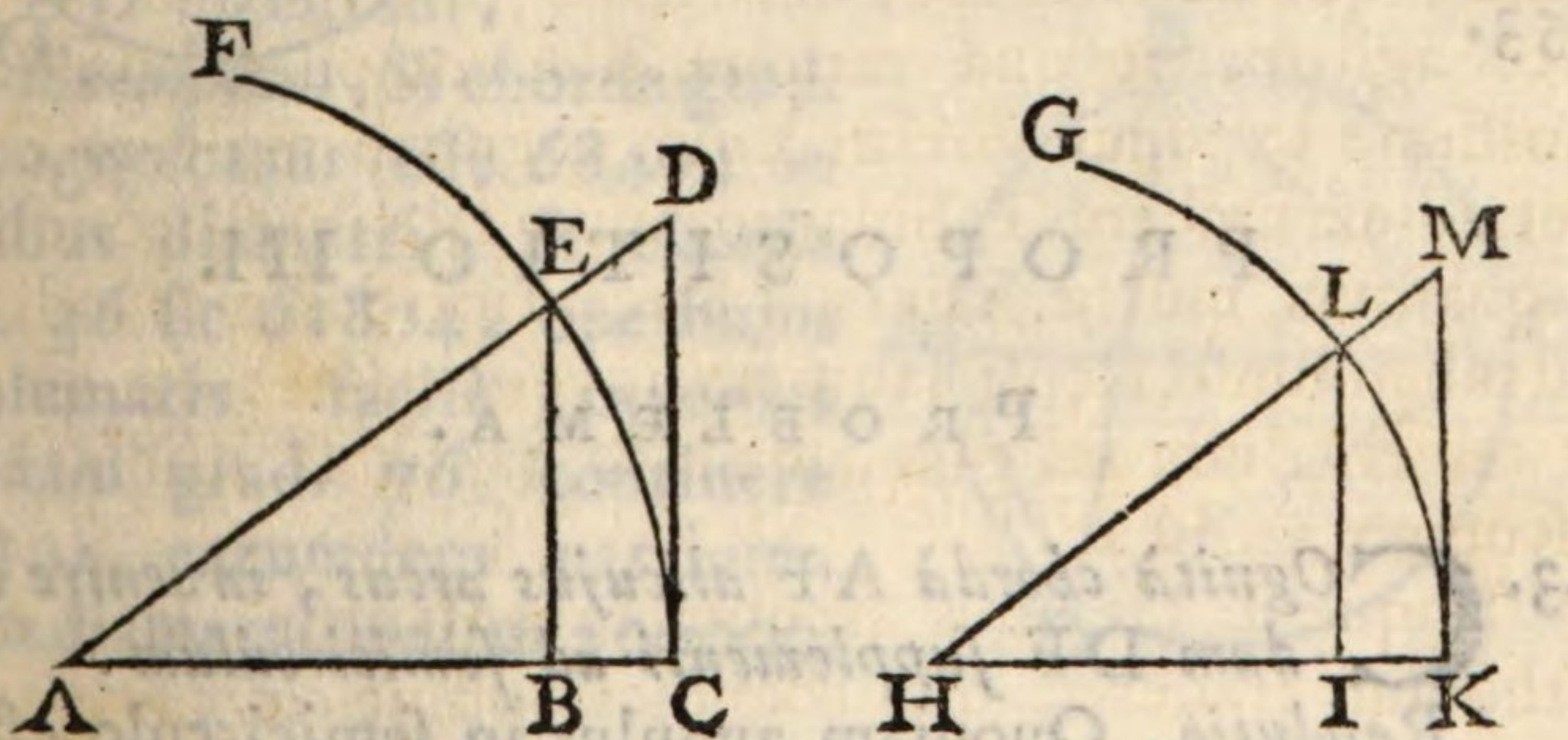
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

40. **I**N circulis inæqualibus, sinus, tangentes, & secantes arcuum similium, eandem habent rationem ad radios suorum circulorum.

Demonstratio. Si radii AC, HK duorum arcuum circuli ACEF, HKLG sint inæquales, sed arcus CE, KL sint similes, hoc est, eisdem gradus contineant: Dico eandem esse rationem sinus BE ad radium AE, quam habet sinus IL ad radium HL; & similiter eandem esse rationem tangentis CD ad radium AC, quam habet tangens KM ad radium HK &c.

Nam arcuum similium anguli A & H sunt æquales; & anguli ABE, & HIL sunt recti, ac proinde æquales; ergo triangula ABE, HIL sunt æquiangularia; quare sinus BE est ad radium AE, uti sinus IL ad radium HL. Simili ratione tangens CD est ad radium AC, uti tangens KM est ad radium HK. Pariter secans AD est ad radium AC, uti secans HM est ad radium HK. Quod &c.



Corollarium.

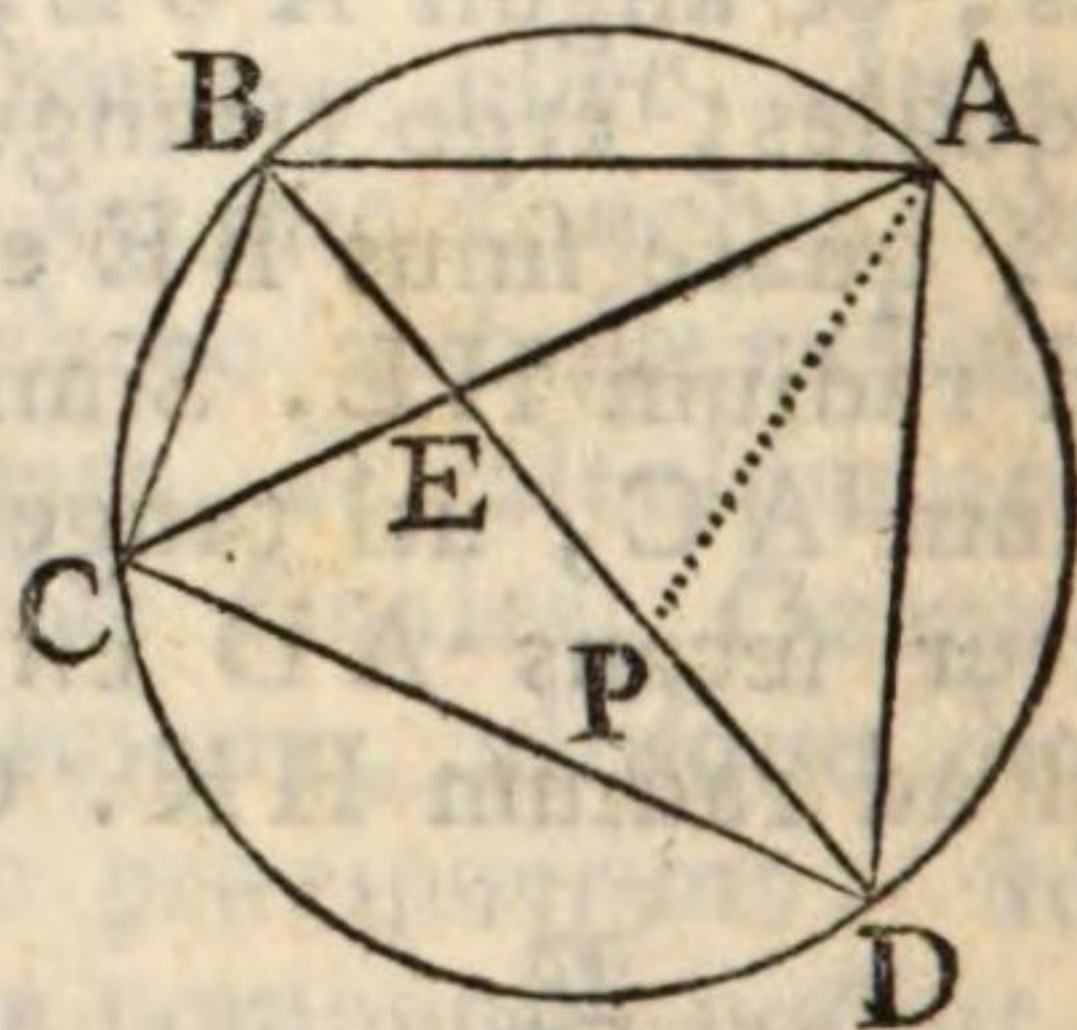
41. **H**inc posito cujusvis circuli radio diviso in quotvis partes æquales, si ope calculi trigonometrici inveniatur, quot hujusmodi partes contineant singuli sinus, tangentes, secantes omnium arcuum quadrantis circuli; numeri inventi pro sinubus, tangentibus, secantibus hujus circuli, applicari poterunt sinubus, tangentibus, & secantibus *alterius cujusvis circuli sive majoris, sive minoris*, cujus radius similiter ponitur divisus in eundem numerum partium æqualium.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

42. **S**i quadrilaterum ABCD circulo sit inscriptum, factum duarum diagonalium AC, BD æquatur summæ factorum laterum oppositorum, nimirum, $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$.

Demonstratio repetenda est ab Elementis Geom. planæ n. 553.



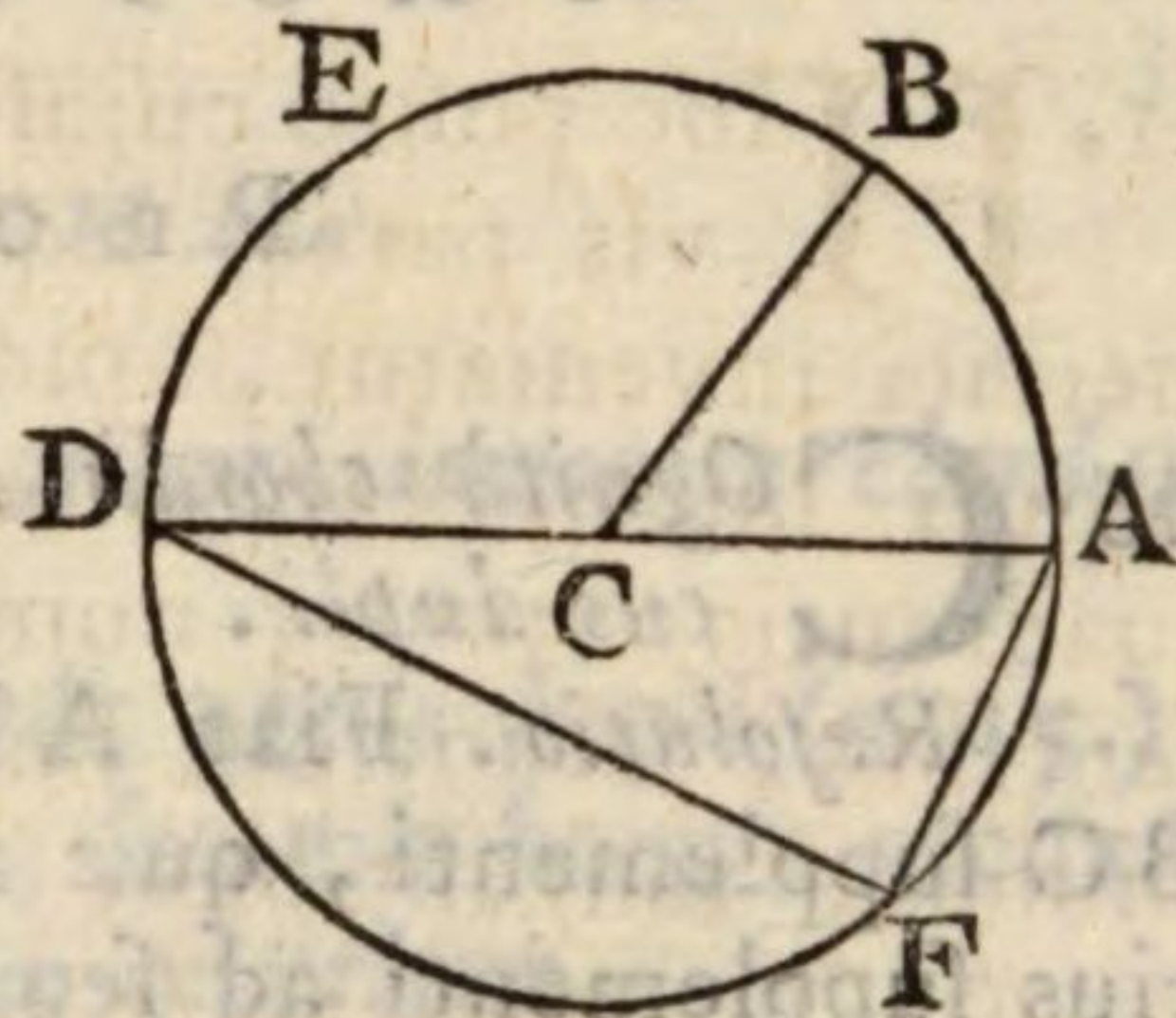
PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

43. **C**ognitâ chordâ AF alicujus arcus, invenire chordam DE supplementi ad semicirculum.

Resolutio. Quoniam angulus in semicirculo est re-
ctus,

Etus, erit $\overline{AF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AD}^2$; si ergo ponatur radius divisus in 100000 partes æquales, valor diametri erit 200000; hinc, si a quadrato diametri AD subducatur quadratum chordæ AF , residuum erit quadratum chordæ DF ; cujus radix quadrata dabit numerum partium, quas continet chorda quæsitæ DF . Quod &c.



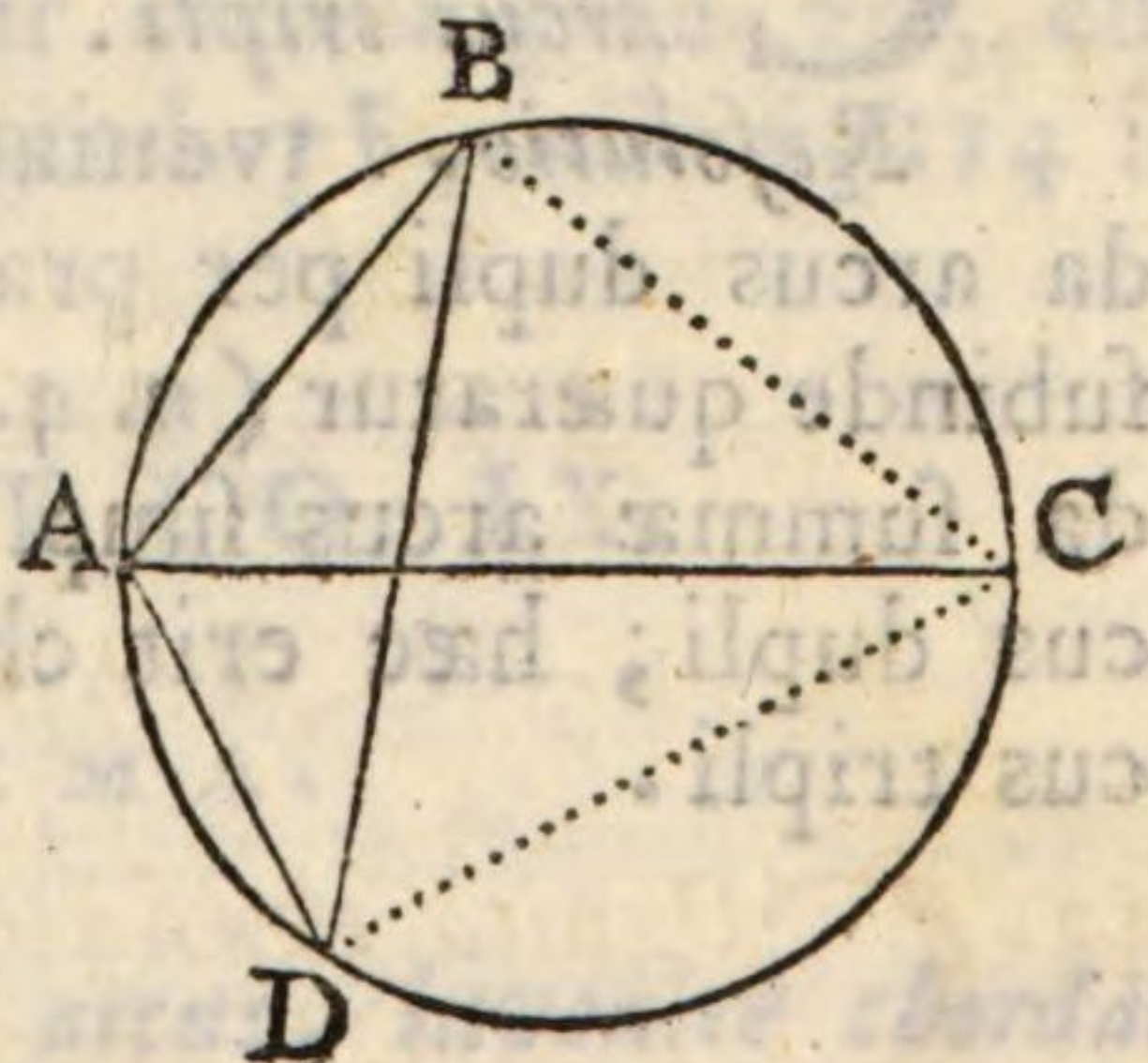
PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

44. **C**ognitis chordis AB , AD duorum arcuum, invenire chordam BD summæ eorumdem arcuum.

Resolutio. Datis chordis AB , AD , dantur quoque per Probl. præced. chordæ supplementorum BC , DC ad suum semicirculum. Fiat $AB \times DC$, & $BC \times AD$: erit (n. 42.) $AB \times DC + BC \times AD = AC \times BD$ facto diagonalium. Horum autem factorum $AB \times DC + BC \times AD$ summa dividatur per notam diametrum AC ; quotus ex divisione ortus dabit chordam BD quæsitam.

Exemplum. Si chorda grad. 40 cognoscatur esse 68404 in partibus diametri, & chorda grad. 36 sit 61804, ope hujus Problematis facile invenies chordam grad. 76 continere 123132 earumdem partium. Valor diametri ponitur 200000.



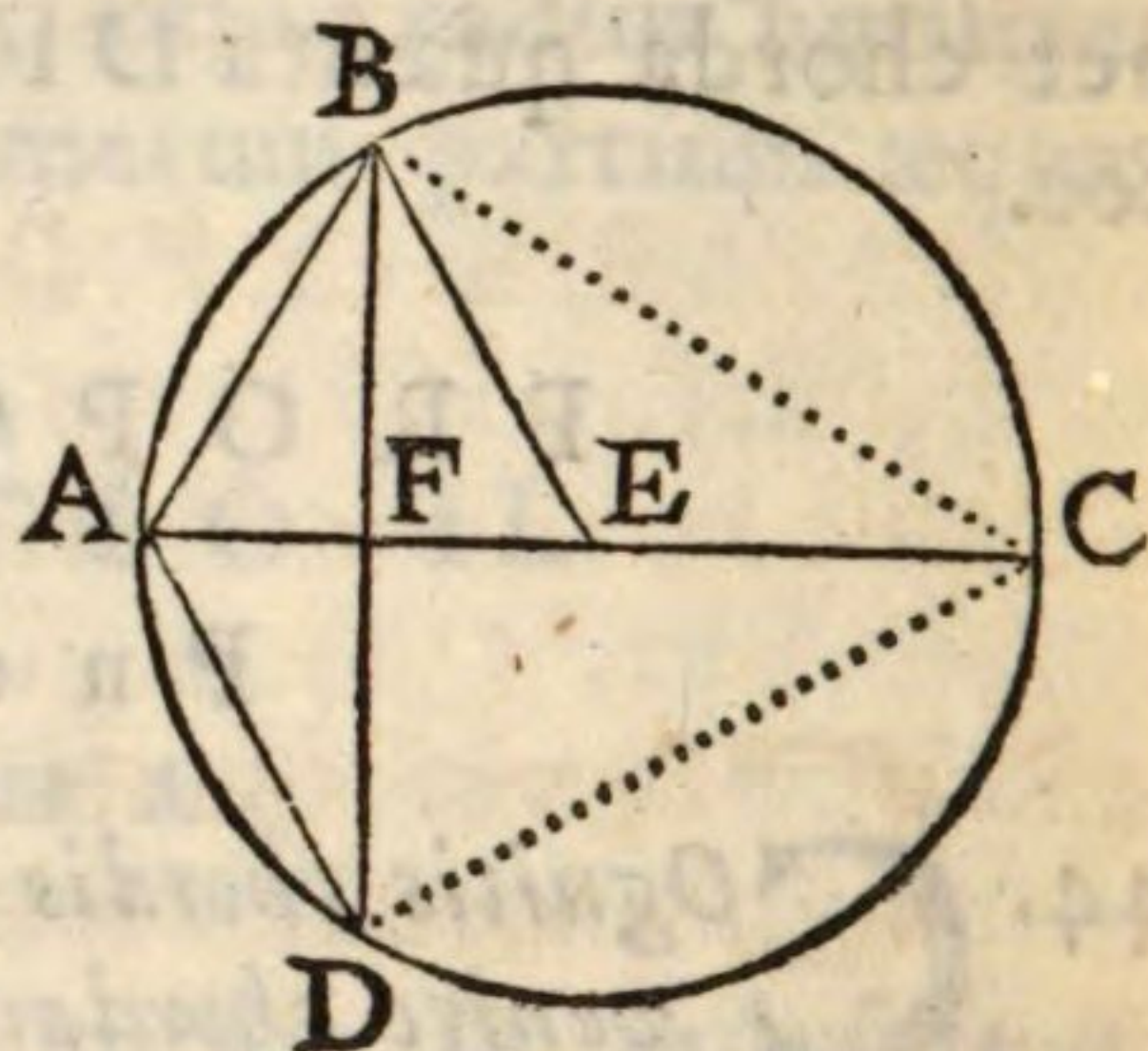
PRO-

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

45. **C**ognitâ chordâ AB, invenire chordam BD arcus dupli.

Resolutio. Fiat $AD = AB$; quæratunque chorda BC supplementi, quæ æqualis erit chordæ DC alterius supplementi ad semicirculum. In quadrilatero autem ABCD factum duarum diagonalium $AC \times BD$ æquatur summæ factorum laterum oppositorum $AB \times DC + BC \times AD$ (n. 42.): hæc summa dividatur per notam diametrum AC; quotiens, qui prodit, dabit chordam BD arcus dupli.

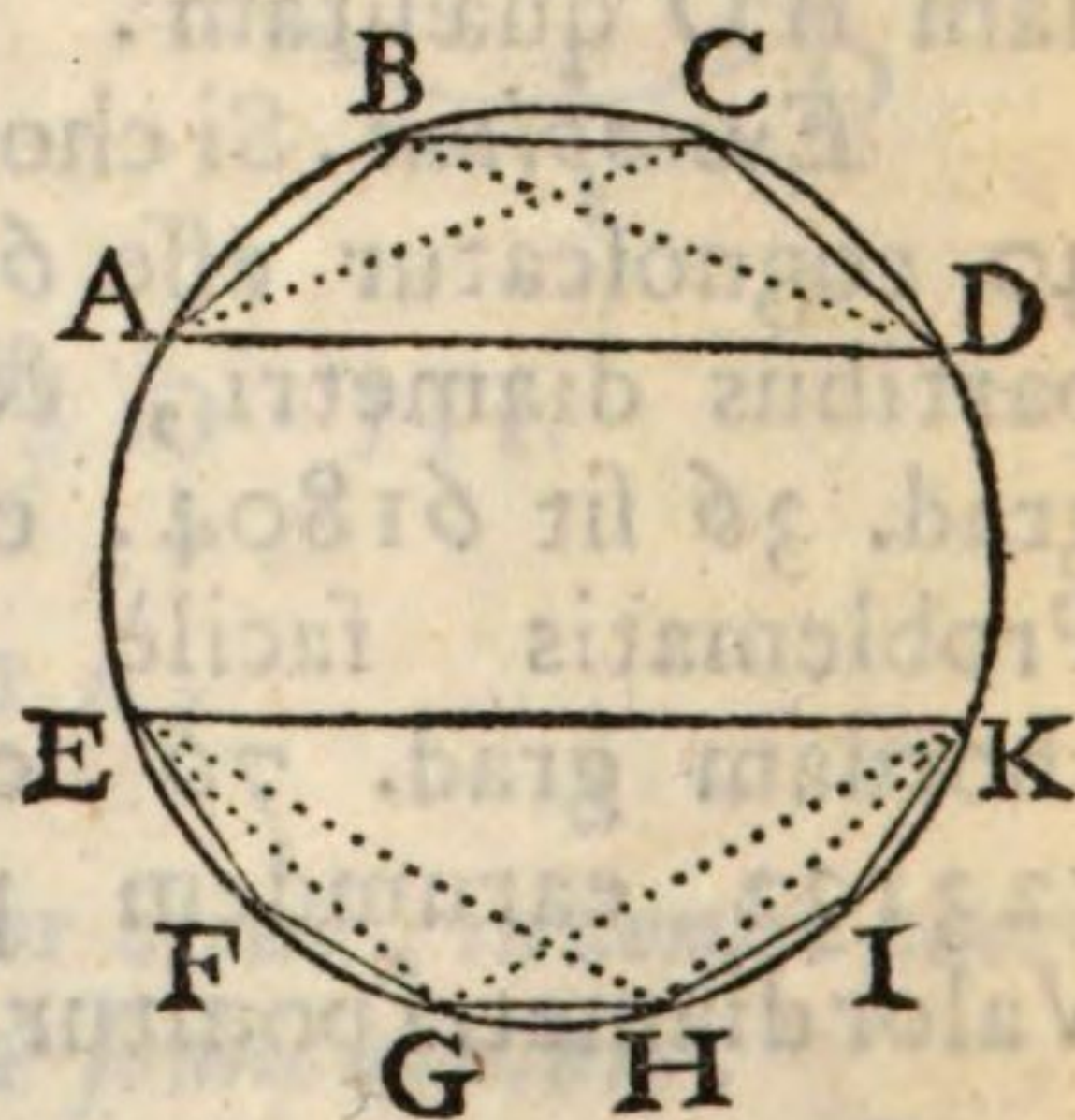


PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

46. **C**ognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus tripli.

Resolutio. Inveniatur chorda arcus dupli per præced.; ac subinde quærat (n. 44.) chorda summæ arcus simpli, & arcus dupli; hæc erit chorda arcus tripli.



PRO.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

47. **C**ognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus quintupli.

Resolutio. Inveniatur chorda arcus dupli (n. 45.), & chorda arcus tripli (n. 46.); summæ horum arcuum chorda (n. 44.), erit illa, quæ quæritur.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

48. **C**ognitâ chordâ BD alicujus arcus (Fig. n. 45.), invenire chordam BA, semisseos ejusdem arcus BAD.

Resolutio. A quadrato radii BE subducatur quadratum BF, semisseos chordæ cognitæ: residuum erit quadratum lineæ EF; cujus radix quadrata dabit rectam EF; qua subducta a radio EA, nota fiet AF; cujus quadratum addatur quadrato BF: horum quadratorum summa erit quadratum chordæ AB; a quo, radice extracta, prodibit chorda AB, quæ quærebat.

Exemplum. Si cognoscatur chorda grad. 76, esse 123132, invenietur chorda grad. 38, esse 65114 in iisdem partibus.

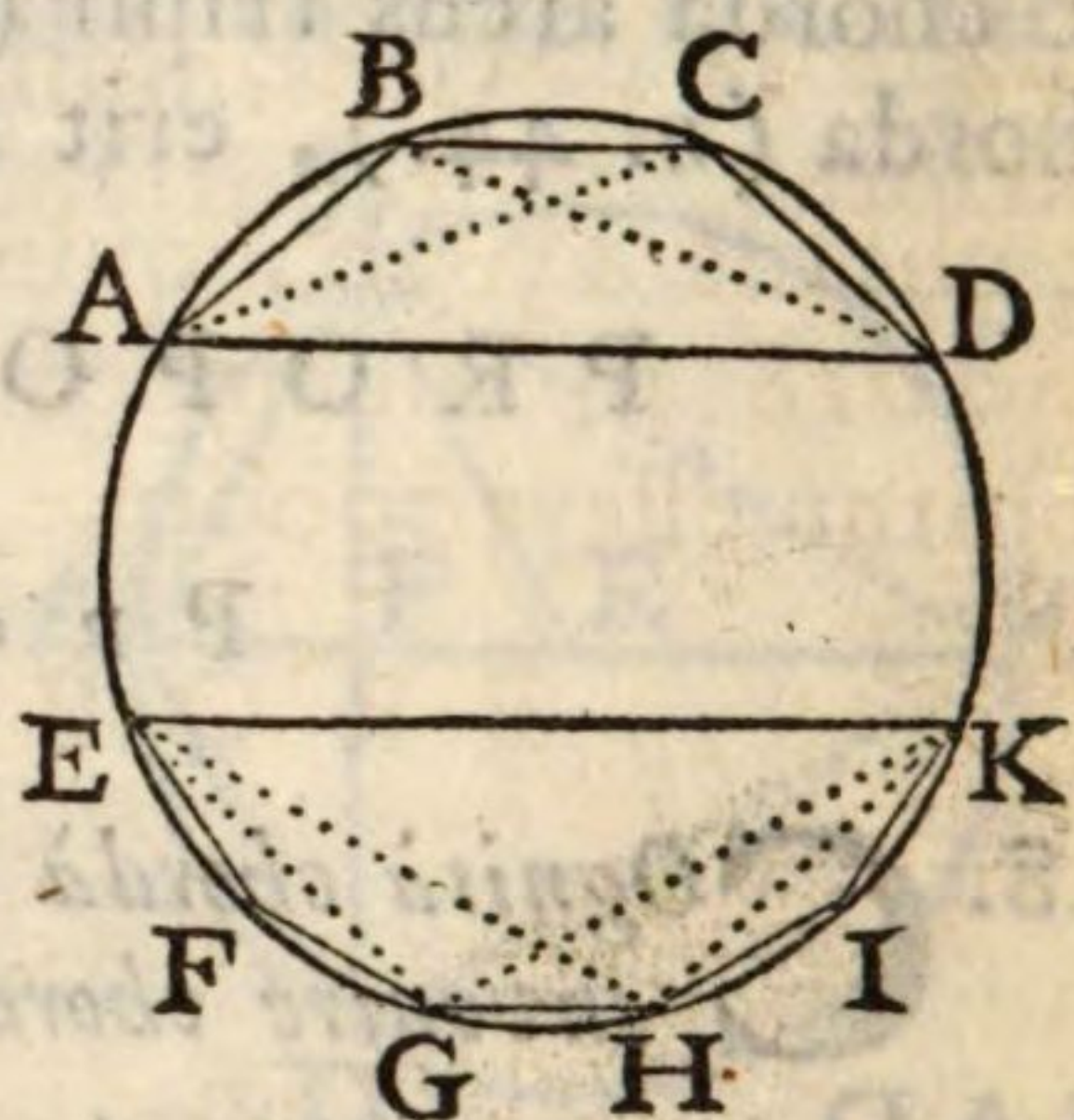
PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

49. **C**ognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam trientis ejusdem arcus.

Resolutio. Esto AD chorda cognita; & oporteat invenire chordam AB trientis arcus $ABCD$. Palam est, chordam incognitam AB , majorem esse oportere triente chordæ cognitæ AD . Itaque pro chorda AB assumatur numerus partium paulo major, quàm sit tertia pars chordæ AD ; & per hanc chordam suppositam AB , quærat^r chorda arcus tripli (*n.* 39.). Si chorda, quæ ex hac suppositione invenitur, habeat eundem numerum partium, qui designat datam chordam AD , numerus assumptus pro chorda AB , erit ille idem, qui quæritur.

At si, dum quæritur chorda arcus tripli $ABCD$, non inveniatur idem numerus partium chordæ datæ AD , instituenda erit regula trium, hoc pacto.



Si chorda inventa arcus tripli, consequitur a partium numero, qui ponitur pro AB ; Chorda cognita AD , a quo numero derivabitur?

Quartus terminus inventus, erit numerus partium, quas habere debet chorda AB .

Hæc regula trium supponit hanc proportionem: *Ut chorda inventa AB est ad chordam suppositam AD ; ita vera chorda AB est ad veram chordam AD .*

Hæc autem proportio non est omnino exacta. Verùm citra sensibilem errorem hujusmodi calculus procedet, si regula trium applicetur segmentis arcuum valde parvis, puta, arcui 7 grad., 30', & minoribus.

Cæterùm, experimentum semper capi poterit, an numerus inventus designet reipsa quæsitam chordam trientis arcus, cujus cognoscitur chorda; si nempe per chordam inventam quærat^r chorda arcus tripli; nam numerus inventus idem debet esse, quem habet chorda cognita.

Corollarium.

50. **E**Adem methodus adhibebitur, ut inveniatur chorda quintæ partis alicujus arcus; si nimirum numerus accipiatur paulo major quinta parte chordæ cognitæ, ac reliqua peragantur, ut supra.

Exemplum. Si chorda grad. 7, & min. 30, cognoscatur esse 13080 partium diametri, invenietur chorda 2, 30, triens nimirum chordæ datæ, esse 4362, & chorda 1, 30, quintans nimirum chordæ datæ, esse 2618 in iisdem partibus diametri. Radius semper ponitur esse 100000.

P R O P O S I T I O X.

P R O B L E M A.

51. **O***Pe præcedentium Problematum invenire chordas arcuum quadrantis, ab arcu duorum minutorum usque ad 90 gradus, continuo duorum minutorum augmento.*

Resolutio. Ut accuratiùs in calculo procedatur, uti in proxima Appendice uberius ostendam, assumatur radius circuli partium 10000000. Notum est ex Elementis, chordam 60 graduum æqualem esse radio circuli; quæ propterea nota erit in iisdem partibus 10000000.

Per Probl. VIII. inveniatur chorda semisseos ejusdem arcus, nimirum, chorda grad. 30, & hujus semisseos grad. 15, rursumque semisseos, grad. 7. 30.

Per Probl. IX. nota fiet chorda grad. 2. 30, si quæratⁱur chorda trientis arcus grad. 7. 30.

Cognitâ chordâ grad. 2. 30, invenietur per Probl.

IX., ejusque Coroll., chorda quintæ partis ejusdem arcus, idest, chorda grad. 0. 30.

Cognitâ chordâ 30, invenietur chorda trientis hujus arcus, hoc est, chorda grad. 0. 10.

Denique per idem Probl. IX., ejusque Coroll., quæ-
ratur chorda quintæ partis hujus ultimi arcus; & habe-
bitur chorda duorum minutorum.

Cognitâ chordâ 2, invenietur chorda 4 minuto-
rum, 8, 16, 32 &c., quærendo nimirum successive
chordam arcus dupli, per Probl. V.

Rursum cognitâ chordâ 2, invenietur chorda 6,
18, 54 &c., si continuò quæratur chorda arcus tripli,
per Probl. VI.

Denique, si quærantur chordæ summæ duorum
arcuum, per Probl. IV., cognoscetur chorda 14 per
summam arcuum 6 & 8; & chorda 22 per summam ar-
cuum 8 & 14; atque ita de reliquis, usque ad chor-
dam graduum 90.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA.

52. **I**nvenire sinus omnes uno tantum minuto differentes,
usque ad gradus 45.

Resolutio. Inventis chordis BC, DE, OF, LK
&c. omnium arcuum quadrantis circuli, qui sese or-
dinatim duobus minutis superent, facile cognoscantur
sinus omnes CP, EG &c., uno tantum minuto diffe-
rentes, usque ad gradus 45. Ratio est, quia semissis
subtensæ alicujus arcus, est sinus semisseos ejusdem ar-
cus.

PROPOSITIO XIV.

THEOREMA.

57. **S**inus totus est medius proportionalis inter tangentem arcus, & tangentem sui complementi.

Demonstratio. Estō BFI quadrans circuli. Dico tangentem BC esse ad radium $AB = AI$, uti radius AI est ad tangentem IE. Nam BC & AI sunt inter se parallelæ, uti IE & AB; ac proinde triangula ABC, AIE sunt æquiangula; itaque $BC:AB$, seu $AI::AI:IE$. Quod erat &c.

Corollarium.

58. **H**inc quadratum radii æquatur rectangulo sub tangente arcus, & tangente sui complementi. Ergo, si dividatur quadratum radii per tangentem arcus, quotus, qui prodit, erit tangens sui complementi. Ergo cognitis omnibus tangentibus ab uno minuto usque ad gradus 45, cognosci poterunt reliquæ omnes tangentes a grad. 45 usque ad 90 grad.

PROPOSITIO XV.

PROBLEMA.

59. **C**ognitis tangentibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire secantes.

Resolutio. Estō BC tangens cognita: hujus quadratum addatur quadrato radii AB; summa dabit quadratum secantis AC, ejusque quadrata radix secantem ipsam AC; atque ita porro de reliquis.

PROPOSITIO XVI.

THEOREMA.

60. **T** Angens arcus grad. 45, æquatur radio.

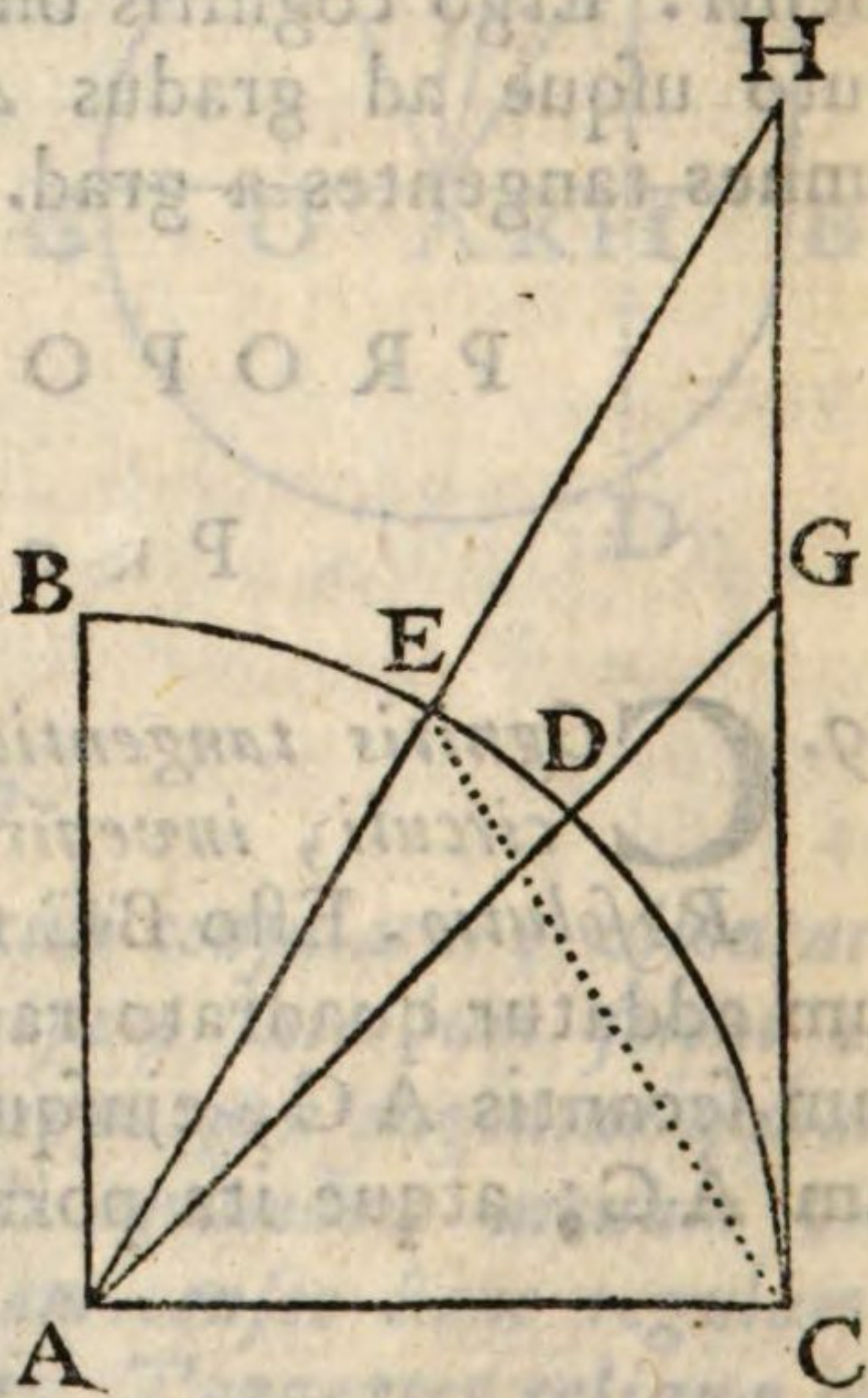
Demonstratio. Estō arcus CD grad. 45. Dico tangentem CG fore æqualem radio CA . Nam in triangulo rectangulo GCA , angulus GAC est grad. 45; & consequenter totidem graduum est angulus CGA . Itaque duo latera CG , CA æqualibus angulis opposita, inter se sunt æqualia. Quod erat &c.

PROPOSITIO XVII.

THEOREMA.

61. **S** Ecans arcus grad. 60, æquatur diametro.

Demonstratio. Estō arcus CDE grad. 60. Dico secantem AEH fore æqualem diametro. Nam I. ejus portio AE est semidiameter. II. Reliquum est, ut demonstrem partem alteram EH pariter æqualem esse radio. Ducatur chorda CE ; quæ radio æqualis est, cū subtendat arcum grad. 60. Ergo triangulum CEA est æquilaterum; & consequenter anguli singuli erunt grad. 60. Quare angulus ECH , complementum anguli ACE , erit grad. 30. Similiter angulus H erit grad. 30; quippe qui est complementum anguli EAC grad. 60. Triangulum itaque CEH est isosceles; & duo latera CE , EH sunt æqualia; ac proinde EH æquatur radio, & secans AH æquatur diametro. Quod &c.



PRO-

PROPOSITIO XVIII.

PROBLEMA.

62. **C**anonem Trigonometricum sinuum, tangentium, & secantium construere.

Resolutio. Canon Trigonometricus, seu tabula communis sex ordines, seu columnas continet, quæ in utraque pagina, dextera, & sinistra simul exhibentur, ut unico obtutu cognoscantur hinc gradus, inde eorum complementa usque ad 90 gradus, ac singulis suis respondeat sinus &c.

Prima columna sinistræ paginæ continet arcus, nimirum, gradus, vel graduum minuta. Gradus notantur in fronte primæ columnæ, qui incipiunt a 0, & descendendo perpetuò crescunt usque ad gradus 45; singulis gradibus respondent in secunda columna sinus, in tertia tangentes, in quarta secantes, in quinta, & sexta logarithmi sinuum, & tangentium; quorum originem, usumque infra exponam.

Pagina dextera totidem habet columnas. Gradus notantur pariter in fronte primæ columnæ; sed incipiunt a 90, & perpetuò decrescunt. Sequuntur eodem ordine sinus, tangentes, secantes &c.

Hæc in utraque pagina artificiosa notatio graduum crescentium, & decrescentium eò collimat, ut cuivis arcui, seu gradui existenti in altera pagina, respondeat e regione in altera, ejus complementum, adeoque & cosinus, & cotangens &c. Nam 90 & 0 quadrantem complent, uti 89 & 1, 88 & 2 &c.; & quantum in altera pagina additur, tantundem in altera detrahitur.

Inveniuntur tantum arcus usque ad quadrantem; quia arcus quadrante majores eundem habent sinum, tangentem, & secantem, ac habeant sua complementa ad semicirculum. Aptati sunt autem sinus, tangentes, secantes radio 100000000.

Scho-

Scholion I.

IN notatione graduum omisimus minuta prima, quæ in tabulis prolixioribus Ozanami, P. De Chales, P. Clavii, & aliorum apponi solent; quas, si opus erit, consulere possunt Tirones. Verùm ex solis gradibus inveniri etiam poterunt sinus &c. pro minutis primis, & secundis, n. 66. & 67.

Scholion II.

NOtat Clavius rectius fecisse Recentiores, qui sinuum tabulam confecerunt, quàm Ptolomæum, & Veteres, qui chordas in tabulas redegerunt. Pro sinibus enim satis est, si quadrans circuli per singula minuta extendatur; at pro chordis necesse est, totum semicirculum per minuta singula extendere; ita ut chordarum tabula sit duplò major, quàm tabula sinuum. Taceo, multò expeditiorem, facilioremque esse sinuum usum in rebus Astronomicis, & Geometricis, quàm chordarum; ita ut hac nostra ætate tabulæ chordarum penitus obsoleverint.



De Ufu Tabularum.

OMnis tabularum usus duobus Problematis continetur, quorum altero ex datis arcubus, seu gradibus quærantur sinus, tangentes, & secantes; altero ex datis sinibus &c. quærantur arcus, seu gradus.

PROPOSITIO XIX.

PROBLEMA.

63. **D**ato quovis arcu, aut angulo, eruere e tabulis sinum ipsi respondentem.

Resolutio. Si arcus datus non sit quadrante major, & solos gradus contineat, invenietur in prima columna paginæ sinistræ, vel dexteræ, prout fuerit major, vel minor 45° ; ac e regione ipsius in eadem pagina respondebit in secunda columna sinus, in tertia tangens &c.; atque in altera pagina complementum, cosinus, cotangens &c.

Si arcus datus quadrantem excedat, & solos gradus contineat, subtrahatur a 180° ; & residui inveniantur sinus, qui erit sinus arcus dati. Nam ex dictis arcus quadrante major eundem habet sinum, quem arcus minor, qui cum eo semicirculum constituit.

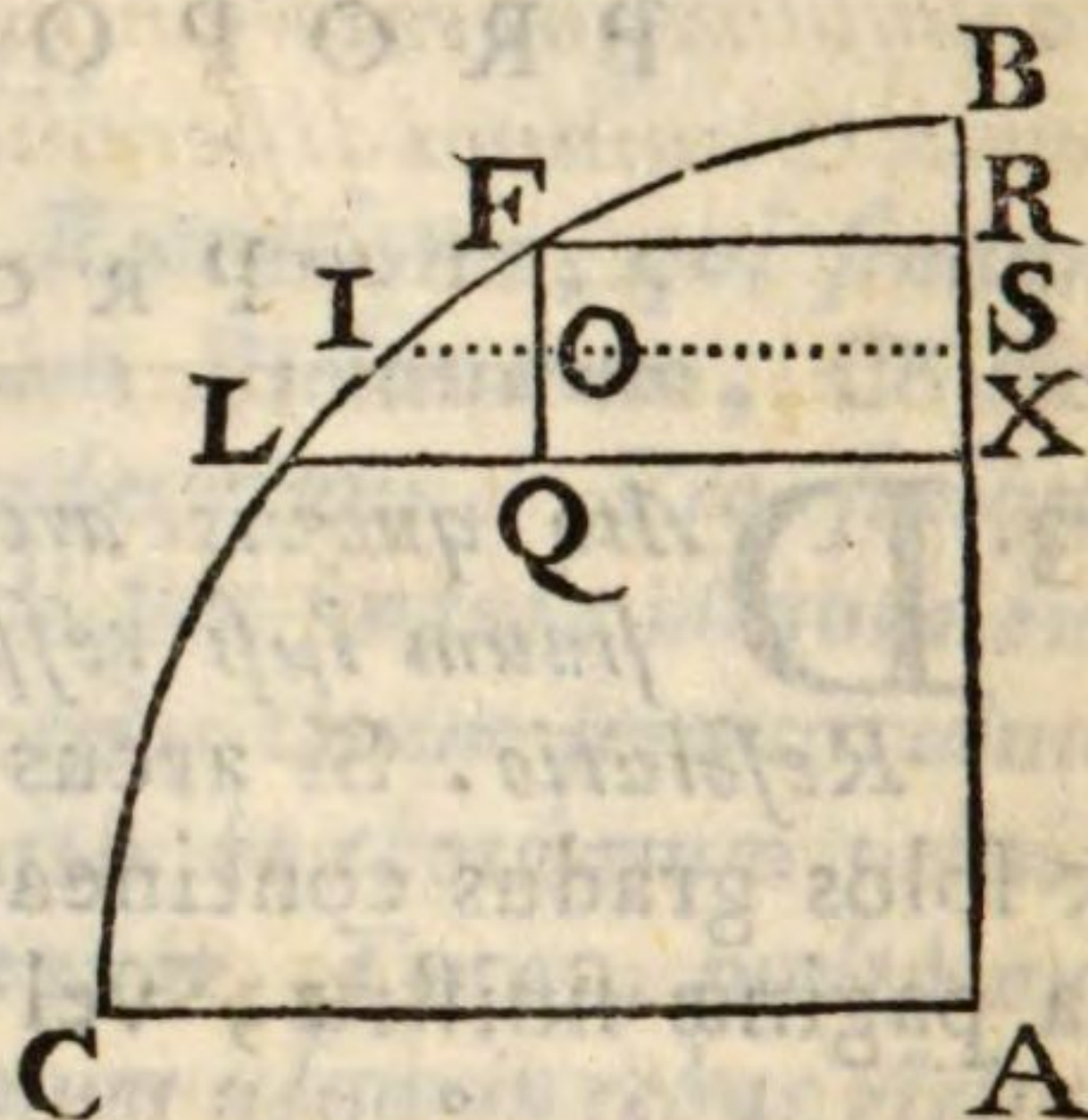
Si præterea arcus datus contineat gradus, & minuta, etiamsi in tabula non sint expressa, invenientur sinus respondentes hoc artificio, quod sequentibus Problematis docet P. Taquet in sua Trigonometria.

PROPOSITIO XX.

LEMMA.

64. **D**Atis sinibus LX, FR binorum arcuum LB, FB, qui inter se parum differant, hoc est, quorum differentia non sit major 45 minutis, invenire sinum cujuscunque intermediarii arcus dati.

Resolutio. Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentia sinuum LX, IS ad sinum FR; & quia arcus LF non est major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF sensibilibiter a rectis lineis; ac proinde LFQ, IFO assumi possunt, ut rectilinea triangula. Quia ergo IO est parallela LQ, erit



Ut datorum arcuum maximi, ad arcus medii, & minimi
& minimi differentia differentiam
LF IF;

Ita sinuum datorum maximi, ad sinus medii, & minimi
& minimi differentia differentiam
LQ IO.

Quare, cum hujus analogia tres primi termini sint noti, etiam quartus IO innotescet; quem si addamus sinui dato minori FR, notus erit medius quæsitus IS.

PROPOSITIO XXI.

PROBLEMA.

65. **D**ato quovis arcu, qui contineat gradus, & minuta prima, eruere e tabulis sinum &c. ipsi arcui respondentem.

Resolutio. Est arcus $35^{\circ} 20'$, cujus quæritur sinus. Inveniantur in tabulis sinus arcus proximè majoris

36° , & proximè minoris 35° ; & horum sinuum differentia capiatur 142089; arcuum autem differentia

erit unus gradus, sive 60° . Fiat igitur

Ut duorum arcuum maximi, & minimi differentia *ad arcus medii, & minimi differentiam*

60° 20° ;
Ita sinuum inventorum maximi, & minimi differentia *ad sinus medii, & minimi differentiam,*

142089

hoc est, ad quartum numerum proportionalem; qui addatur sinui respondententi arcui minori 35° , si quæritur sinus, tangens &c. arcus $35^{\circ} . 20^{\circ}$, quippe quæ crescunt crescente arcu; vel dematur ab eodem, si quæritur cosinus, cotangens &c., quæ crescente arcu contra decrescunt; & habebuntur quæsitæ sinu, tangentes, secantes, cosinus &c.

Corollarium.

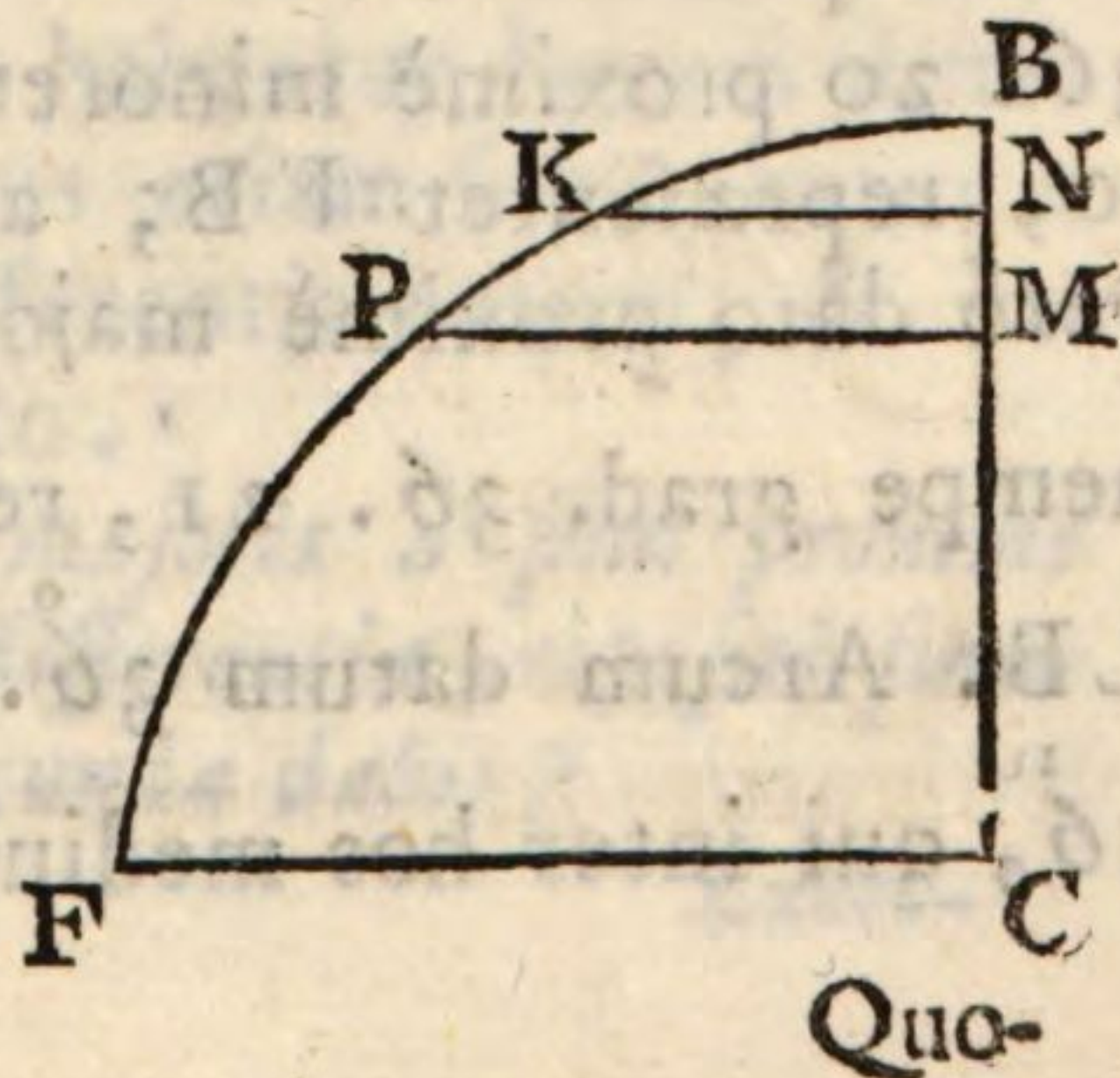
HInc dato quovis arcu, qui contineat sola minuta prima, erues e tabulis sinum ipsi arcui respondentem, eadem prorsus methodo, qua in vulgaribus tabulis continentibus gradus, & minuta prima, eruuntur pro minutis secundis, tertiis &c.

PROPOSITIO XXII.

PROBLEMA.

66. **I**nvenire sinum unius, vel plurium secundorum minutorum.

Resolutio. Repræsentet PB arcum unius minuti, seu 60° secundorum; KB verò arcum 26° secundorum, uti libuerit. Sinus autem istorum arcuum sint PM, KN.



Quo-

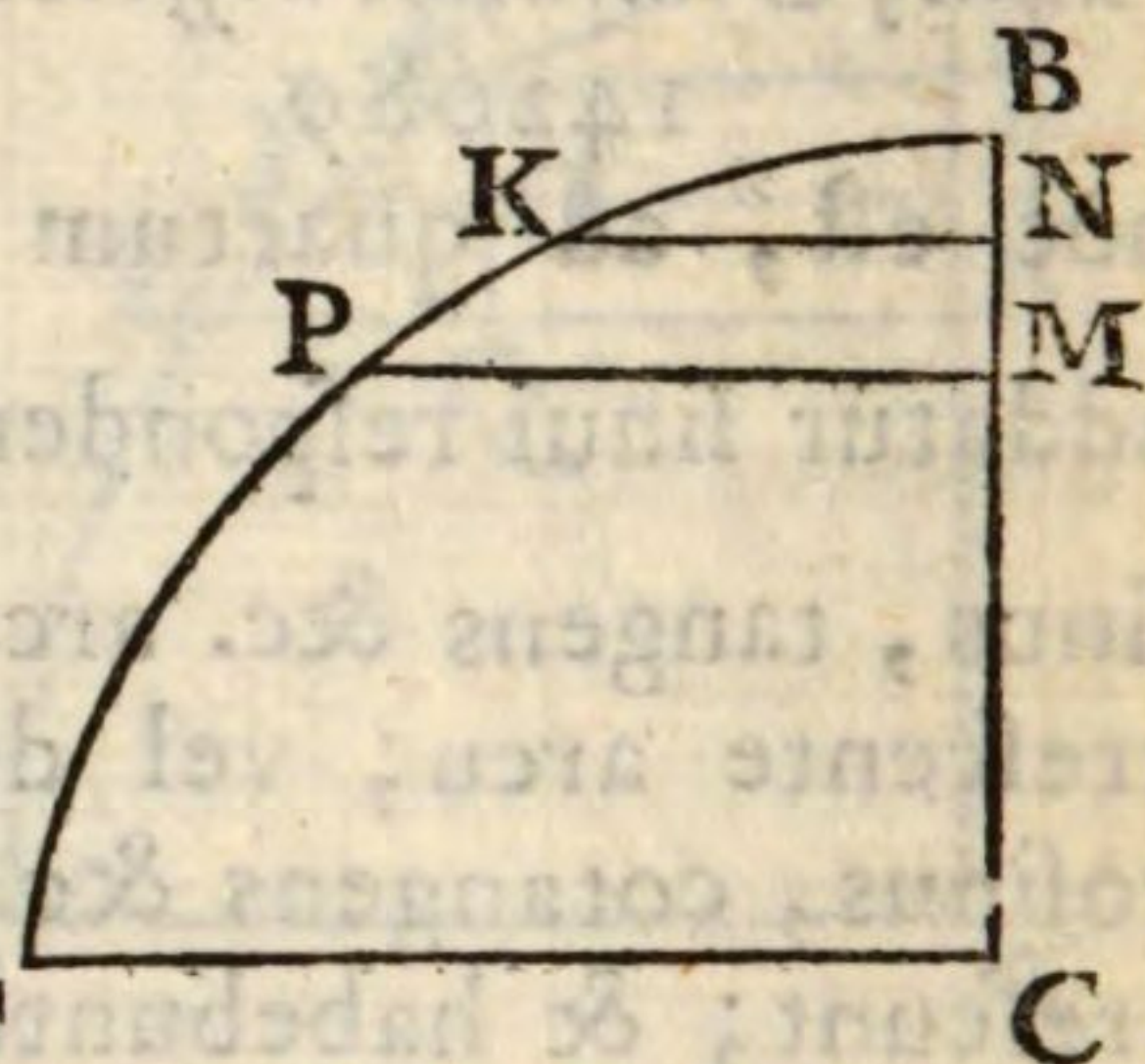
Quoniam hi arcus insensibiliter differunt a lineis rectis, assumi poterunt triangula PBM , KBN tanquam rectilinea, & ex Elementis similia. Quare

Ut PB 1 min., seu $60''$, ad KB $26''$;

Ita PM , sinus 1 min., ad KN sinum $26''$.

Quare per regulam trium reperietur sinus KN 26 secundorum; multiplicando videlicet secundum terminum 26 per tertium, nempe per 2909 , sinum 1 min. & productum dividendo per primum, nempe $60''$.

Hoc opere reperitur sinus unius minuti secundi, $49 \frac{29}{60}$, posito sinu toto 100000000 ; licebitque eadem methodo reperire sinum unius tertii; & sic in infinitum.

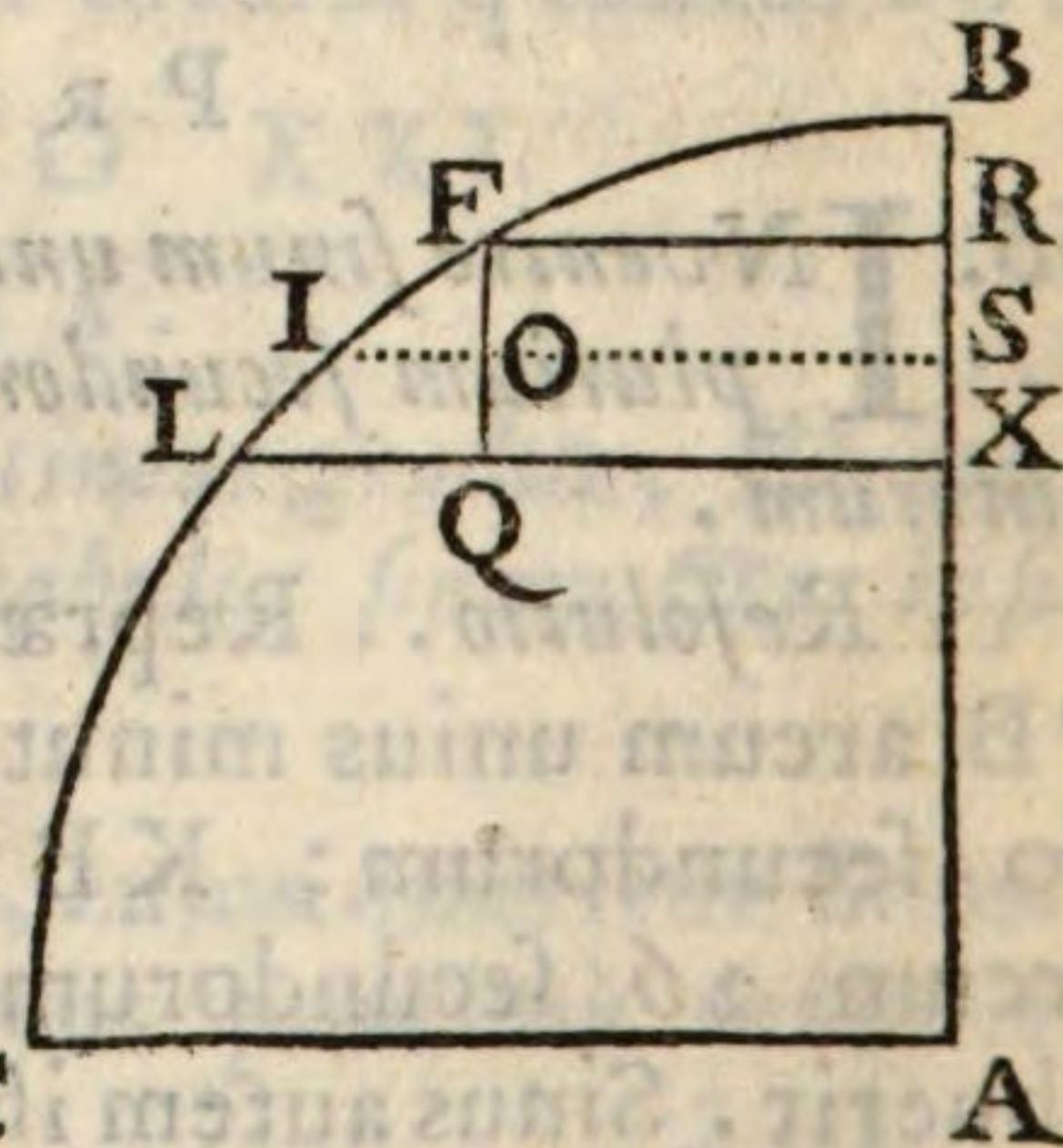


PROPOSITIO XXIII.

PROBLEMA.

67. **I**nvenire sinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat.

Resolutio. Inveniendus sit sinus graduum, puta, $36^\circ.20'.16''$. Arcum graduum 36.20 proximè minorem dato, repræsentet FB ; arcum verò dato proximè majorem, nempe grad. 36.21 , referat LB . Arcum datum $36.20.16''$, qui inter hos medius est, C



referat

referat IB; sinus autem horum trium arcuum sint LX, FR, IS; & ducatur perpendicularis FOQ.

Arcus igitur LF est 1° , seu $60''$; arcus IF $16''$; LQ differentia sinuum LX grad. 36.21° , & FR grad. 36.20° . Quoniam igitur arcus LF, utpote 1° , insensibiliter differt a recta linea, & multò adhuc magis arcus IF $16''$, erit ex Elem.

Ut LF $60''$ ad IF $16''$;

Ita LQ differentia sinuum, ad IO diff. sinus &c.

Quare, cum tres primi termini sint noti, etiam innotescet quartus, differentia IO; quæ addita FR sinui grad. 36.20° , dabit sinum quæsitum IS grad. $36.20.16''$.

PROPOSITIO XXIV.

PROBLEMA.

68. **D**ato sinui, vel tangenti &c. correspondentem arcum, aut angulum in eodem Canone invenire.

Resolutio. Sinum datum quære in tabulis; si eum reperies, arcum illi debitum habes adscriptum.

Si non invenias, quære in iisdem tabulis sinum proximè majorem, & sinum proximè minorem; subtrahaturque minor a majori, ut habeatur horum differentia; tum proximi minor sinus etiam subtrahatur a proposito sinu, ut habeatur differentia eorum; & instituaturs regula aurea, hoc pacto.

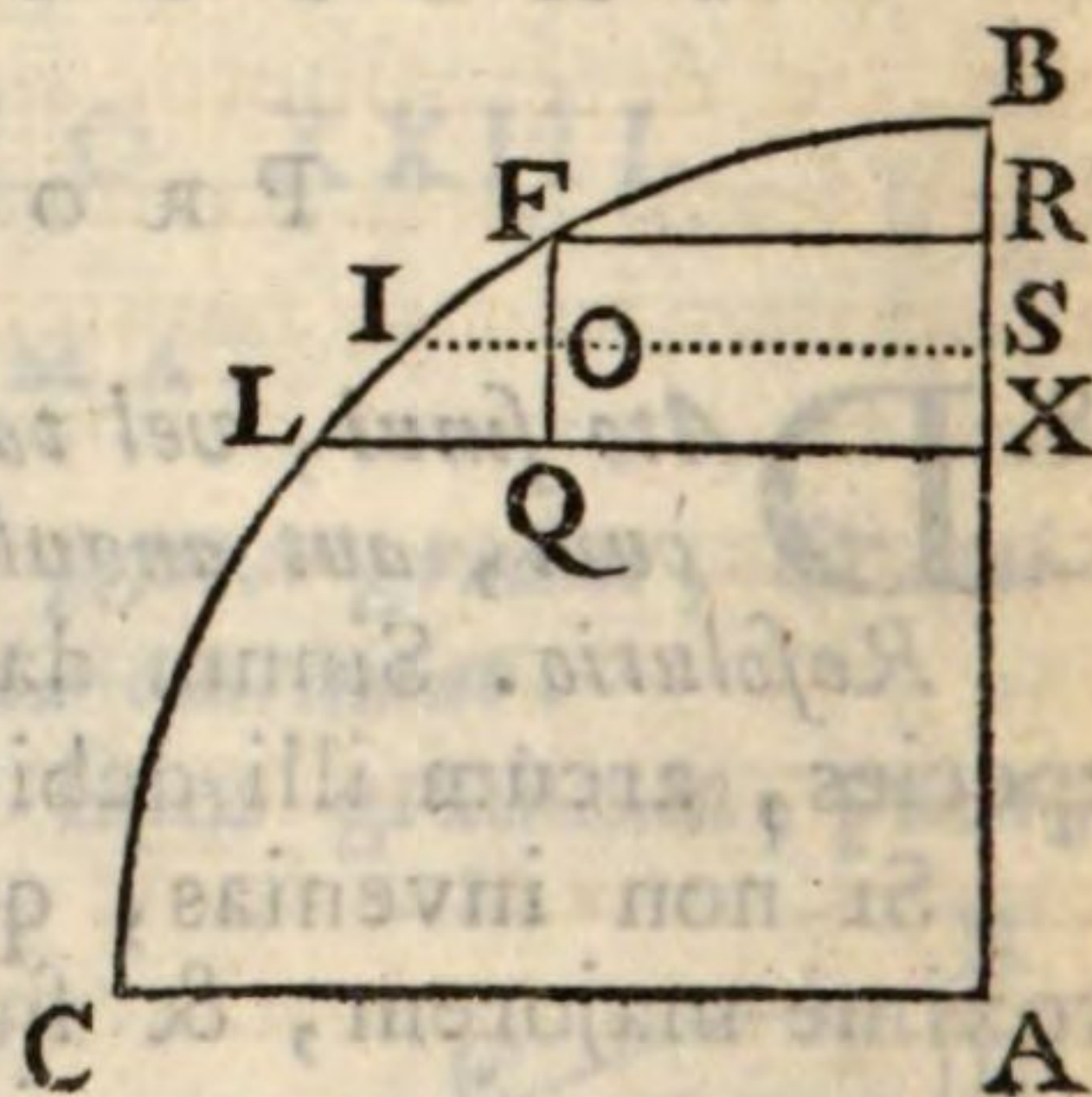
Si differentia sinus proximè majoris a sinu proximè minori dat minuta secunda 60; differentia propositi sinus a proximè minori, quot minuta secunda dabit?

Exem-

Exemplum. Sit datus iste sinus 97737038, cui correspondentem arcum, aut angulum oporteat invenire in Canone trigonometrico. Quoniam sinus datus non invenitur in tabulis, quærat in iisdem proximè minor 97737038, cui respondent gradus $36^{\circ}. 25'$, & proximè major, cui respondent gradus $36^{\circ}. 26'$. Differentia inter hos sinus est 1712; differentia propositi sinus a proximè minori est 970; quare per regulam trium, si differentia 1712 dat minuta secunda 60, differentia 970 dabit minuta secunda 34; igitur arcus correspondens est grad. 36, min. prim. 25, secund. 34, hoc est, $36^{\circ}. 25'. 34''$.

Demonstratio. Datum finum repræsentet recta IS, cui arcus debitus non inveniatur in tabulis adscriptus. Quære eo sinu proximè majorem, & minorem; quos referant LX, FR; ductaque perpendiculari FOQ, erit ex elementis.

Ut LQ excessus sinus LX proximè majoris dato, supra minorem FR, ad IO excessum sinus dati IS supra minorem FR; ita arcus LF 60 secund., ad numerum secundorum, quæ debentur arcui IF; qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB, dabit arcum debitum sinui dato IS.



APPENDIX.

HActenus complexi fuimus totius theoriæ leges pro canonis trigonometrici constructione. Video tamen aliquid desiderari posse, quod maximè profuturum puto. Nam & eos, qui ad praxim progredi volunt, atque hunc in se laborem suscipere, juvabunt sanè Observationes, quas subjicio, ut accuratiùs procedant in calculo; & Trigonometriæ Studiosi, multò clariores, ac rebus ipsis accommodatas notiones inde referent.

OBSERVATIO I.

69. **Q**uid causæ fuerit, cur tutior, & commodior visa fuerit divisio radii in particulas 10000000, vel saltem 100000, quàm in pauciores.

Ad construendum canonem diximus n. 38., opus esse, ut determinetur numerus partium æqualium, in quas sinus totus concipitur esse divisus; quòve major assumitur harum particularum numerus, eò exactiores fore sinus; quod hoc loco luculentiùs est explicandum, causæque errorum in medium afferendæ.

Ac primò, ex præjacta theoria compertum jam est, omnes ferè chordas, ac proinde etiam sinus, & secantes, inventas fuisse per radicis extractionem; atque hinc prima errorum origo, qui solent in calculum irrepere. Nam numeri, ex quibus radix fuit elicienda, ut plurimùm, non sunt quadrati; ex quibus si radicem educas, ea semper a vera, quæ impossibilis est, differet excessu defectuve aliquo, minore, quàm sit unitas; uti demonstravimus in Commentariis Arithmet. Univers. Newtoni tom. I. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in supputando molestiam negligitur, eò

minoris momenti erit, quò major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Exemplo sint duo numeri non quadrati, qui multum inter se differant, nimirum, 10150 & 22, a quibus radicem quadratam oporteat extrahere. Radix quadrata primi invenietur esse 100, & secundi, 4; sed harum neutra exacta est; utriusque a radice vera impossibili defectus minor est unitate. Constat autem defectum 1 multò minorem esse respectu 100, quam respectu 4; nam 1 est tantum centesima pars radices 100; at verò 1 est quarta pars radices 4. Unde fit, ut quò major est numerus non quadratus, ex quo radix elicienda est, eò minoris momenti sit excessus ipsius, aut defectus a radice vera impossibili; ad quam hæc aberratio proportionem habeat insensibilem necesse est in maximis numeris, proindeque tutò, & absque sensibili errore negligatur.

Hanc igitur ob causam tantus numerus partium sinus totius assumi debet, puta, 10000000, vel saltem 100000.

Alterum caput errorum complurium ex eo sequitur, quòd pleræque chordæ arcuum, & consequenter complures sinus, tangentes, & secantes, per regulam proportionis deducuntur ex aliis jam notis, & inventis per extractionem radices. Hujusmodi autem calculus contrahat necesse est vitia eorum sinuum, e quibus derivatur: unde fit, ut error, qui in sinu immediate invento simplex erat, in secundo quasi duplicetur, in tertio triplicetur, & sic deinceps. Habet præterea hæc supputandi ratio errorem sibi proprium, quòd, cum regula proportionis exercetur, fractio ex divisione residua negligatur.

Ex his fontibus ferè oriuntur sinuum, tangentium, secantium defectus varii; qui, si radius maximo partium numero divisus assumatur, quodammodo evanescent, & simul juncti errorem vix sensibilem inducunt;

qua

qua enim proportionē augetur numerus radii, eadem crescunt numeri sinuum.

OBSERVATIO II.

70. **Q**uid præterea agendum, ut tabula sinuum exquisitiùs construatur, posito sinu toto partium 1000000, aut etiam pauciorum.

Ut autem hujusmodi errores, qui necessariò subeundi sunt in calculo sinuum, nequaquam officiant, docent insuper construendarum tabularum artifices, posito numero partium radii, 1000000, aut etiam pauciorum, addi debere quotcunque ciphras, puta, 2, aut 3, aut 5, ut fiat 100000.00, vel 100000.000, vel etiam 100000.00000; ad quem radium ita augmentum componi debet integer canon sinuum, qui deinde mutilandi sunt tot figuris ad dexteram, quot ciphrae fuerant adjunctæ, ut canon compositus habeatur ad radium 100000.

Ratio est, quia errores sinuum multis notis constantium non versantur nisi in primis notis. Ita Regiomontanus, cum sinus cuperet ad partes radii 600000, assumpsit radium 600000.0000; & a sinibus ad eum radium supputatis primas quatuor notas sustulit. Similiter Rheticus, ut haberet sinus ad radium 1000000000000, assumpsit radium 1000000000000.00000; & a sinibus per hunc repertis præscidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ residuæ omnes veræ existant; ac proinde sinus ita reperti, a veris non deficient per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, sive canone assumitur. Hujusmodi sunt ii omnes, qui in tabulis passim descripti sunt.

OBSERVATIO III.

71. **E**xponitur ratio, cur abjectis duabus primis figuris ex sinu quocunque, respectu sinus totius 100000000, relinquatur idem sinus respectu sinus totius 1000000, licet prior ille non sit exquisitè inventus.

Sinus totus, five divisus sit in plures partes, five in pauciores, constanter retinet determinatam proportionem ad eundem sinum rectum quemcunque; alioquin sinus totus aliquando esset majoris quantitatis, & aliquando minoris, respectu ejusdem sinus; quod est absurdum.

Quocirca, si sinus cujuslibet arcus, puta, grad. 28, inventus sit respectu sinus totius in quotvis particulas divisi, facile per regulam proportionum inveniemus eundem sinum respectu ejusdem sinus totius in pauciores partes distributi, si ita dicamus. Si sinus totus partium 100000000, dat sinum arcus grad. 28, partium 4694716; Idem sinus totus partium 1000000, quot ejusmodi partium dabit sinum ejusdem arcus grad. 28?

Inveniemus enim sinum partium 46947 $\frac{1600000}{100000000}$.

Omissa autem hac fractione, quippe quæ minor est unitate, continebit idem sinus partes dumtaxat 46947, quemadmodum in tabulis sinuum ponitur, in quibus sinus totus contineat partes 1000000. Ubi vides, sinum hunc relinqui, si ex illo duæ primæ figuræ ad dexteram abjiciantur.

Ratio hujus abjectionis est, quia, ut sinus ille grad. 28, multiplicatus per sinum totum 1000000, ejusque productum 469471600000, dividatur per sinum totum 100000000, ut regula proportionum præcipit, satis est, si ex numero producto rejiciantur septem figuræ, quot nimirum ciphre sunt in divisore; ut palam est ex Elementis

mentis Arith. Quare rejiciendæ sunt quinque ciphrae, ac præterea duæ figuræ primæ, nempe hic numerus 1600000, qui cum divisore hanc minutiam $\frac{1600000}{10000000}$ constituit, quæ unitate minor est, nempe $\frac{16}{100}$, ut patet; eademque ratio est in omnibus aliis sinibus. Hinc fit, sinum relictum post abjectionem duarum primarum figurarum satis exquisitum esse respectu sinus totius 1000000; etiamsi ille, a quo duæ figuræ abjiciuntur, respectu sinus totius 10000000 non esset exquisitè inventus.

OBSERVATIO IV.

72. **S**I ad sinum quemcunque respectu sinus totius 1000000 adjiciantur duæ ciphrae ad dexteram, fit idem sinus respectu sinus totius 100000000.

Eadem ratione, si cuilibet sinui respectu sinus totius partium 1000000, invento apponantur duæ ciphrae ad dexteram, habebitur idem sinus respectu sinus totius partium 100000000. Nam, si dicamus: Sinus totus partium 1000000, dat sinum arcus grad. 28, partium 46947; Sinus ergo totus partium 100000000, quos partium dabit eundem sinum arcus grad. 28? Reperiemus per eandem regulam proportionum, sinum partium 4694700. Ubi vides sinum hunc procreari, si illi duæ ciphrae ad dexteram adjiciantur. Ratio hujus adjectionis est ipsissima, quæ prius.

Quod autem ex sinu 46947 non sit inventus sinus 4694716, ille idem, ex quo prius illum elicuimus, sed solùm hic 4694700; causa est, quòd sinus 46947 non est omnino exquisitus respectu sinus totius 1000000; deberet namque esse 46947, & insuper $\frac{1600000}{10000000}$, ut

ex dictis patet; ex quo præcisè invenietur sinus ille 4694716; sed ea minutia tutò negligi potest.

Id verò, quod de sinubus totis partium 10000000, & 100000 diximus, intelligendum quoque est de aliis sinubus totis quotcunque partium, sive plurium, sive pauciorum. Semper enim ex sinubus respectu sinus totius majoris inventis abjiciendæ sunt tot figuræ, ut relinquatur sinus respectu sinus totius minoris, quot ciphris sinus totus major sinum totum minorem superat.

OBSERVATIO V.

73. **I**N abjiciendis tamen a sinu invento totidem ciphris, quot fuerant adjunctæ sinui toto, hæc etiam observatio ante oculos habenda est, ut ad sinum, quoad fieri possit, accuratissimè inveniendum accedamus. Nam, dum a sinu, puta, 46947.16 auferuntur duæ figuræ 16, hæc numerator evadunt fractionis, cujus denominator est 1, cum tot ciphris, quot figuræ sunt abscissæ, nempe $\frac{16}{100}$; quæ quidem negligi potest, quoniam numerator non excedit dimidium denominatoris, ideoque remanet sinus 46947.

Finge jam ex sinu invento 5745291.745 ad radium 10000000.000 auferendas esse tres figuras 745, ut revocetur ad radium 10000000: in hoc casu fiet fractio $\frac{745}{1000}$, quæ tanquam integrum, assumenda est, quoniam numerator superat dimidium denominatoris; hinc residuo addi debet unitas; atque adeo non remanebit 5745291, sed 5745292, sinus ad radium 10000000, qui prius erat 5745291745 ad radium 10000000.000.

Paucis: si duæ figuræ, aut tres &c., quæ abjiciuntur, plus valeant, quàm 50, aut 500 &c., residuo semper addenda est unitas.

OB-

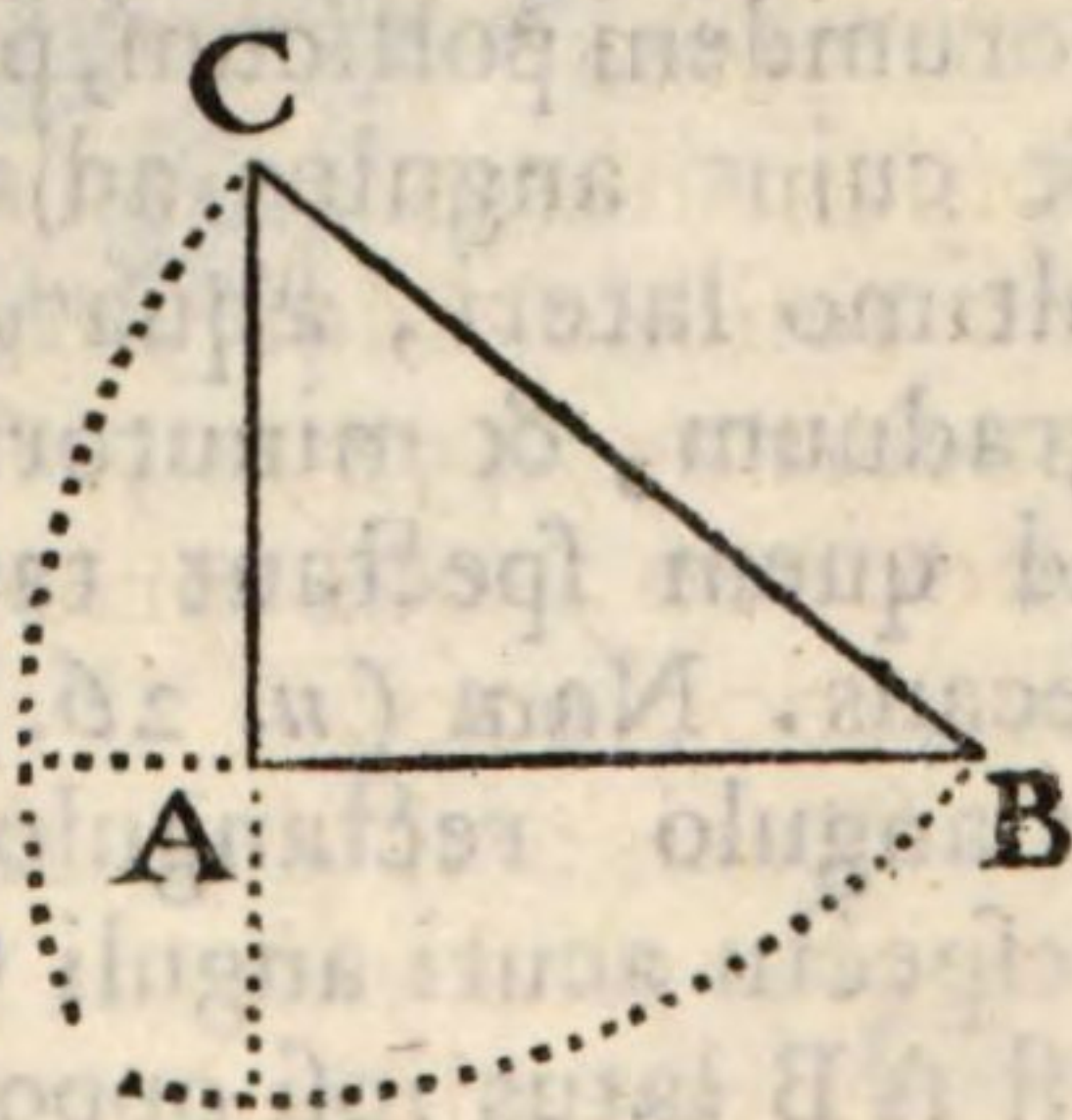
OBSERVATIO VI.

74. **Q**uid repræsentent numeri canonis trigonometrici,
& quarum rerum sint symbola.

Haëtenus Trigonometriæ Studiosis artem, modum-
que præscripsimus construendi canonis; reliquum jam
est, ut quid sibi velint hæ tabulæ tantà industrià con-
cinnatæ, quidve hi numeri repræsentent, planissimè
doceam; hinc enim totius Trigonometriæ genuina
imago, amplitudo, atque præstantia explicabitur.

Idæam canonis trigonometrici videor mihi bre-
vissimè sic posse complecti. *Tabulæ sinuum, tangen-
tium, & secantium nihil designant aliud, quàm latera
trianguli rectanguli, quorum ratio inter se determinatur,
si assumatur unum ex his lateribus divisum in particulas
100000000.* Accipe in tabula sinuum, quam adjectam
habes ad calcem hujus partis, pro libito duos quotvis
sinus, unum e regione alterius, hoc est, sinum rectum,
& sinum sui complementi, nimirum, in pagina fini-
stra sinum 27563.74, qui pertinet ad arcum grad.
16, ac præterea sinum complementi in pagina dexte-
ra, 96126.17, qui pertinet ad arcum grad. 74.

Hi duo sinus invicem comparati non exhibent ho-
sce numeros utcunque, & abstractè; sed pro varietate
longitudinum, aut altitudinum metiendarum, puta, tur-
rium, montium &c., designant numerum pollicum, aut
pedum, aut hexapedarum, aut partium in alia qua-
vis mensura, quas continent duo
latera trianguli rectanguli opti-
ci, cujus hypotenusa contineat
100000000 eorundem pollicum,
pedum &c. Scitum est enim in om-
ni triangulo rectangulo B A C, la-
tus B C recto angulo oppositum, vi-
cem obire posse sinus totius, seu ra-
dii; ac proinde reliqua latera esse



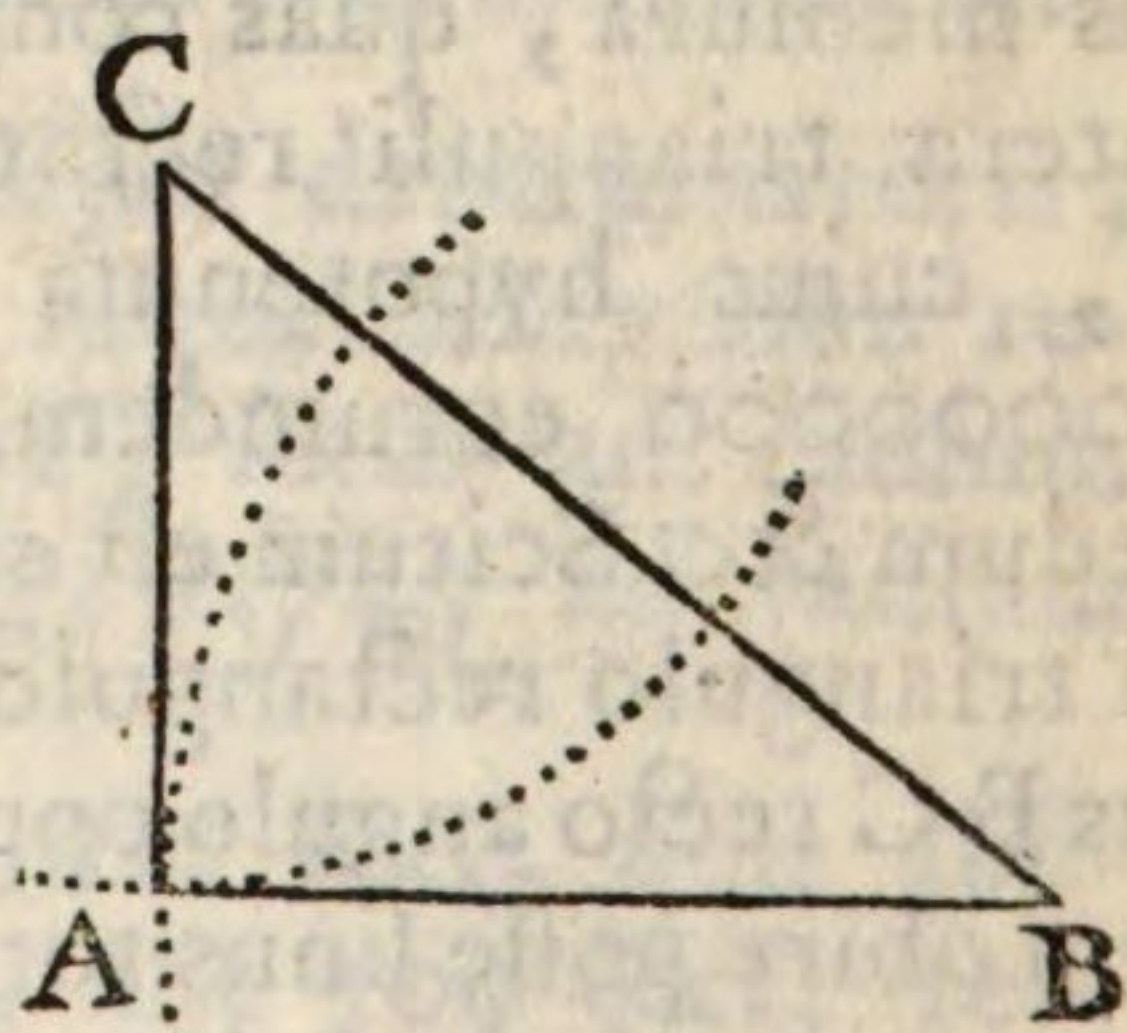
sinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirum AB esse sinum anguli C , & latus AC esse sinum anguli B .

Quamobrem duæ columnæ sinuum crescentium, & decrescientium, quæ in utraque pagina, dextera, & sinistra conspiciuntur, concipi debent compositæ ex numeris pollicum, pedum, hexapedarum &c., quas continent duo latera anguli recti in serie totidem triangulorum rectangulorum, quot gradus, aut etiam minuta sunt in 45 gradibus; quæ triangula habent singula hypotenusam 10000000 pollicum, pedum &c.

Hæc verò triangulorum series ita concipi debet, ut primum triangulum rectangulum ex duobus angulis acutis ad basim, minorem habeat, puta, unius gradus; secundum triangulum, ex duobus acutis minorem habeat duorum graduum; atque ita porro cum incremento unius gradus in nostra tabula, quam ad solos gradus contraximus, omiſſis minutis, usque ad gradus 45.

Itaque duo sinus 27563.74 & 96126.17, qui pertinent ad gradus 16 & 74, sunt numeri partium, quas continent duo latera trianguli rectanguli, cujus hypotenusa habet 10000000 earumdem partium; angulique ad basim in hoc triangulo sunt, alter grad. 16, & alter grad. 74.

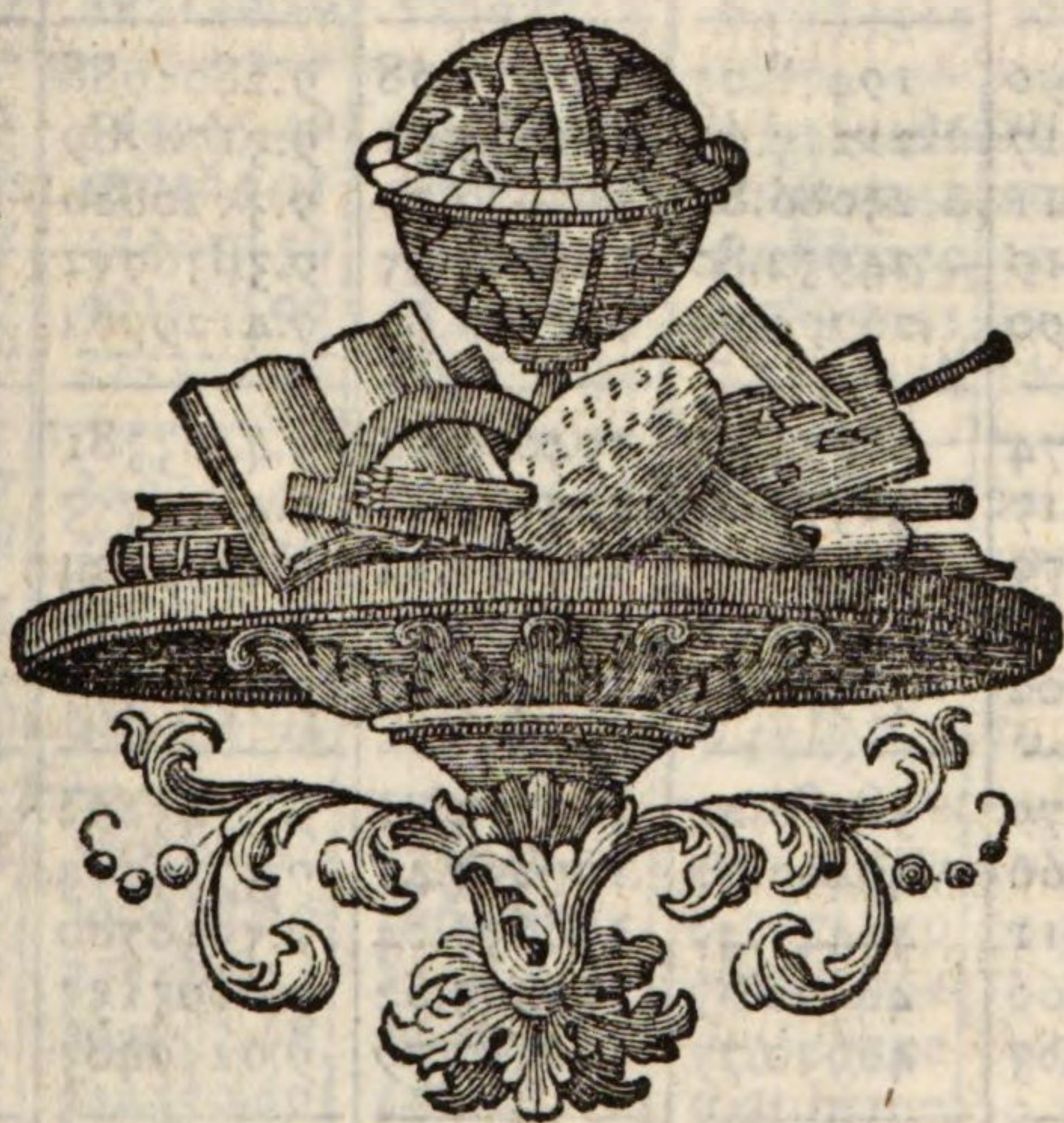
Similiter tangens, & secans ejusdem arcus designant numerum pollicum, pedum &c., quos continent latus unum, & hypotenusa trianguli rectanguli, cujus alterum latus, instar sinus totius, continet 10000000 eorumdem pollicum, pedum &c.; & cujus angulus adjacens huic ultimo lateri, æquatur numero graduum, & minutorum arcus, ad quem spectant tangens, & secans. Nam (*n. 26.*) in omni triangulo rectangulo BAC , respectu acuti anguli C tangens est AB latus ipsi oppositum; la-



tus alterum CA eidem angulo C adjacens, est sinus totus, seu radius; hypotenusa verò CB , seu latus recto angulo oppositum, est secans.

Columnæ ergo tangentium, & secantium respondentium intelligi debent compositæ ex numeris pollicum, pedum, aut aliarum partium æqualium, quas continent unum latus, & hypotenusa totidem triangulorum rectangulorum, quot habentur gradus, aut etiam minuta in gradibus 90 , & quorum triangulorum latus alterum contineat semper 10000000 earumdem partium.

Hæc regula clariùs constabit in theoriæ usu, & triangulis acutangulis, & obtusangulis aptabitur.



CANON TRIGONOMETRICUS.

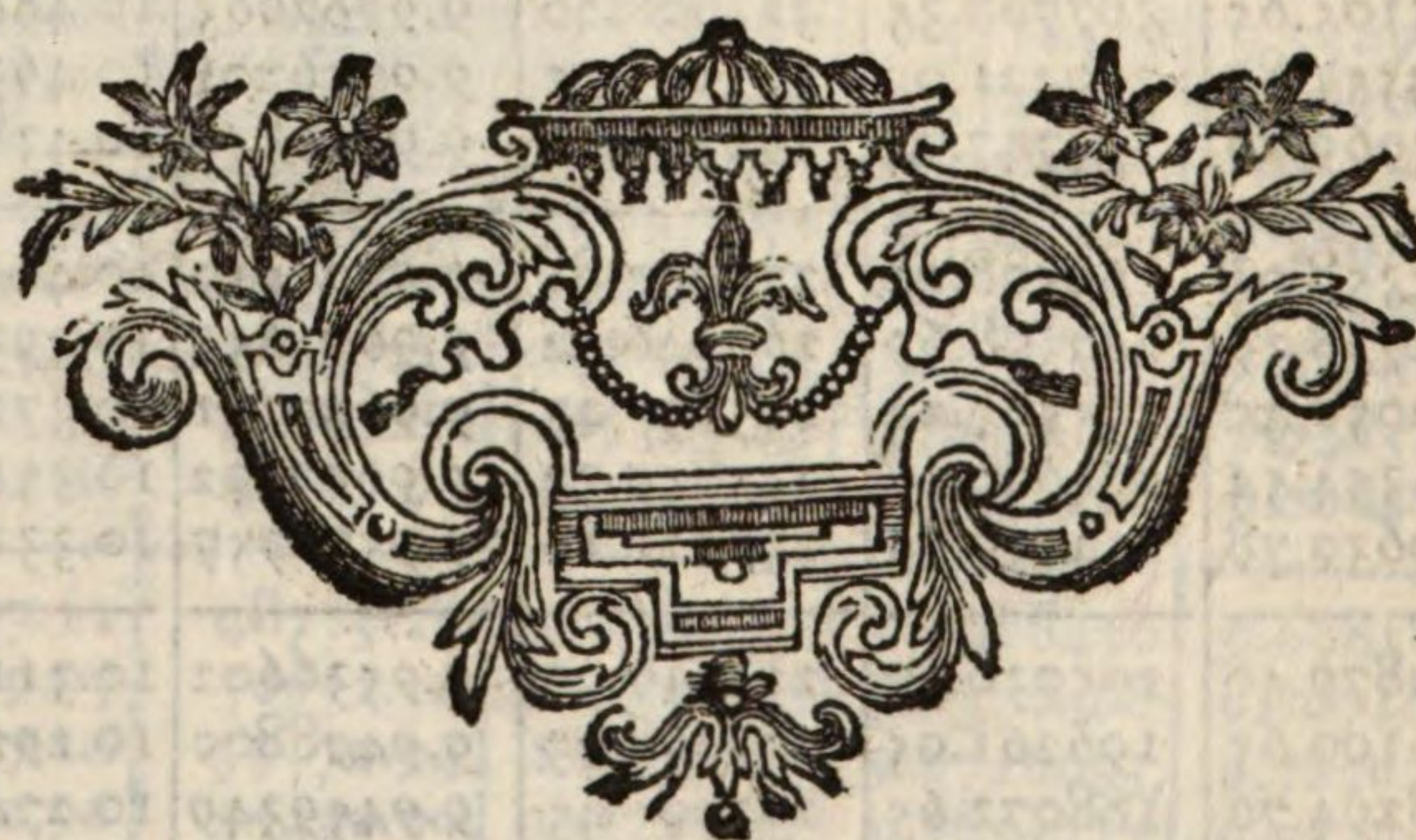
G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
0	0	0	100000.00	—Infin.	—Infin.
1	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215
2	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838
3	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958
4	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
5	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518
6	10452.85	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
7	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
8	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
9	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125
10	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188
11	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523
12	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
13	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641
14	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
15	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525
16	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
17	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
18	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760
19	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719
20	34202.02	36397.02	106417.78	9.5340517	9.5610659
21	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
22	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
23	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
24	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
25	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725
26	43837.12	48773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818
27	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659
28	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744
29	48480.96	55430.90	114335.41	9.6855712	9.7437520
30	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394

CANON TRIGONOMETRICUS. 59

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
90	100000.00	Infin.	Infin.	10.00000000	Infin.
89	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
88	99939.08	2863625.33	2865370.83	9.9997354	11.4569162
87	99862.95	1908113.67	1910732.26	9.9994044	11.2806042
86	99756.40	1430066.63	1433558.70	9.9989408	11.1553563
85	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
84	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798
83	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
82	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975
81	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
80	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812
79	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
78	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
77	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
76	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289
75	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
74	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
73	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
72	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4882240
71	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
70	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341
69	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226
68	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
67	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
66	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169
65	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275
64	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182
63	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
62	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459349	10.2743256
61	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480
60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606

CANON TRIGONOMETRICUS.

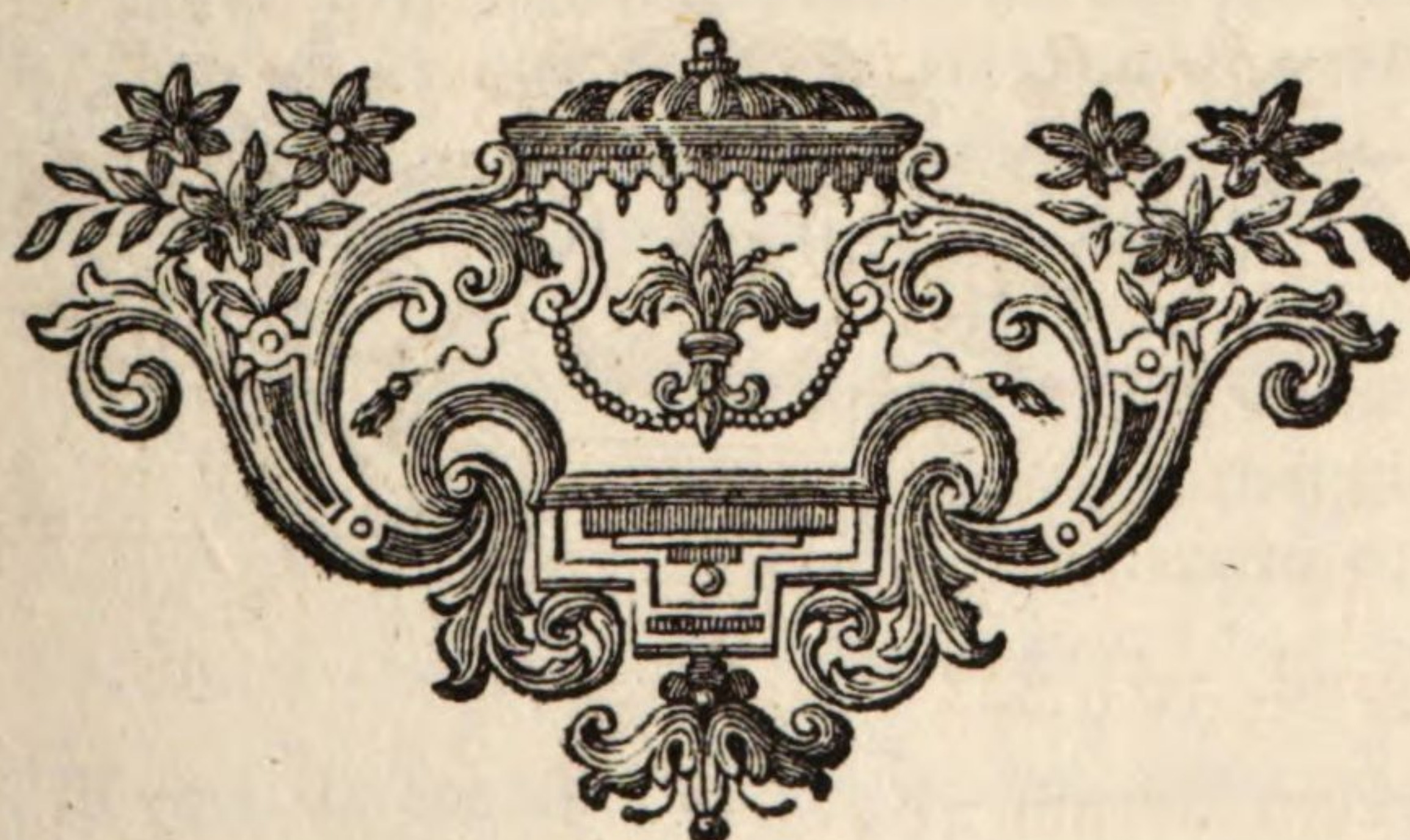
G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
31	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737
32	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7957892
33	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174
34	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874
35	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268
36	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
37	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144
38	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098
39	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692
40	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135
41	65605.90	86928.68	131501.30	9.8169429	9.9391631
42	66913.06	90040.41	134563.27	9.8255109	9.9544374
43	68199.84	93251.51	136732.75	9.8337833	9.9696559
44	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000



61

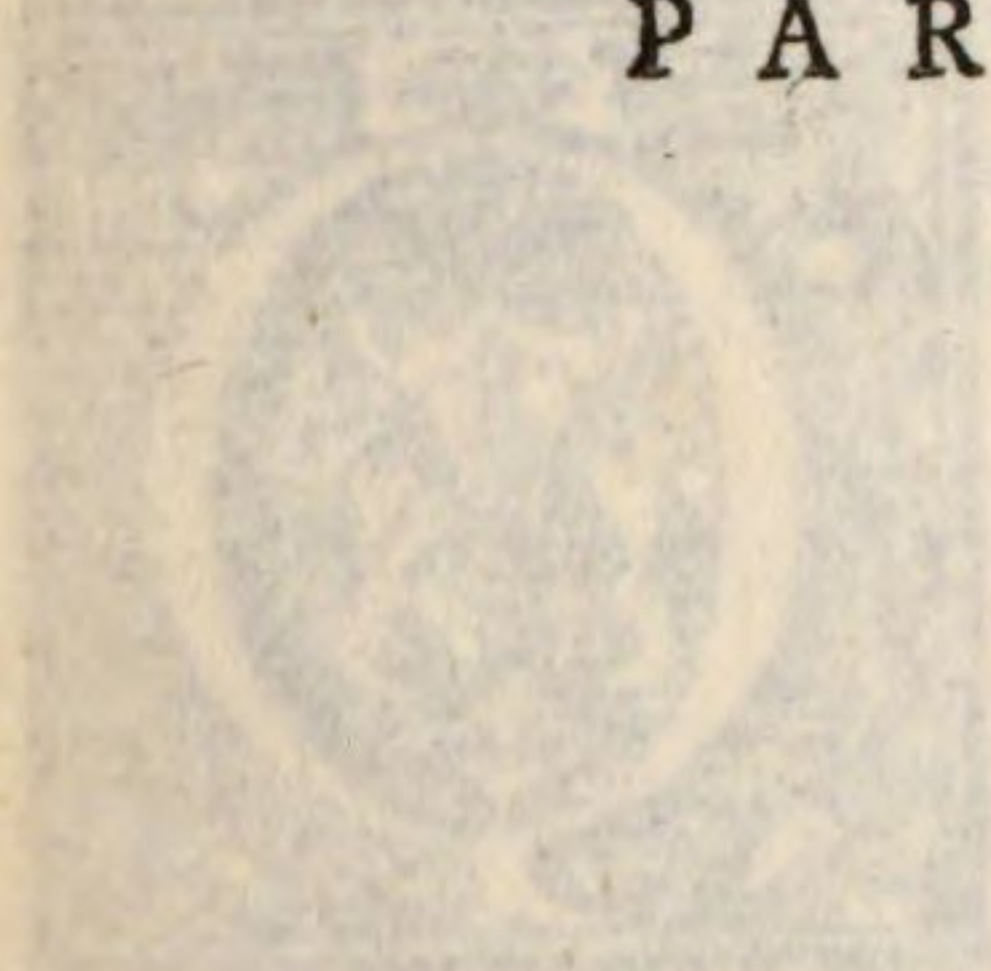
CANON TRIGONOMETRICUS.

G.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
59	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263
58	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2042108
57	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
56	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126
55	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732
54	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
53	79863.55	132704.48	166164.01	9.9023486	10.1228856
52	78801.08	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071902
51	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308
50	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865
49	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608369
48	74314.48	111061.25	149447.65	9.8710735	10.0455626
47	73135.37	107236.87	146627.92	9.8641275	10.0303441
46	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000



TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ

PARS SECUNDA.



PROPOSITIO

THEOREMA

IN omni triangulo rectangulo sinus totus est ad hypotenuse
ut alterutrum duorum angulorum acutiorum, vel hyper-
bolicus est ad latus eidem angulo oppositum.

E. III.

E

Deinde

TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PARS SECUNDA.



TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PARS SECUNDA.

De Triangulis planis.



QUANTUS sinuum futurus in Trigonometria sit usus, facile jam nunc constabit ex hac theoria; in qua delectabit, opinor, Studiosos, si quæ abstractè in tabulis docentur, ea viderint triangulis cujuscunque generis accommodari in omnem Geometriæ practicæ usum.

Analysis Trianguli rectilinei.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

75. **I**N omni triangulo rectangulo sinus totus est ad sinum alterutrius duorum angulorum acutorum, uti hypotenusa est ad latus eidem angulo oppositum.

T. III.

E

Demon-

66 DE TRIANGULIS PLANIS

Demonstratio constat ex n. 16. & 26. Nam, si accipiatur hypotenusa BC pro radio, latus AC fiet sinus anguli B ; ac propterea ratio, quam habet *Recta* BC , considerata instar radii, ad AC , consideratam instar sinus anguli B , est prorsus eadem, ac sit ratio, quam habet eadem BC , tanquam hypotenusa, ad AC , tanquam latus, in eodem triangulo.

Nam lineæ prorsus eadem manent in utraque consideratione. Hujus analogiæ usus erit frequentissimus in praxi trigonometrica.

Corollarium I.

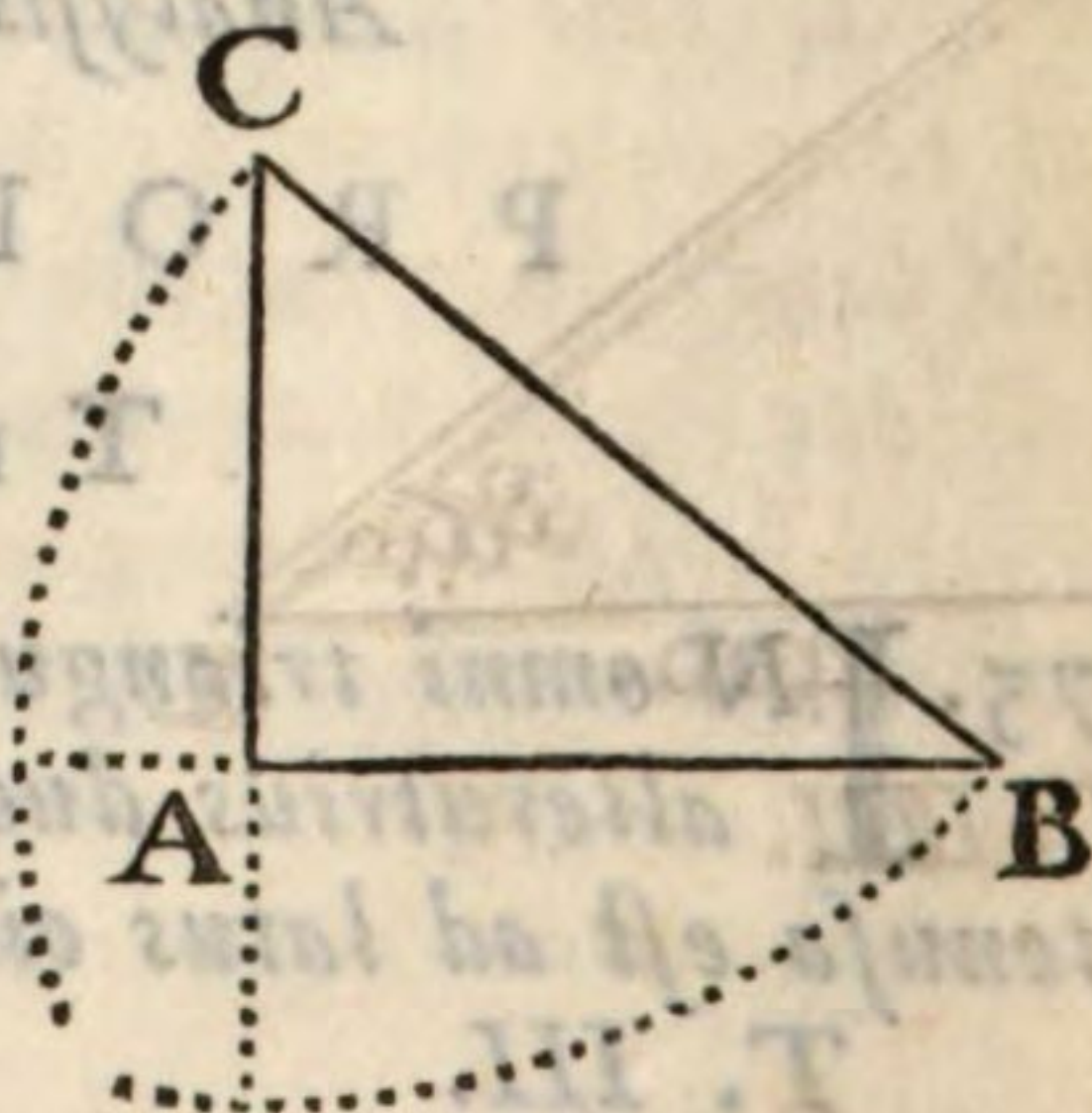
76. **H**inc permutando, & invertendo, eliciuntur sequentes analogiæ, quæ observandæ sunt in eo casu, in quo hypotenusa in quæstionem cadit.

I. *Ut hypotenusa ad alterutrum latus; Ita sinus totus ad sinum anguli huic lateri oppositi.*

II. *Ut sinus alterutrius duorum angulorum acutorum ad sinum totum; Ita latus huic angulo acuto oppositum, ad hypotenusam.*

Corollarium II.

77. **H**inc patet, quod cognitis angulis in triangulo rectangulo, etiam laterum proportio cognoscitur. Nam, posita hypotenusà BC pro radio 100000, & angulo C grad. 50, & angulo B grad. 40, quærantur in canone respectivi sinus 76604, 64278. Itaque laterum proportio BC , AB , AC , eadem erit, quæ numerorum 100000, 76604, 64278.



PROPOSITIO II.

THEOREMA.

78. **I**N omni triangulo rectangulo sinus totus est ad tangentem unius, aut alterius duorum angulorum acutorum, uti latus adjacens huic angulo, est ad latus oppositum eidem angulo.

Demonstratio patet ex n. 16. & 26. Nam, si latus AB assumatur tanquam radius, latus AC evadit tangens anguli B.

Similiter, si latus AC consideretur tanquam radius, latus AB evadit tangens anguli C; ac proinde ratio, quam habet Recta AB, considerata instar radii, ad AC, consideratam instar tangentis, est prorsus eadem, ac fit ratio, quam habet eadem AB, tanquam latus, ad AC, tanquam latus alterum.

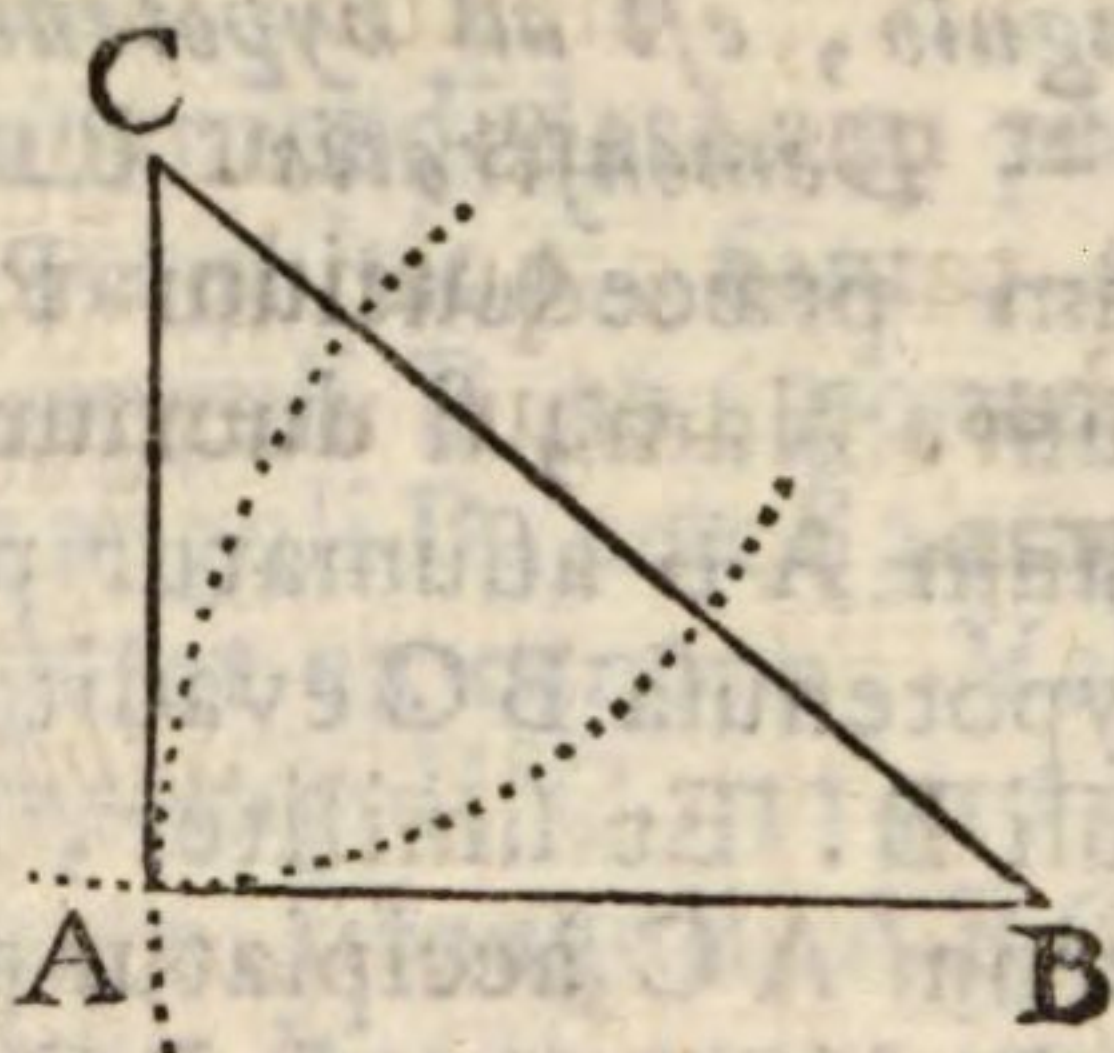
Nam lineæ manent prorsus eadem in utraque suppositione.

Corollarium.

79. **H**inc, quoties hypotenusa in quæstionem non cadit, alterutra ex duabus analogiis haberi semper poterit.

I. Uti sinus totus, seu radius, ad tangentem unius angulorum acutorum; Ita latus huic angulo adjacens, ad latus eidem angulo oppositum.

II. Uti latus unum ad alterum; Ita radius, seu sinus totus, ad tangentem anguli adjacentis primo lateri.

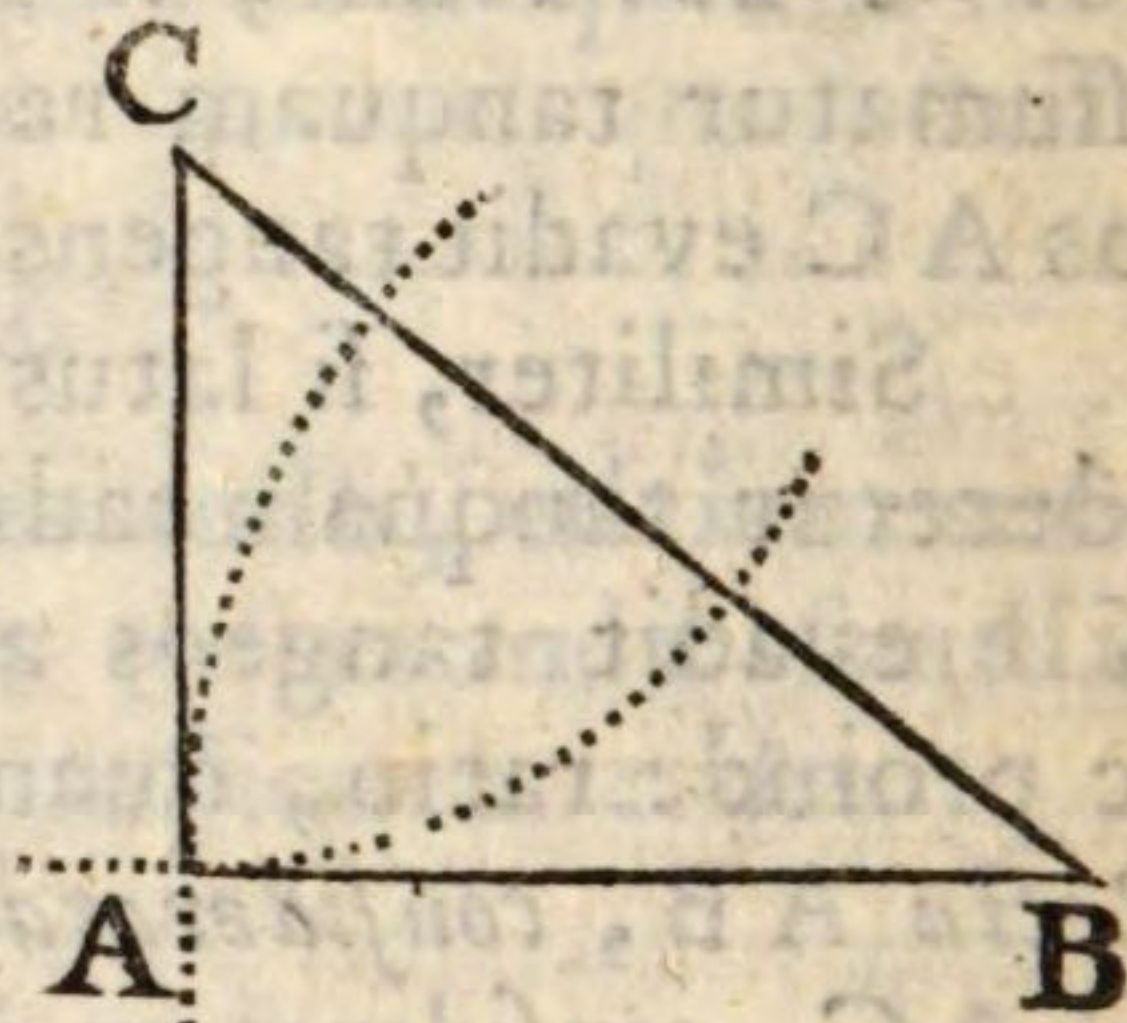


PROPOSITIO III.

THEOREMA.

80. **I**N omni triangulo rectangulo radius est ad secantem alterutrius anguli acuti, uti latus adjacens huic angulo, est ad hypotenusam.

Demonstratio. Ratio est pariter eadem, quæ duarum præcedentium Propositionum. Nam, si duorum laterum unum AB assumatur pro radio, hypotenusa BC evadit secans anguli B . Et similiter, si latus alterum AC accipiat pro radio, eadem hypotenusa BC evadit secans anguli C . Quare ratio, quam habet



AB , prout est sinus totus, seu radius, ad BC , prout est secans, est illa ipsa, quam habet eadem AB , prout est latus, ad BC , prout est hypotenusa.

Corollarium I.

81. **I**N eo casu, in quo hypotenusa in quæstionem cadit, tres analogiæ locum habent.

I. Uti radius ad secantem alterutrius anguli acuti; Ita latus adjacens huic angulo, ad hypotenusam.

II. Uti alterutrum ex duobus lateribus ad hypotenusam; Ita radius ad secantem anguli adjacentis primo lateri.

III. Uti secans alterutrius anguli acuti ad radium; Ita hypotenusa ad latus adjacens huic angulo.

Corollarium II.

82. **I**Taque eadem hypotenusa BC , ut in Figura præcedenti, secans est utriusvis angulorum B & C . Est secans anguli B , quando radius ponitur BA ; est secans anguli C , quando radius fit CA .

Corollarium III.

83. **C**olligitur modus alter inveniendi laterum proportionem ex angulis cognitis. Sint, ut prius, anguli C gradus 50, & anguli B 40: ponatur BA radius 100000; AC tangens anguli B , erit 83909; & ejus secans BC 130540; ut patet ex canone. Vel, posito radio CA , erit BA tangens anguli C , 119175, & ejus secans CB 155572. Quare trianguli ABC , five sit parvum, five sit maximum, latera erunt inter se, ut numeri prædicti.

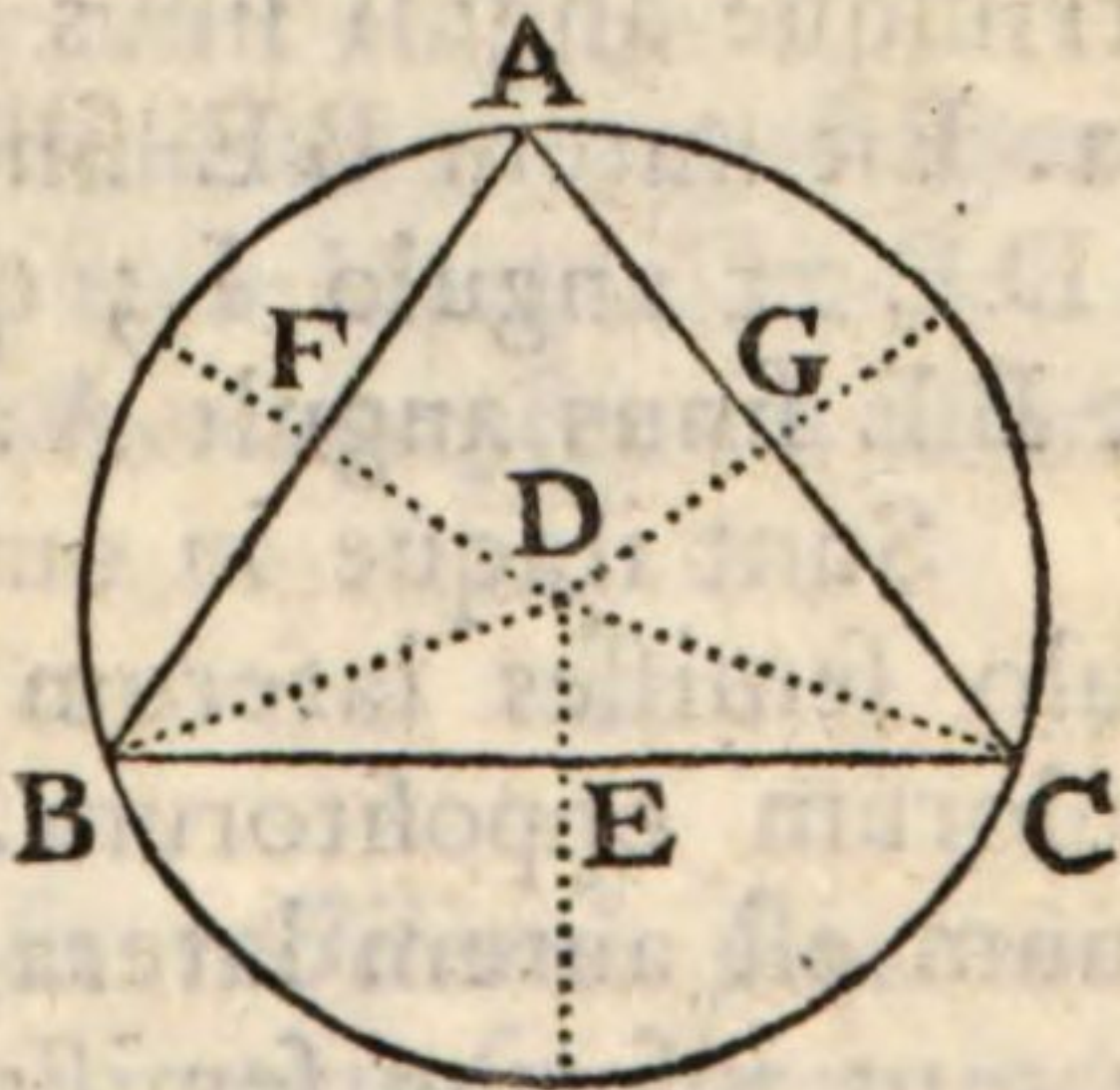
PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

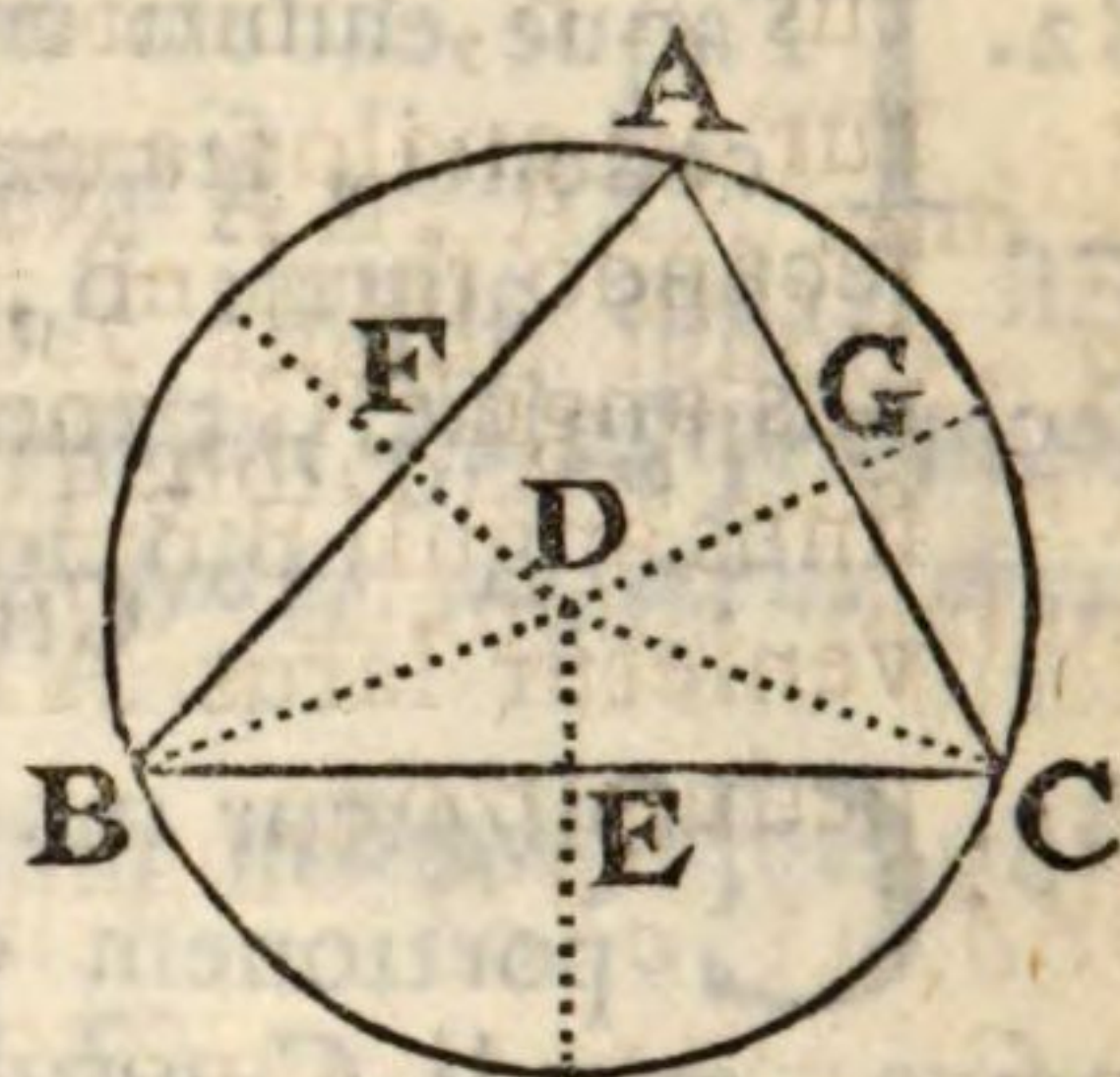
84. **I**N quolibet triangulo rectilineo ABC latera eadem inter se rationem habent, quam sinus angulorum ipsis oppositorum.

Demonstratio universalis est, & triangulorum genus omne complectitur.

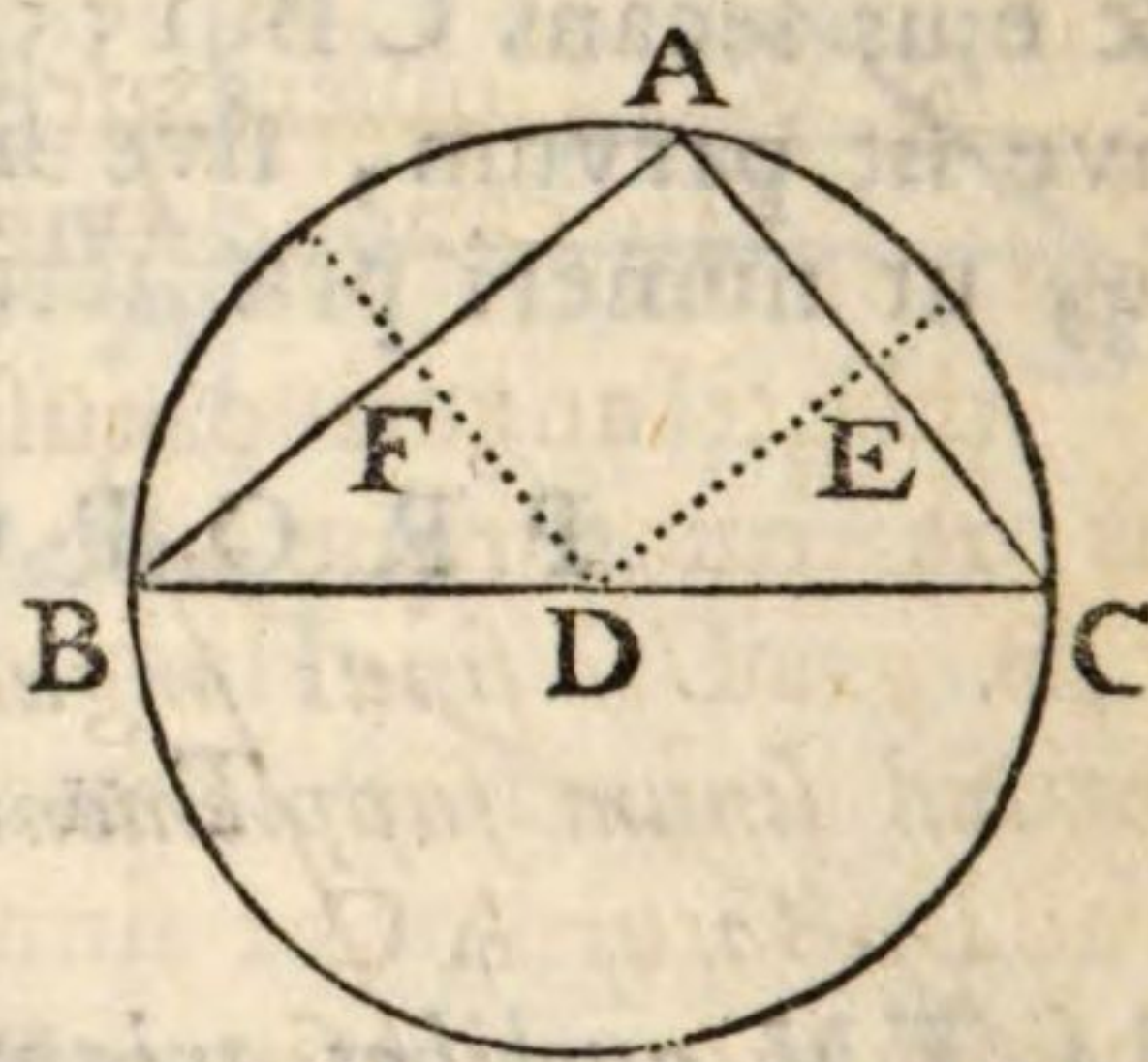
Itaque I. Triangulo acut-angulo ABC circumscribatur circulus; & ex centro D , radii ducantur DF , DE , DG , secantes arcus, & arcuum subtensas bifariam, atque adeo ad rectos angulos. Dico latera BC , CA , AB esse, ut sinus angulorum ipsis oppositorum A , B , C .



Nam semisses laterum sunt sinus angulorum ad peripheriam; est quippe angulus BDC ad centrum, duplus anguli A ad peripheriam. Ergo semissis anguli ad centrum, nimirum, angulus BDE , æquatur angulo A . Atqui anguli BDE sinus est recta BE , per definit.; ergo eadem recta BE , semissis lateris BC , est sinus anguli A . Eadem ratione erit CG sinus anguli B , & AF sinus anguli C .

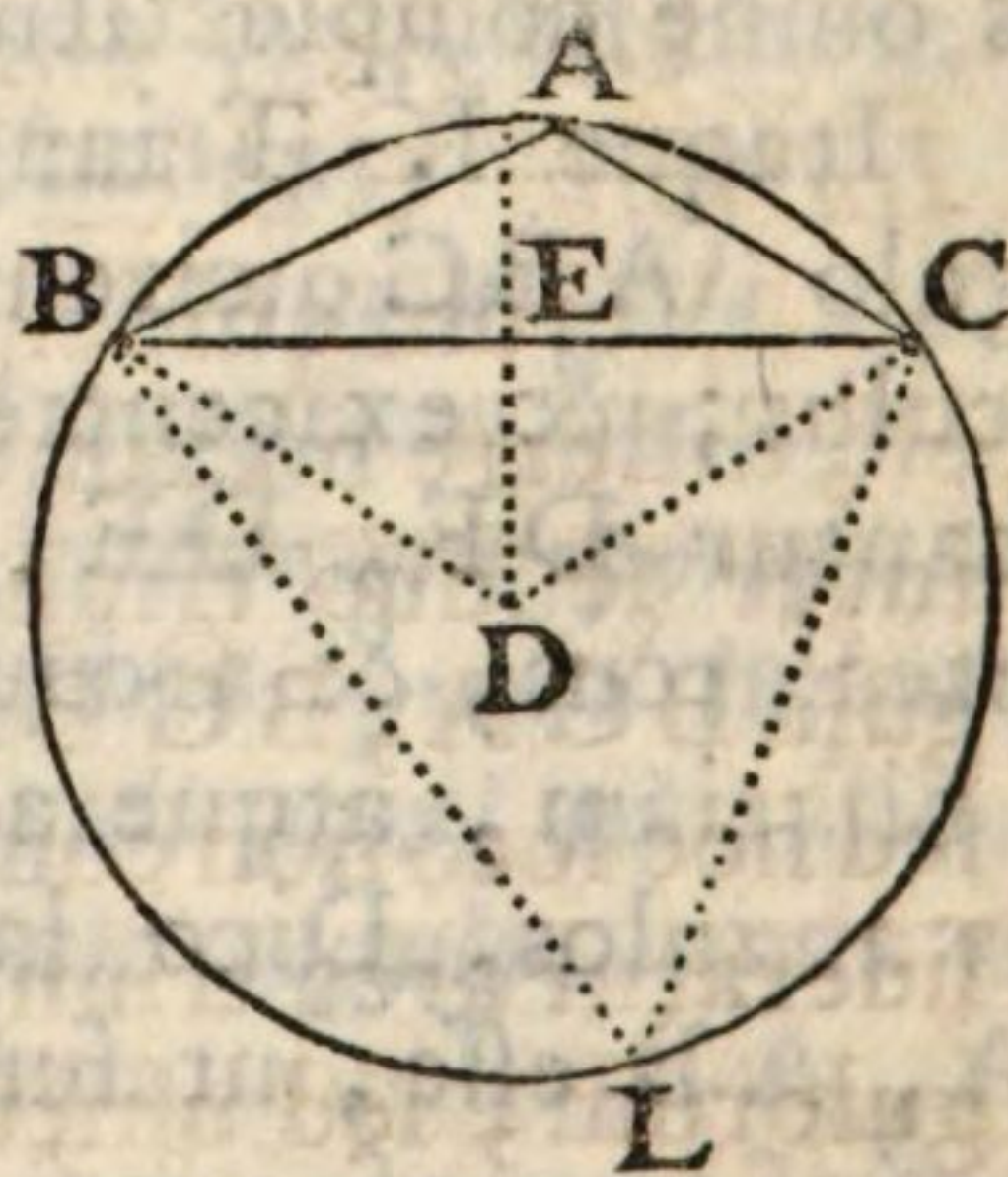


II. In triangulo rectangulo est $BD = \frac{1}{2} BC = \text{radio}$; sed radius est sinus anguli recti; ergo semissis lateris BC est sinus anguli A . Quod attinet ad reliquos angulos B & C , demonstrabis, ut ante, CE esse sinum anguli B , & BF esse sinum anguli C .



III. In triangulo obtusangulo BAC , ductis BL , CL , erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (*n. 188. Geom. planæ*); ac proinde idem erit utriusque anguli sinus ex def. n. 22. Est autem BE sinus anguli $BDE = \text{angulo } L$; quare erit & BE sinus anguli A .

Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum. Perspicuum est autem latera esse inter se, ut ipforum semisses. Quod erat &c.



Corollarium I.

85. **I**Taque, ut facile proportionales laterum habeantur, satis est, si lateribus sinus angulorum oppositorum adscribantur.

I. In triangulo ABC (*Fig. 1. pag. præced.*) ponatur angulus C grad. 60, & B grad. 50, & A grad. 70. Horum sinus ex tabulis reperientur esse 86602, 76604, 93969. Est ergo proportio lateris AB ad AC , eadem, quæ 86602 ad 76604; & AB ad BC , eadem, quæ 86602 ad 93969.

II. In triangulo altero ABC ponatur angulus A rectus, ac proinde grad. 90, & angulus C grad. 50, & B grad. 40. Horum sinus sunt 100000, 76604, 64278, qui laterum angulis oppositorum proportionales exprimunt.

III. In triangulo denique tertio statuatur angulus A obtusus grad. 124, & angulus C grad. 30, & B grad. 26. Horum sinus sunt (si pro sinu anguli obtusi accipiatur sinus complementi ipsius usque ad grad. 180, nempe sinus grad. 56.) 82903, 50000, 43837. Quare erit AB ad CB , ut 50000 ad 82903, & AC ad AB , ut 43837 ad 50000 &c.

Corollarium II.

86. **H**inc datis angulis invenire utique licet proportionales laterum, at non ipsa latera, hoc est, magnitudinem *absolutam* eorundem, nisi ipsorum unum prius innotescat.

Scholion.

Quamvis in triangulis universis rectilineis sinus angulorum sint inter se, uti latera opposita; non inde tamen consequitur eosdem angulos esse inter se, uti eadem

latera opposita. Ratio est, quia chordæ non sunt proportionales arcibus, qui eas subtendunt; & consequenter sinus, qui sunt semisses chordarum, non sunt proportionales eorum arcibus, aut angulis; uti docuimus n. 4. & 5.

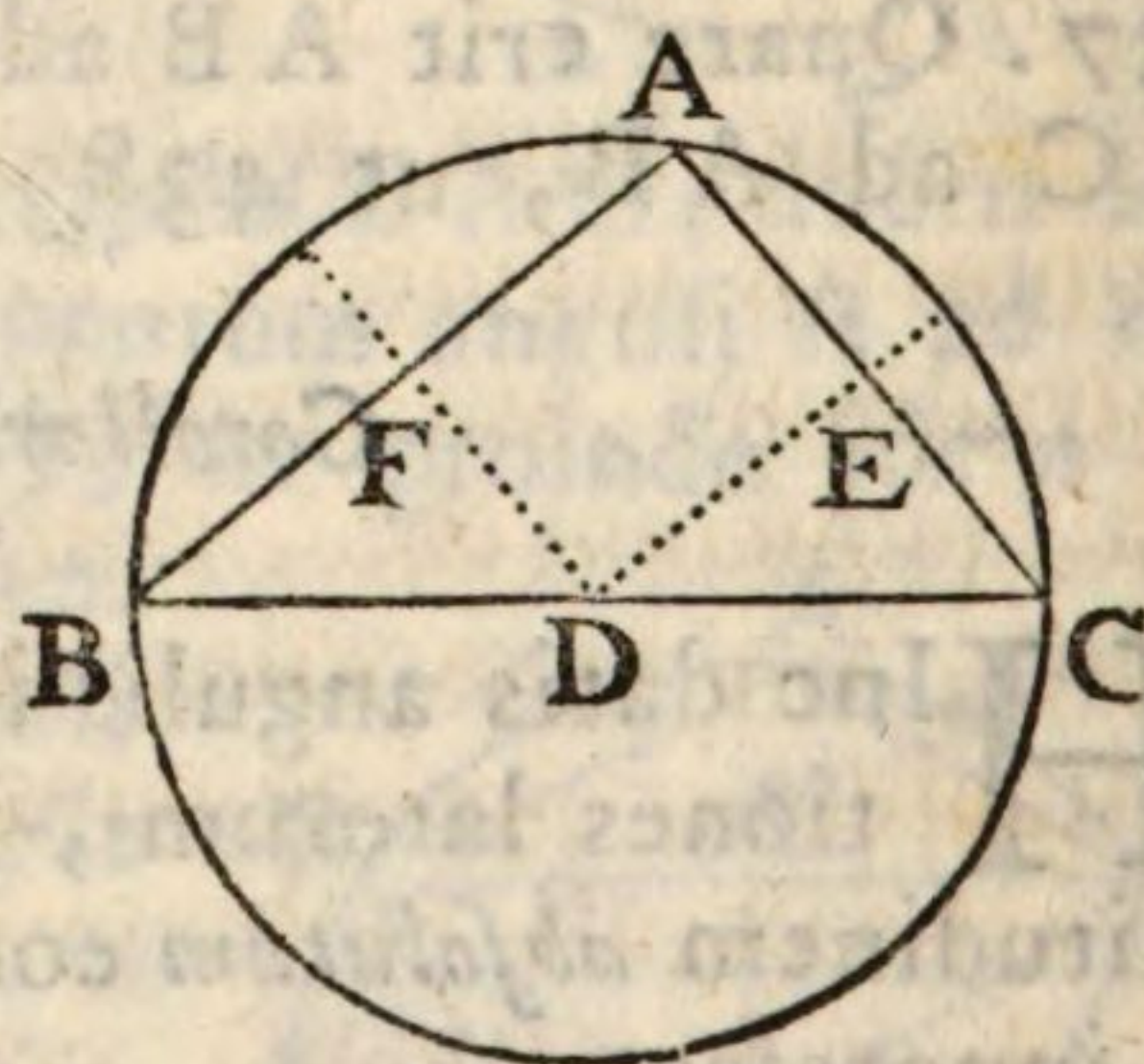
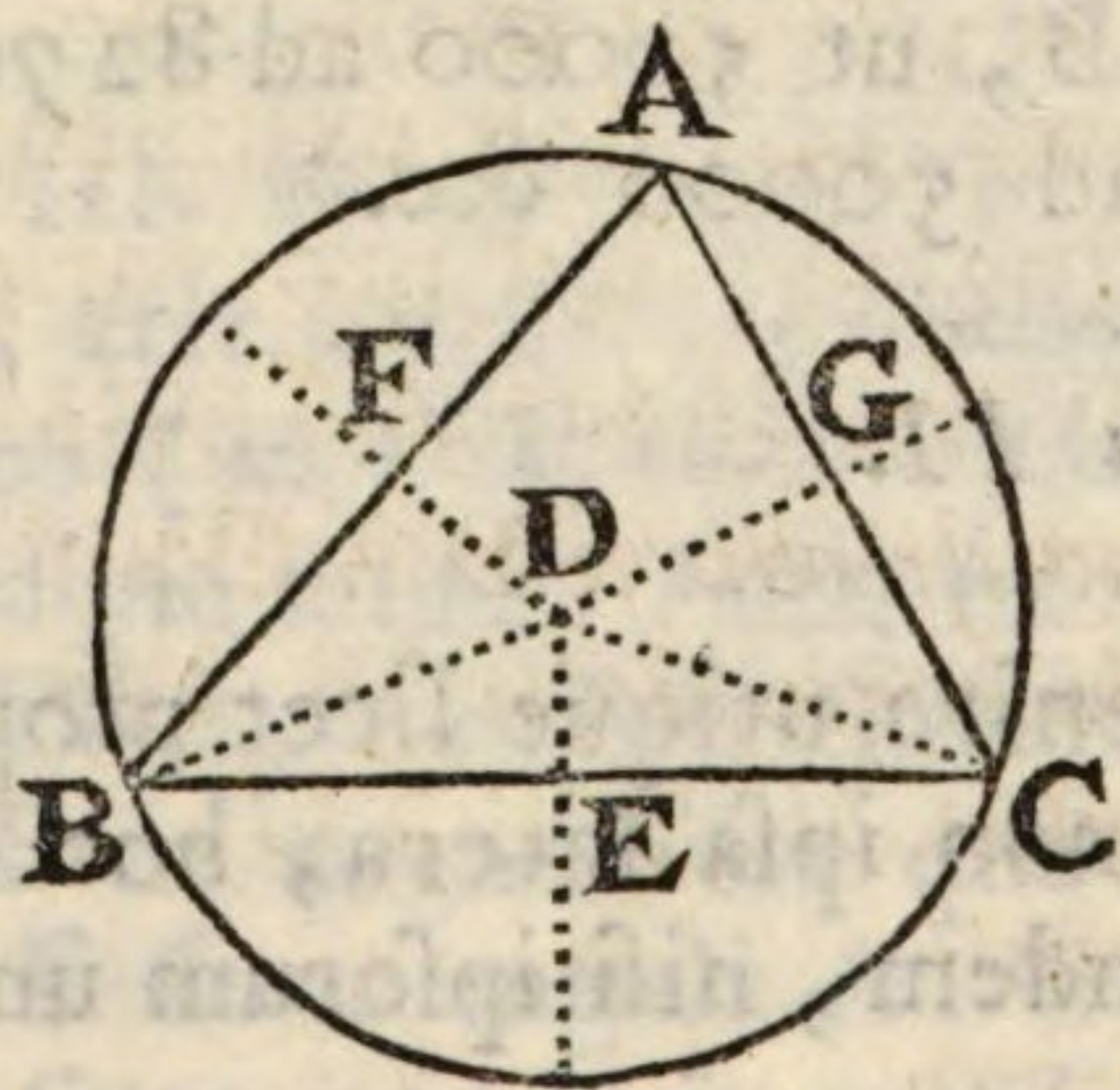
Corollarium III.

87. **H**inc in omni triangulo acutangulo, & rectangulo duæ semper habebuntur sequentes analogiæ.

I. Uti sinus anguli B
ad sinum anguli A;
Ita latus AC, oppositum primo angulo B,
ad latus BC, oppositum secundo angulo A.

II. Uti latus AC
ad latus BC;
Ita sinus anguli B, oppositi primo lateri AC,
ad sinum anguli A, oppositi secundo lateri BC.

In triangulo autem obtusangulo substituendus erit sinus supplementi anguli obtusi; uti jam ostensum est, & speciatim etiam demonstrabitur sequenti Theoremate.



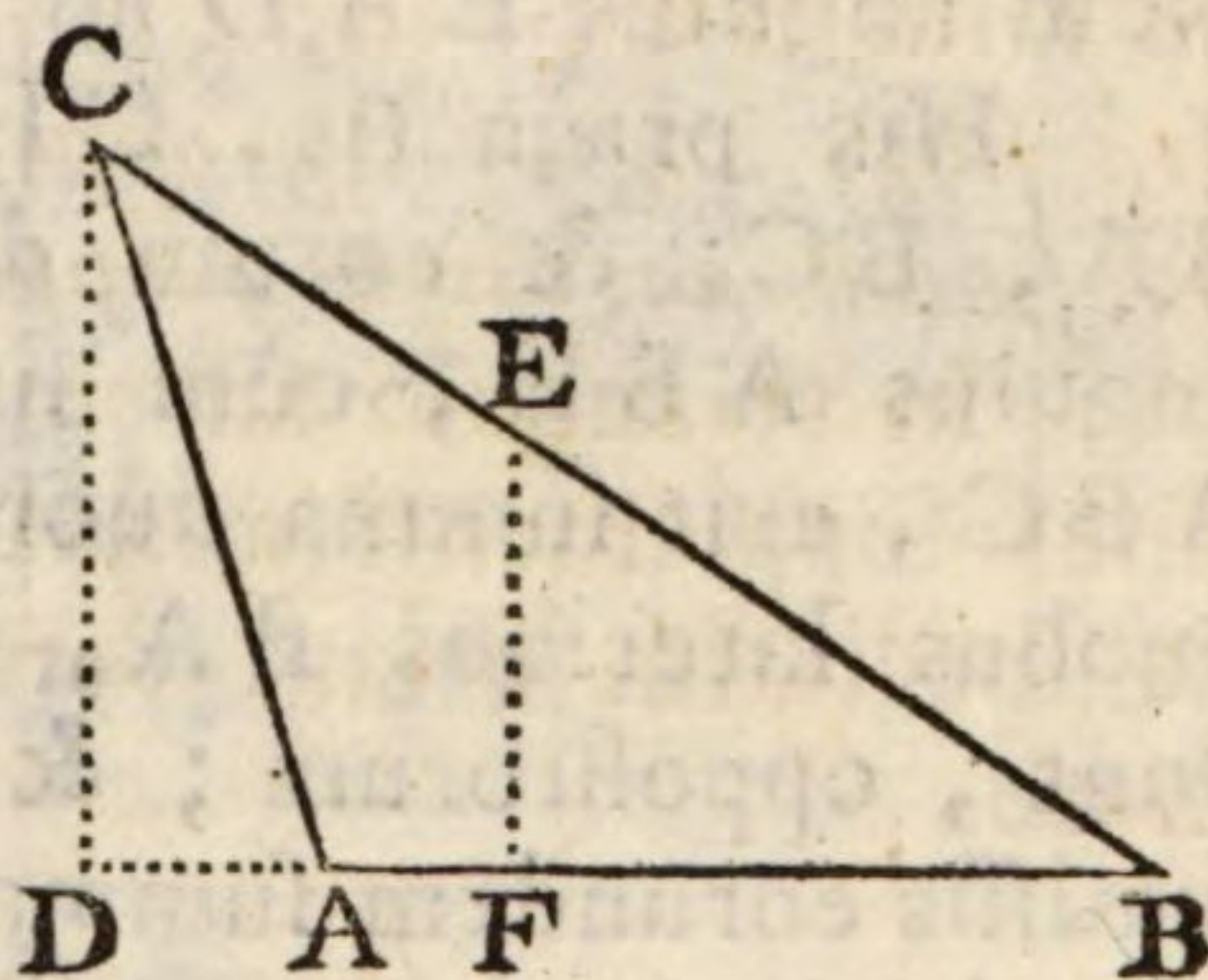
PROPOSITIO V.

THEOREMA.

88. **I**N omni triangulo obtusangulo, sinus unius, aut alterius ex duobus angulis acutis, est ad sinum supplementi anguli obtusi, uti latus oppositum angulo acuto, est ad latus oppositum angulo obtuso.

Demonstratio. Esto triangulum ABC , cujus angulus A sit obtusus. Dico sinum anguli acuti B esse ad sinum anguli CAD , supplementi ad angulum obtusum A , uti latus AC , oppositum angulo acuto B , est ad latus BC , oppositum angulo obtuso A .

Fiat $BE = AC$; ac demittantur EF , CD perpendiculares super BA producta versus D . Itaque CD est sinus anguli CAD , & EF sinus anguli B . Triangula verò BEF , BCD sunt æquiangulara; ac proinde $EF:CD::BE:BC$; quare, si loco tertii termini BE , substituatur æqualis AC , probabit hæc analogia:



Uti EF , sinus anguli B ,
ad CD , sinum supplementi anguli obtusi BAC ;
Ita AC , latus oppositum angulo acuto B ,
ad BC , latus oppositum angulo obtuso BAC .
Quod erat &c.

Corollarium.

EX hac Propositione deducuntur eadem analogiæ, quæ in præcedenti, si loco sinus anguli obtusi A , substituatur sinus sui supplementi DAC .

PRO-

PROPOSITIO VI.

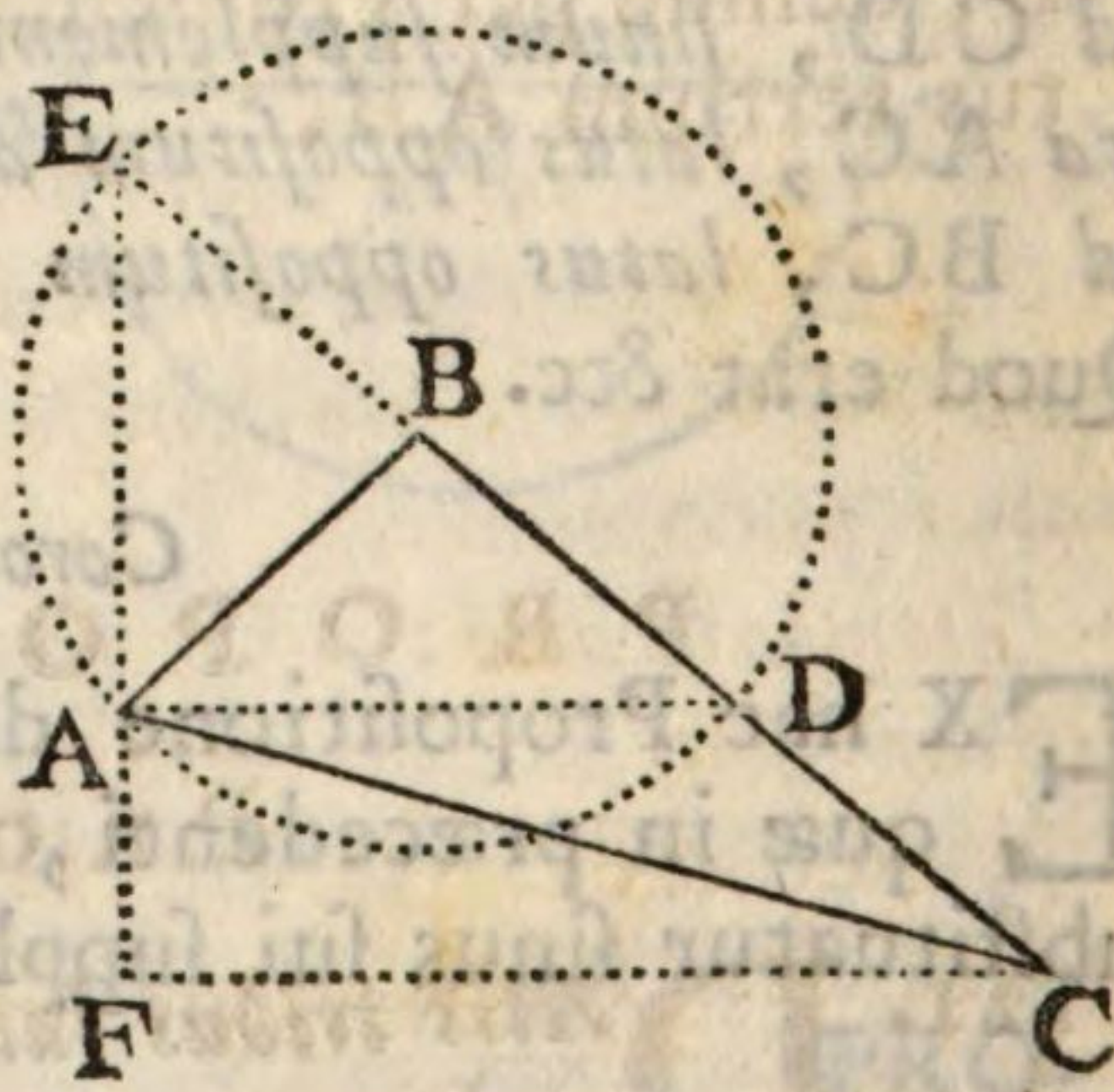
THEOREMA.

89. **I**N quolibet triangulo ABC , ut summa duorum quorumvis laterum BA , BC ad eorundem differentiam, sic tangens semisummæ angulorum A & C iisdem lateribus oppositorum, est ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

Demonstratio. Centro B , intervallo minoris lateris BA , describatur circulus EAD ; ducaturque recta DA , & huic parallela CF ; productâque CB , donec occurrat circulo in E , jungatur EA , protracta in F . Recta EF erit perpendicularis duabus lineis AD , FC . Nam angulus EAD ad semicirculum rectus est.

His præjactis, CE erit summa duorum laterum BA , BC ; & eorum differentia erit DC . Rursum angulus ABE , cum sit externus respectu trianguli ABC , erit summa duorum angulorum BAC , BCA , duobus lateribus BA , BC , quæ in quæstionem cadunt, oppositorum; & angulus $FCE = ADE$, erit semissis eorundem summæ ABE . Nam angulus ADE est ad circumferentiam, & summa ABE ad centrum (*n. 177. Geom. planæ.*)

Angulus ACF erit semissis differentiæ eorundem angulorum BAC , BCA . Nam angulus BDA , aut ipsi æqualis BAD , major est angulo BCA , excessu anguli DAC ; & angulus BAC major est angulo BAD , excessu eodem anguli DAC . Ergo angulus BAC major est angulo BCA , duplici excessu ejusdem anguli DAC ;



ergo

ergo angulus $DA C$, aut ipsi æqualis $AC F$, est semissis differentiæ duorum angulorum BAC , BCA .

Quia verò angulus F est rectus, si accipiatur FC pro radio, FE erit tangens anguli FCE , & FA tangens anguli FCA . Est præterea recta AD parallela basi FC trianguli $FE C$. Ergo $ED:DC::EA:AF$; & componendo,

Ut EC , *summa duorum laterum,*

ad DC , *eorum differentiam;*

Ita EF , *tangens semisummæ duorum angulorum* A & C , *lateribus* BA , BC *oppositorum,*

ad AF , *tangentem semissemis differentiæ eorundem angulorum.* Quod erat &c.

Corollarium.

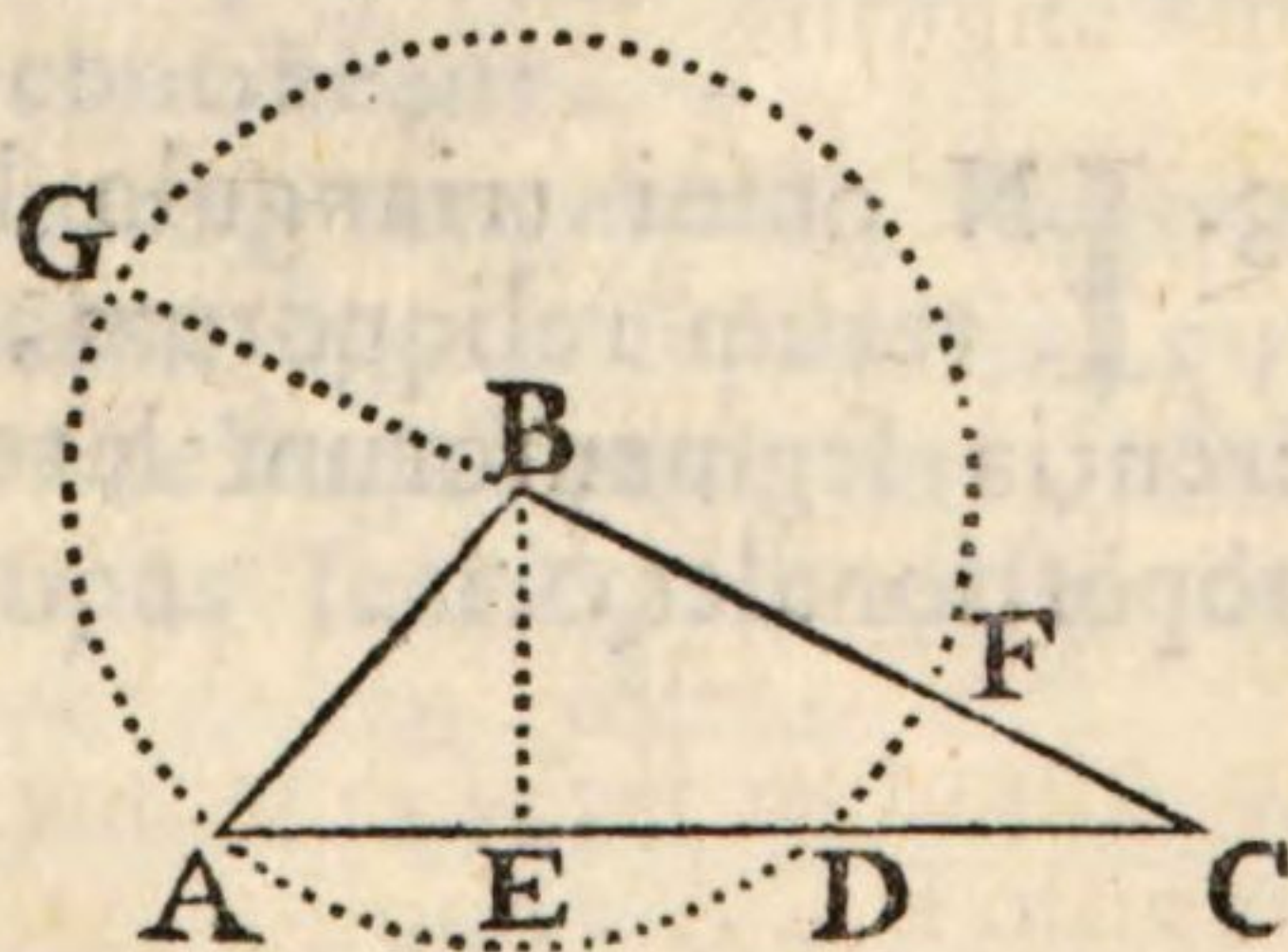
90. **I**n omni triangulo summa laterum, differentia laterum, tangens semisummæ angulorum oppositorum, & tangens semidifferentiæ eorundem, sunt termini proportionales.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

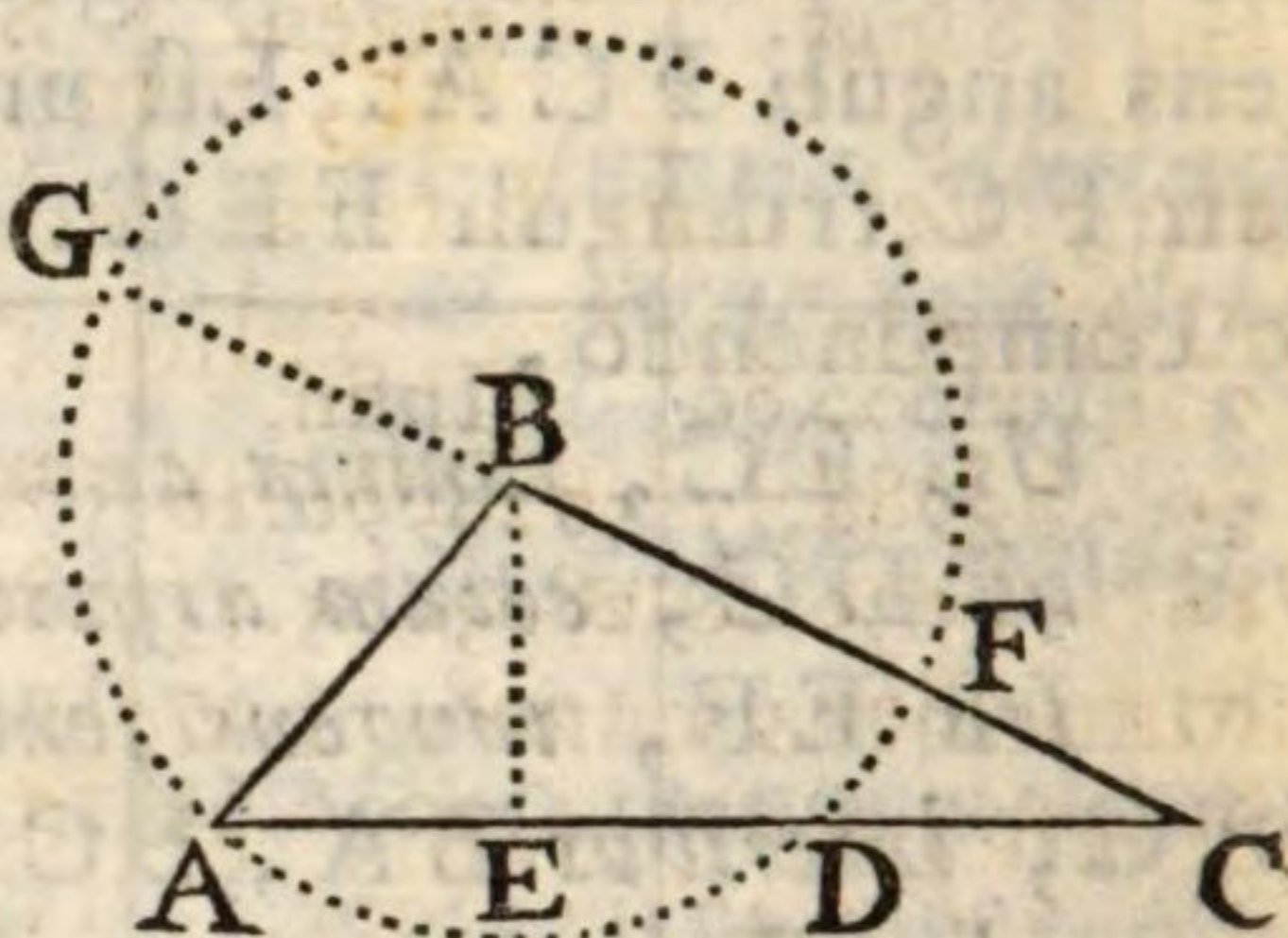
91. **I**n omni triangulo ABC , ut est latus maximum AC ad summam reliquorum BA , BC , ita horum differentia FC est ad differentiam DC inter segmenta EA , EC facta a perpendiculari ab angulo opposito demissa in latus maximum.

Demonstratio. Centro B , intervallo lateris minimi AB , circulus describatur, secans reliqua latera in F &



D. Ca-

D. Cadat porro in AC perpendicularis BE , quæ ipsam AD bisecabit; producatique CB in G . Erunt igitur EA , EC segmenta facta a perpendiculari, quorum differentia DC ; summa laterum BA , BC est CG , quorum differentia FC . Itaque (n. 560. *Geom. planæ*), quoniam rectangulum sub AC & CD æquatur rectangulo sub GC & FC , erunt latera reciproce proportionalia (n. 376. *Geom. planæ*); hinc,



Ut AC , *latus maximum*,
ad GC , *summam reliquorum* BA , BC ;
Ita FC , *horum differentia*,
ad DC , *differentiam segmentorum* EA , EC *lateris maximi*.

Scholion.

92. **D**uo latera BA , BC necessario debent esse inæqualia: duo autem AB , AC , vel AC , CB possunt esse æqualia; & tunc pro latere maximo sumi potest utrumlibet laterum AC , CB æqualium.

Corollarium.

93. **I**n omni triangulo latus maximum, summa laterum reliquorum, differentia eorundem, differentia segmentorum lateris maximi, sunt termini proportionales.

Analysis Trianguli rectanguli.

94. **I**N omni triangulorum analyfi semper tria data esse oportet, nimirum, vel duo anguli cum latere, vel duo latera cum angulo, aut omnes anguli, vel omnia latera; reliqua verò quæfita.

95. In analyfi autem trianguli rectanguli, quamvis folùm duo data exprimantur, ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium semper est ipse angulus rectus, qui per se est notus.

96. Quia verò ex Elementis Geometriæ planæ constat, cujuscumque trianguli tres angulos simul sumptos efficere gradus 180; hinc, si in quovis triangulo noti sint duo anguli, etiam tertius innotescet; atque hac de causa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur esse datus.

Similiter, si in quovis triangulo notus sit unus angulus, innotescit etiam summa reliquorum; in triangulo autem rectangulo dato acuto uno, etiam acutus alter notus erit. Omnia constant ex n. 213. Geom. planæ.

97. Dato angulo, datur ex tabulis finus ejusdem, aut tangens, aut secans; & vicissim dato sinu &c., datur angulus.

98. Termini proportionales dicuntur noti, qui numeris exprimuntur; hoc est, quando scitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

99. Adverto denique finus, tangentes, secantes in canone disponi ultimis duabus figuris separatis; quæ quidem ad calculi facilitatem relinqui poterunt, residuo addendo unitatem, si opus fuerit, ut alibi docuimus.

AXIOMA.

100. **S**I duæ quantitates A & B notæ fuerint secundum quamvis earundem mensuram, & earum una A etiam nota sit in alia mensura, puta, pedum &c., tunc etiam altera B in eadem pedum mensura necessario innotescet per regulam proportionum.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

101. **D**Atis, hypotenusa AC pedum 100, & angulo adjacentem A grad. 59, reliqua latera CB, BA invenire.

Resolutio. Fiat (n. 76.):

Ut data hypotenusa AC, prout est
sinus totus, seu radius, 100000000,
ad latus quæsitum CB, prout est
sinus anguli A grad. 59, 8571673;
Ita eadem hypotenusa AC, prout est
pedum 100,
ad ejusdem lateris CB pedes quæsitos.

Invenientur esse

$$85 \frac{7167300}{100000000}.$$

Hæc autem ipsissima analogia sic etiam posset ef-
ferri (n. 100.).

Quando hypotenusa AC intelligitur
divisa in partes 100000000,

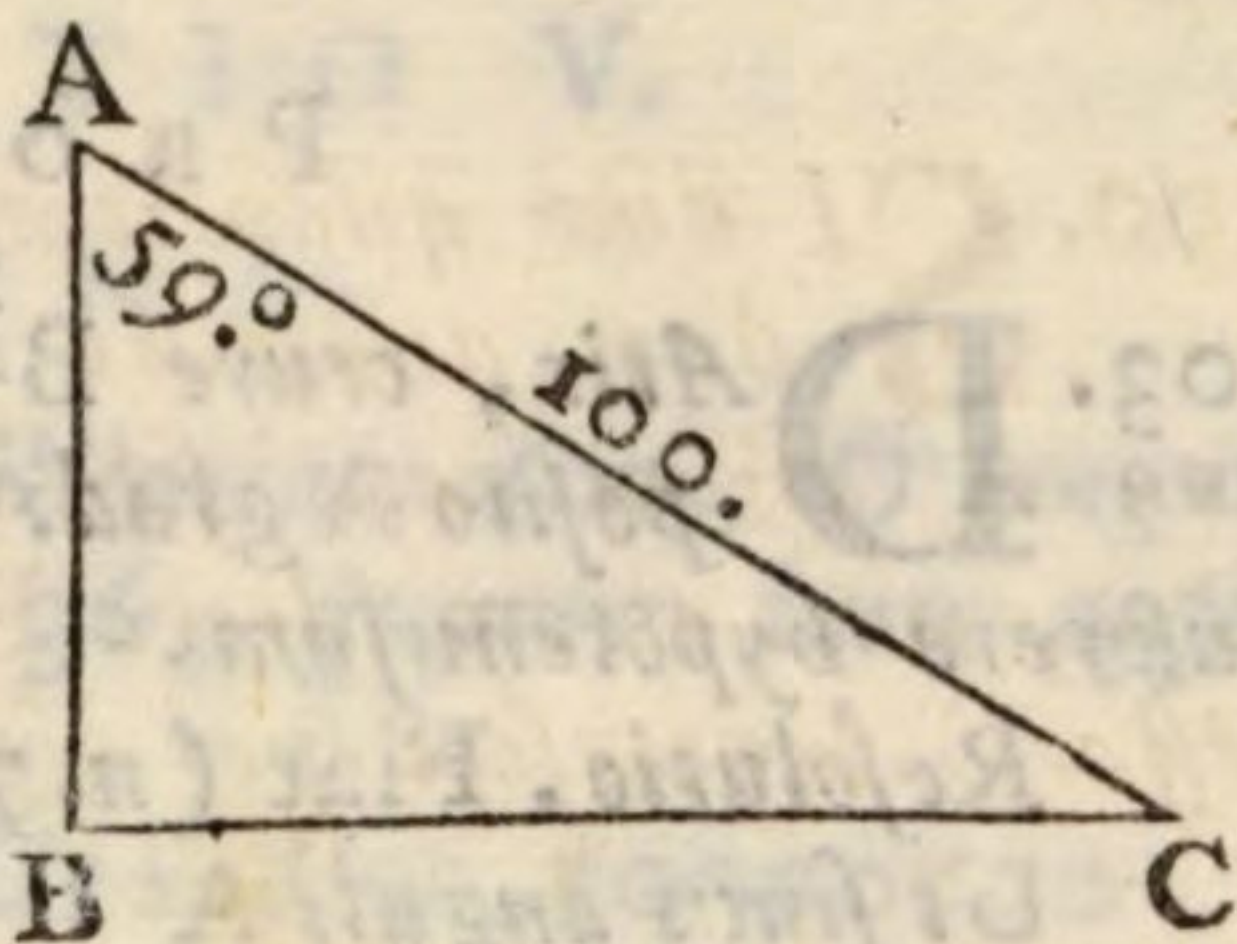
latus CB earundem partium continet 8571673;

Sin autem eadem hypotenusa AC
sit dumtaxat divisa in partes 100,

Quot ejusmodi partium continebit idem latus CB?

Non

Non abfimilis inventio erit lateris BA. Nam dato acuto uno A, datur acutus alter C. Ratio pendet ex n. 16. & 26. Ibi enim ostensum est, si hypotenusa ponatur tanquam radius, duo reliqua latera evadere sinus angulorum oppositorum.



PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

102. **D**Atis, hypotenusa AC in quavis mensura, puta, hexapedarum 1000, & uno latere BC 891 hexap., invenire acutos angulos A & C, & latus alterum AB.

Resolutio. Fiat (n. 76.):

Ut hyp. data AC hexapedarum 1000,

ad latus datum BC hexapedarum 891;

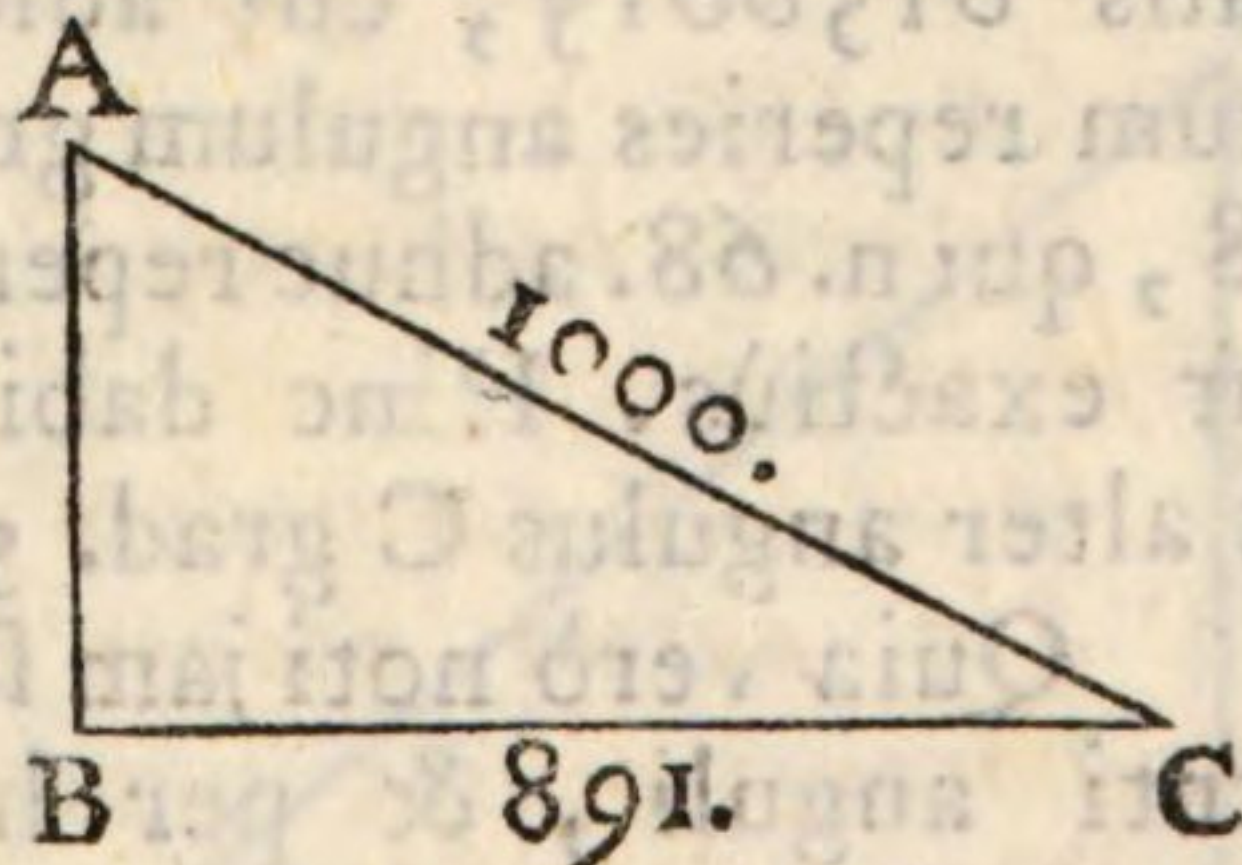
Ita eadem hyp. AC, prout est radius, 10000000,

ad anguli ignoti A, qui dato lateri

opponitur, sinum 8610000.

In canone trigonometrico, cum sinus iste non inveniatur, quærendus erit proximè æqualis 8910065; cui adscriptus est angulus grad. 63, qui per n. 68. adhuc reperietur exactiùs. Invento acuto A, datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam verò in triangulo rectangulo nota est hypotenusa AC cum angulo adjacente A, latus quæsitum AB invenietur per Probl. præced.



PRO-

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

103. **D** Atis, crure BC hexap. 456, & angulo op-
posito A grad. 33,
quærere hypotenusam.

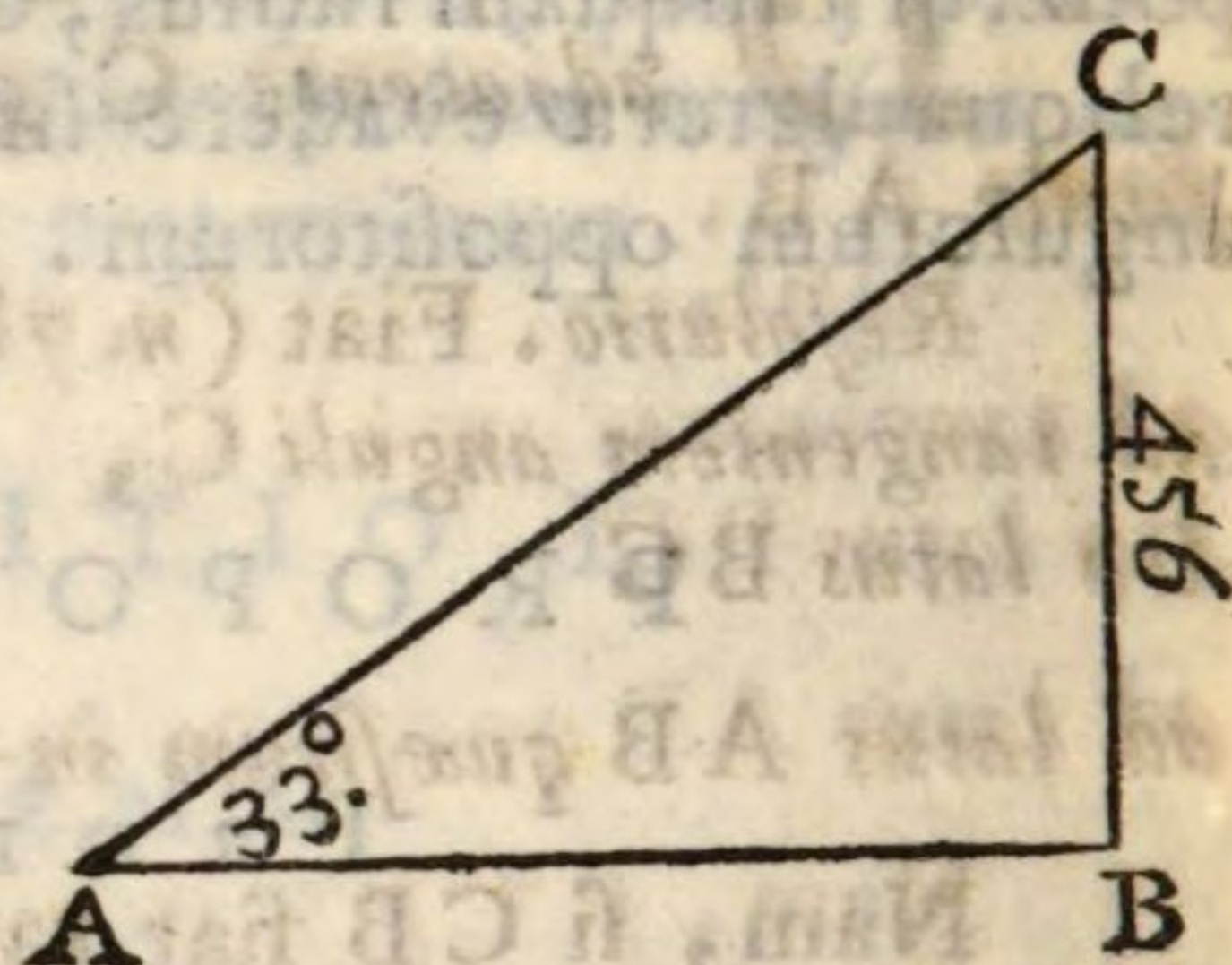
Resolutio. Fiat (n. 75.):

Ut sinus anguli A

ad radium;

Ita latus BC

ad hyp. quæsitam.



PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

104. **D** Uobus lateribus datis, BC ped. 79, & BA
ped. 100, quærere utrumque acutum angu-
lum C & A, & hypotenusam.

Resolutio. Fiat (n. 78.):

Ut datum latus AB pedum

100

ad alterum latus BC pedum

79;

Ita sinus totus

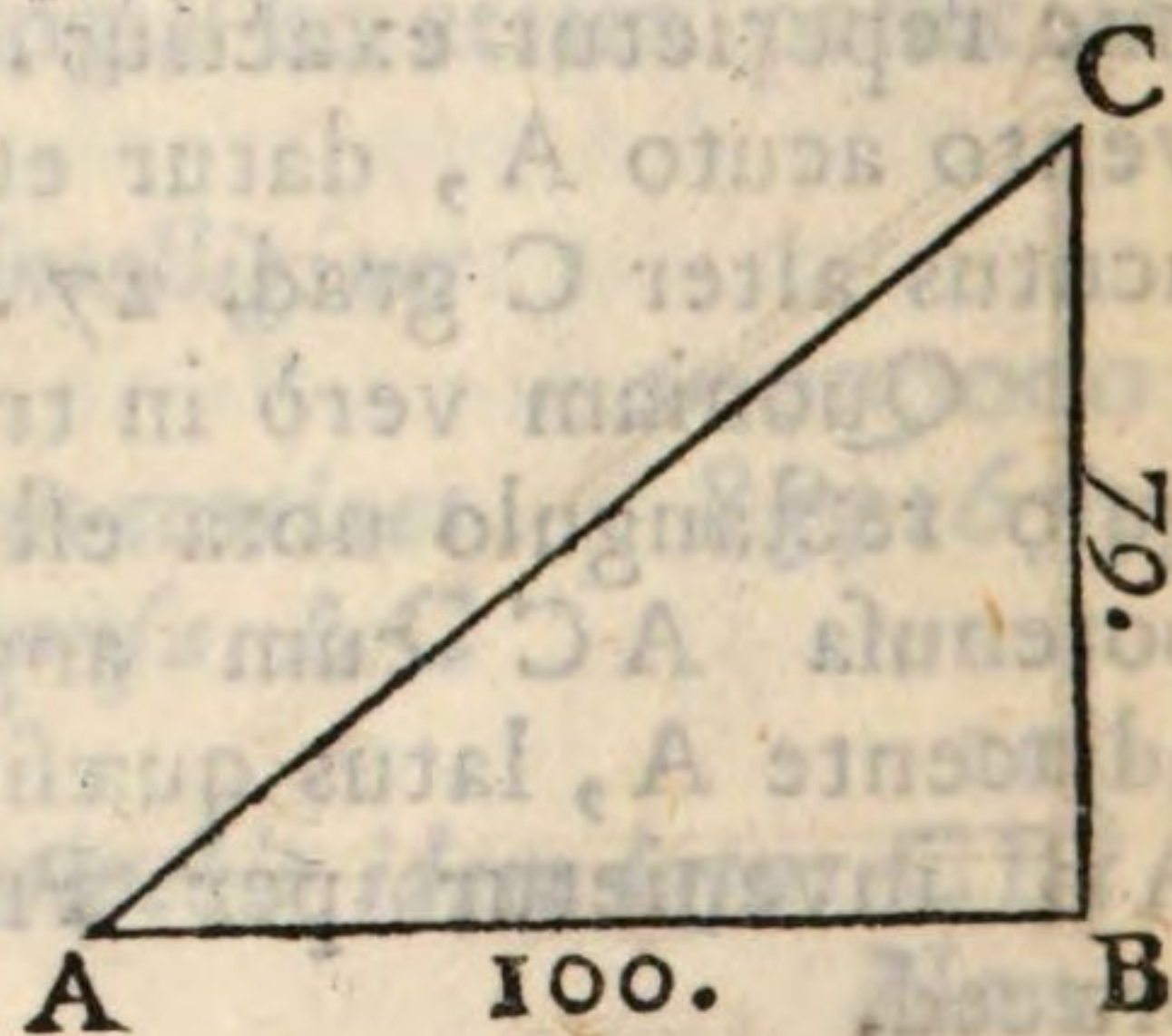
10000000

ad anguli A quæsitæ tangentem

79000000.

Huic tangenti proximè æqualis invenietur in ta-
bulis 6156615; cui adscri-
ptum reperies angulum grad.
38, qui n. 68. adhuc reperie-
tur exactiùs. Hinc dabitur
& alter angulus C grad. 52.

Quia verò noti jam sunt
acuti anguli, & per hyp.
etiam latera, hypotenuſa
nota fiet n. 103.



De

De Usu Tangentium.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

105. **D**atis, latere BC milliarium 400, & angulo
adjacente C grad. 36, quærere latus oppo-
situm AB.

Resolutio. Fiat (n. 78.): Ut radius 10000000
ad tangentem anguli C, 7265426;
Ita latus BC 400

ad latus AB quæsitum in eadem mensura, $290\frac{3}{5}$.

Nam, si CB fiat radius, erit BA tangens anguli C; hinc termini proportionales erunt radius, tangens anguli C, latus BC, & latus BA.

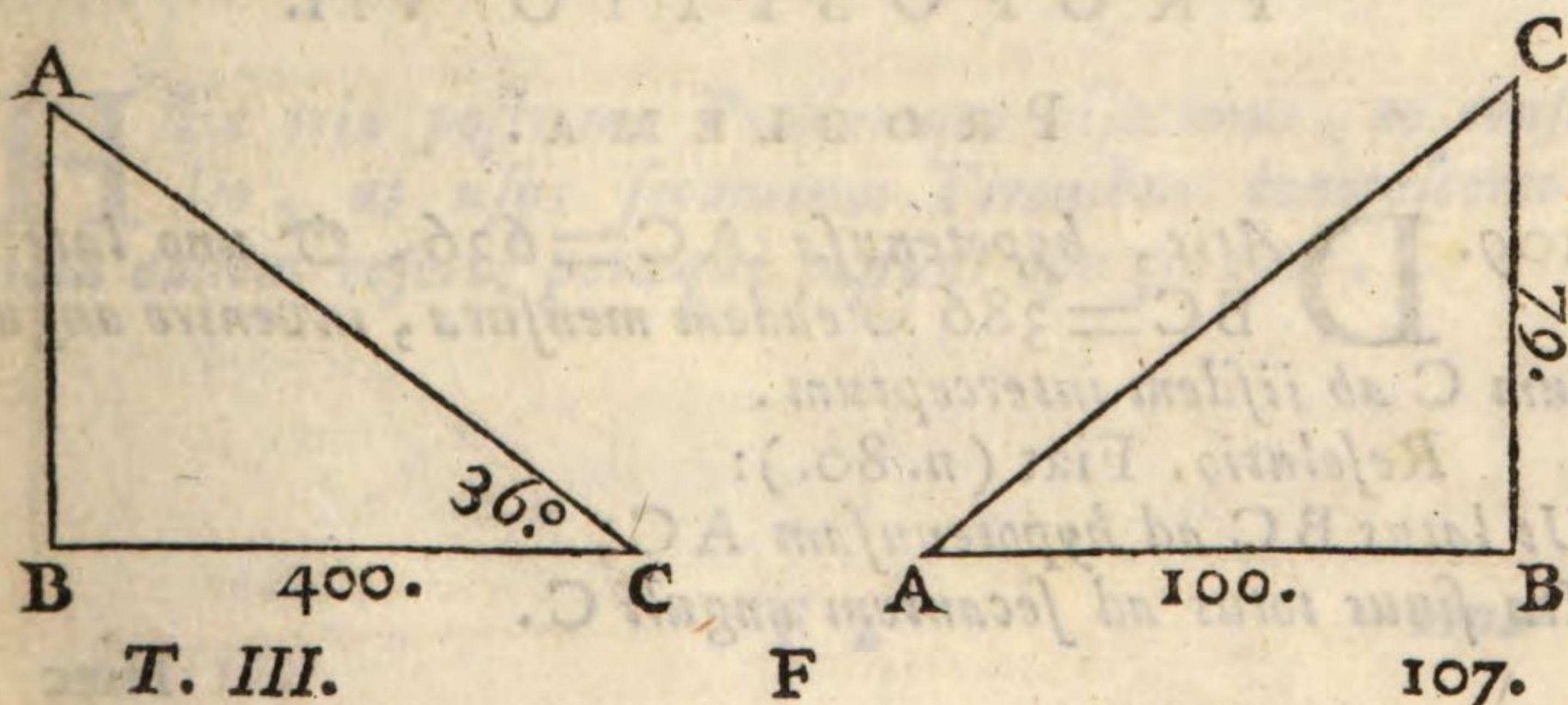
106. Simili prorsus methodo resolves Problema præcedens ope, atque usu tangentium; nimirum,

Duobus lateribus datis BC, BA, quærere utrumque acutum angulum C & A.

Resol. Fiat (n. 79.): Ut quodvis datorum laterum AB
ad reliquum latus datum BC;

Ita sinus totus
ad tangentem anguli A, oppositi secundo termino BC.

Hæc autem tangens per analogiam inventa, dabit
in canone trigonometrico gradus pro valore anguli A,
cujus complementum erit alter angulus C.



82 DE TRIANGULIS PLANIS

107. Pariter, *dati lateribus, invenietur hypotenusa*. Nam I. quærantur anguli per Probl. præced. II. quærat^{ur} hypotenusa n. 104.

De Ufu Secantium.

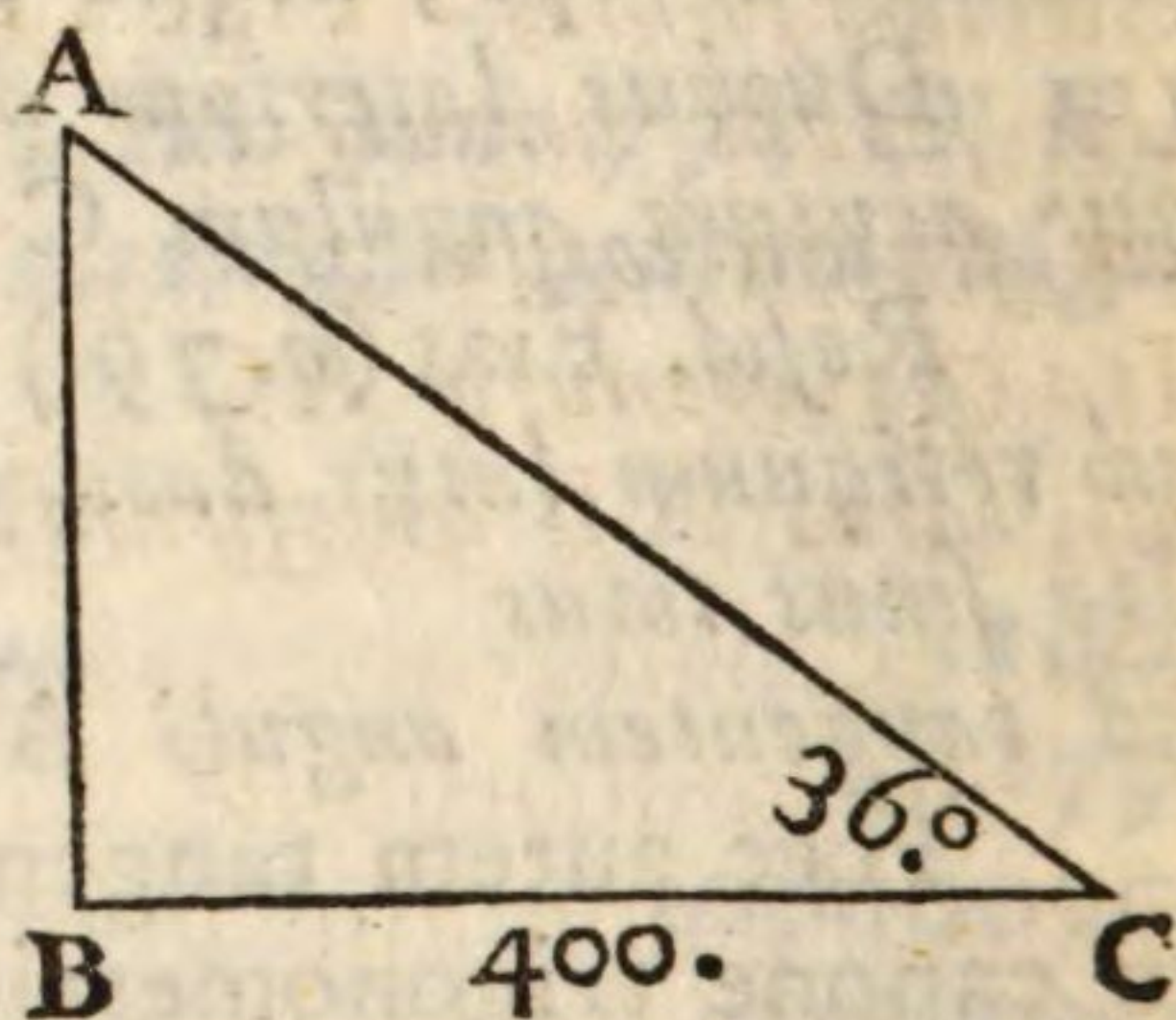
PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

108. **D** *Atis, latere $BC = 400$ pedibus, & angulo adjacente $C = 36$ grad., invenire hypotenusam AC .*

Resolutio. Fiat (n. 81.): Ut radius 100000000
ad latus cognitum BC pedum 400;
Ita secans anguli dati C , 12360680,
ad hypotenusam AC pedum ferè $494\frac{1}{2}$.

Quoniam, si latus datum BC fiat radius, hypotenusa AC evadit secans anguli C , per n. 82. Erit igitur, ut CB , tanquam radius, ad idem BC , ut latus trianguli; ita CA , ut secans anguli C , ad CA , tanquam hypotenusam.



PROPOSITIO VII.

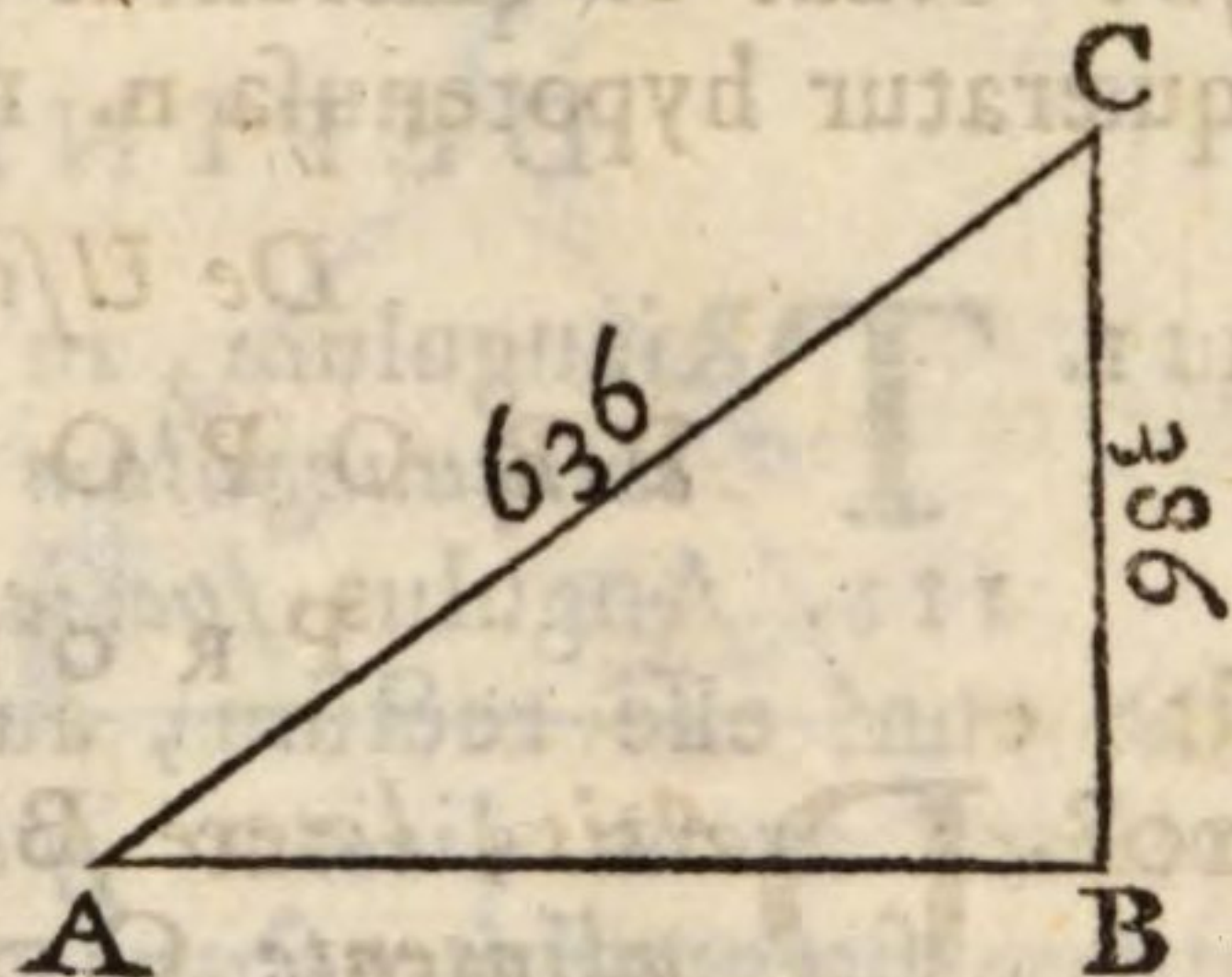
PROBLEMA.

109. **D** *Atis, hypotenusa $AC = 636$, & uno latere $BC = 386$ in eadem mensura, invenire angulum C ab iisdem interceptum.*

Resolutio. Fiat (n. 80.):
Ut latus BC ad hypotenusam AC ;
Ita sinus totus ad secantem anguli C .

Hæc

Hæc inventa in columna secantium, methodo superius explicata, dabit $52^{\circ} 38'$ pro angulo C, cujus complementum $37^{\circ} 22'$ erit valor anguli A.



PROPOSITIO VIII.

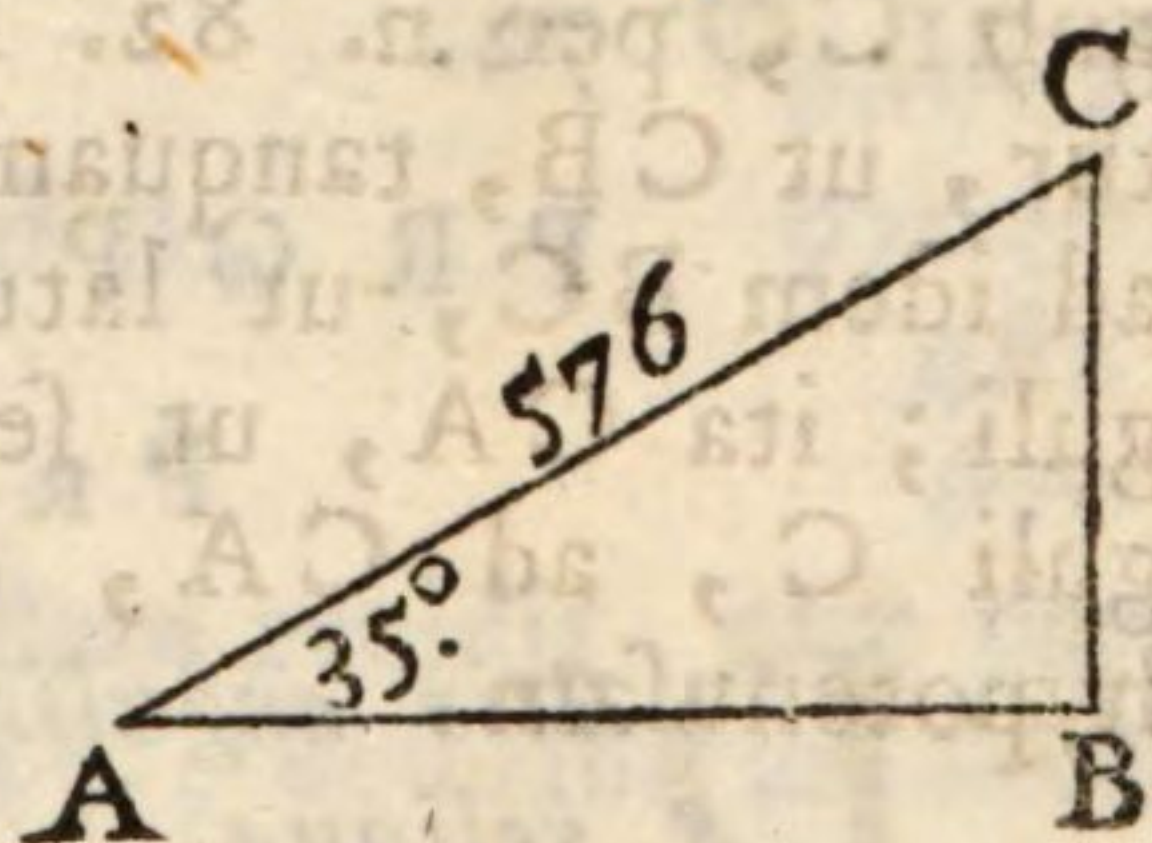
PROBLEMA.

110. **C**ognitâ hypotenusâ AC, & angulo A, invenire latus adjacens AB.

Resolutio. Fiat (n. 80.):

Ut secans anguli A
ad sinum totum;

Ita hypotenusâ AC
ad latus AB quæsitum.



Monitum.

Hæc tria postrema Problemata adjecimus, eo consilio, ut usus secantium Tironibus innotesceret; nam eadem resolvi peræquè possunt ope sinuum.

Analysis Trianguli obliquanguli.

DEFINITIONES.

III. **T**riangulum, in quo nullus angulus rectus est, *obliquangulum* voco.

III.2. Angulus *specie* notus dicitur, quando constat eum esse rectum, aut obtusum, aut acutum. Similiter arcus dicitur *specie* notus, quando scitur, utrum sit quadrans, aut quadrante major, vel minor. Propriè tamen, quando arcus est quadrans, vel angulus rectus, dicetur uterque datus *magnitudine*, nimirum, grad. 90.

Scholion.

Ad calculi facilitatem omitti poterunt duæ ultimæ figuræ, quæ puncto separantur a reliquis in canone sinuum &c.; ut dictum est Observatione 3 & 4, n. 71. & 72.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

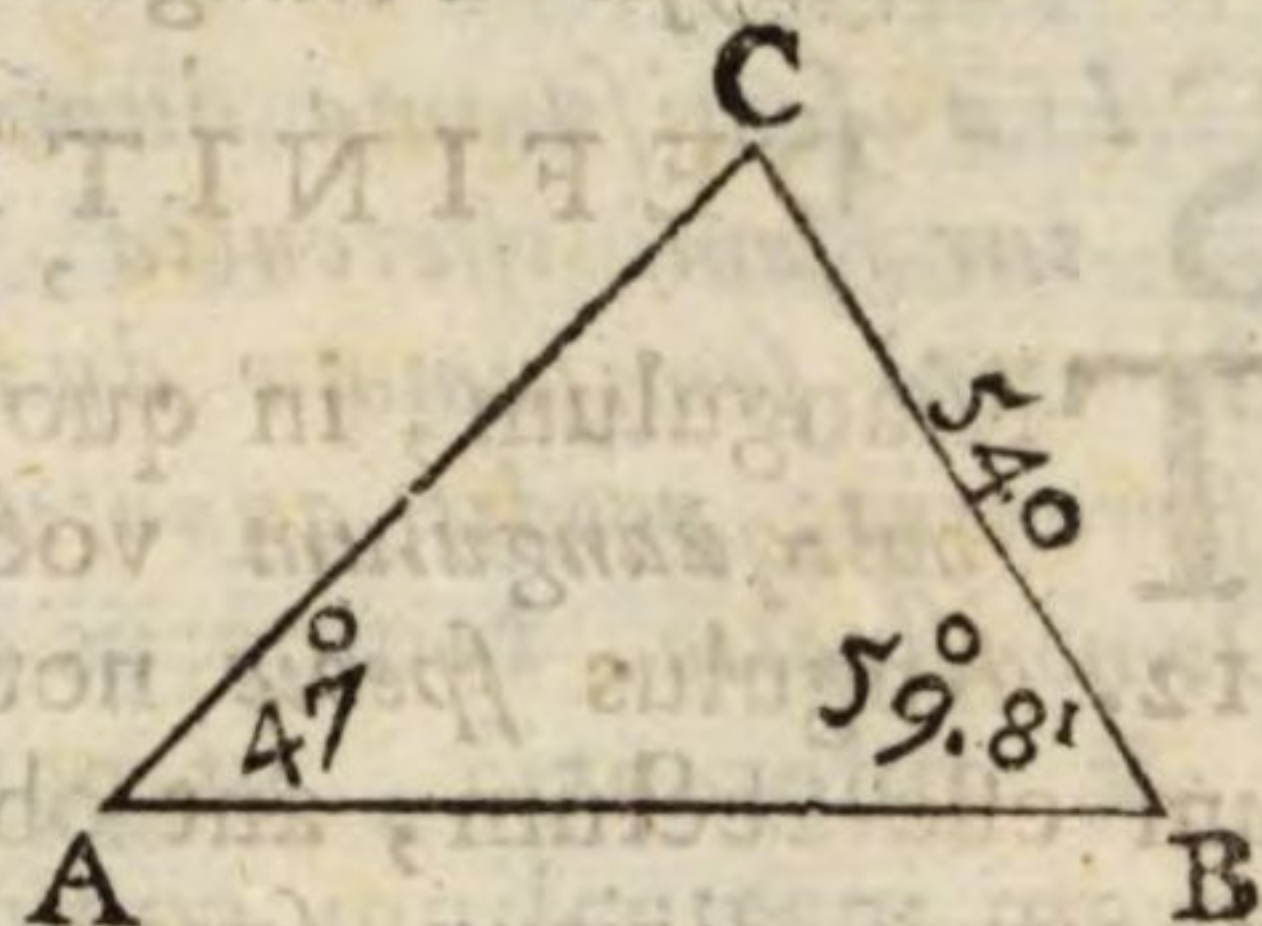
III.3. **D**atis angulis, & uno latere, invenire latera reliqua.

Resolutio. In triangulo ABC esto latus BC = 540 ped., & angulus A 47°, & angulus B 59°, 8': tertius angulus C erit 73°, 52'. Invenietur itaque latus AC hac instituta analogia. Fiat (n. 83.):

Ut sinus anguli A,	73135
ad sinum anguli B,	85836;
Ita latus BC, oppositum primo angulo A,	540
ad latus AC, oppositum secundo angulo B,	634.

Nam latera finibus angulorum ipsis oppositorum sunt

sunt proportionalia. Sin autem lubeat cognoscere latus AB , substituat in analogia pro secundo termino sinus anguli C , loco sinus anguli B ; & inveniatur latus AB pedum 709.



114. Quod si angulus obtusus haberetur, per sinum sui supplementi instituenda esset resolutio (*n.* 88.). Est triangulum ABC , cujus notum sit latus $AC = 462$, & angulus $B = 42^\circ$, & angulus obtusus $A = 104^\circ$; quæratque latus BC in eadem mensura.

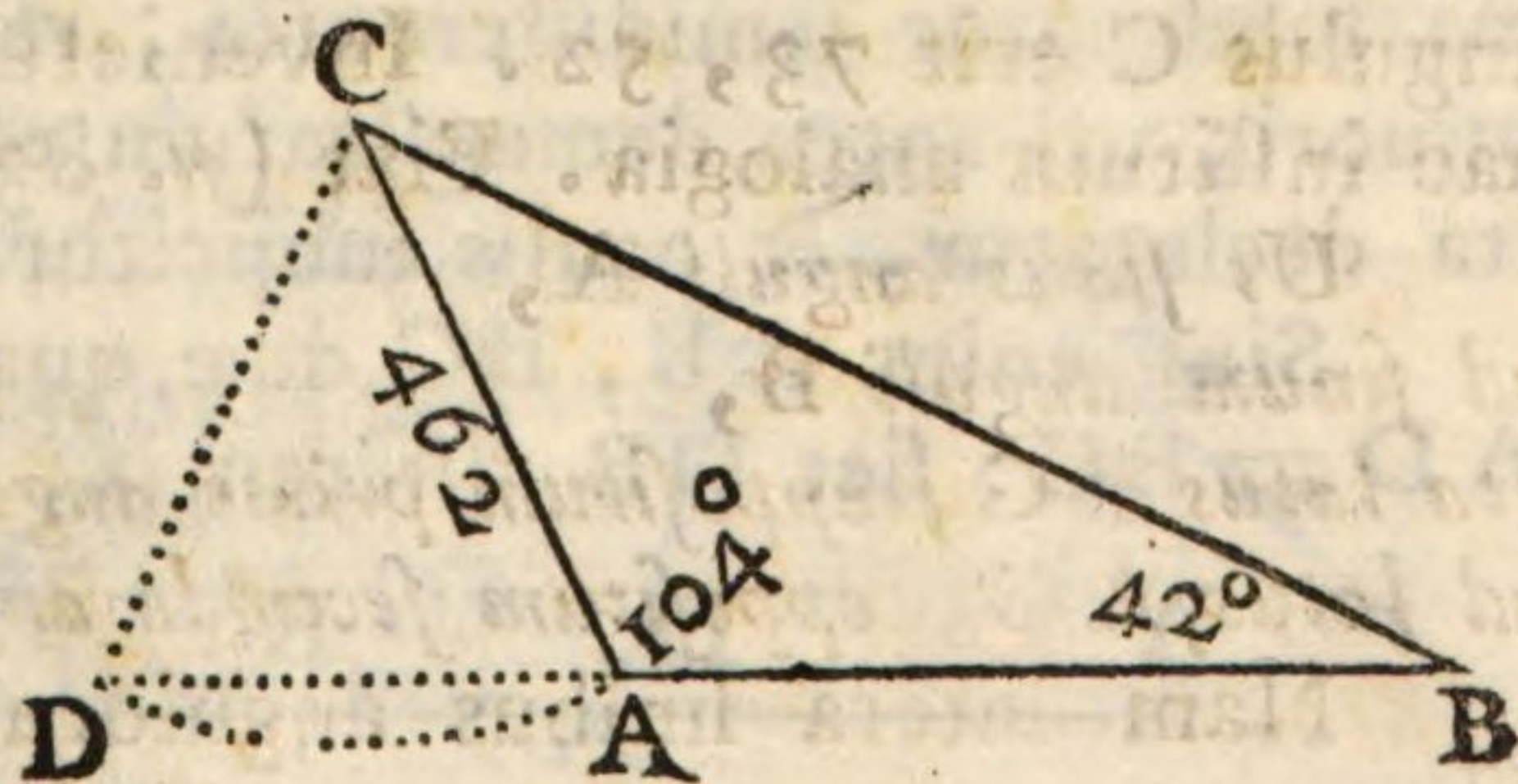
In canone trigonometrico inveniatur sinus supplementi anguli obtusi dati, nimirum, sinus anguli 76° ; instituaturque hæc analogia:

Ut sinus anguli B ,	66913
ad sinum supplementi anguli obtusi A ,	97030;
Ita latus AC	462
ad latus quæsitum BC	670.

Quæ analogia in eandem illam recidit, quæ prodiret, si centro C , intervallo AC , describatur arcus AD , ducaturque CD , atque ita dicatur:

Ut sinus anguli B ad sinum anguli D ;
Ita latus $CD = AC$, ad latus quæsitum BC .

Verum quidem est, differre maximè inter se duo trian-
gula BCA , BCD ;
sed hoc loco non con-
sideratur area trian-
gulorum, sed unice
ratio laterum, & si-
num angulorum.



L E M M A .

115. **S**i a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor; Si vero semisummæ duarum quantitatum addatur semidifferentia, prodit quantitas major.

Demonstratio. Numerus major componitur ex minore, & differentiâ, ut patet; ergo summa duorum numerorum inæqualium componitur ex quantitate minore bis sumpta, & differentiâ; ac proinde semisumma componitur ex minore, & semidifferentiâ. Quare, si a semisumma subtrahatur semidifferentia, relinquitur minor quantitas. Quod erat unum.

Sin autem semisummæ duorum numerorum addatur semidifferentia eorundem, aggregatum erit compositum ex quantitate minore, & differentiâ; adeoque, uti antea demonstratum est, erit numerus major. Quod erat alterum.

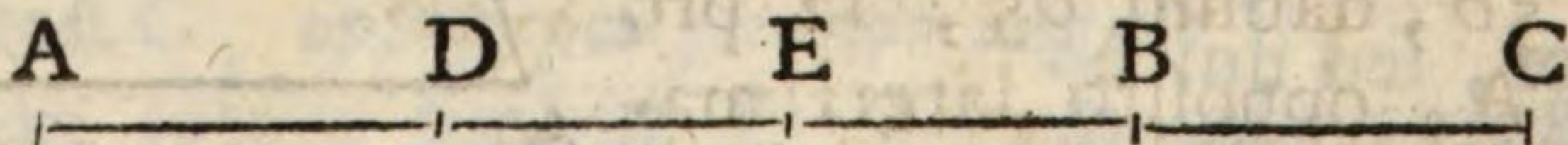
Exemplum. Sint duo numeri 11 & 3, quorum summa 14, semisumma 7, differentia 8, semidifferentia 4. Fiat ergo, $7 - 4 = 3$, quantitas minor;
 $7 + 4 = 11$, quantitas major.

Corollarium.

116. **H**inc datis duarum quantitatum summa 14, & differentia 8, quantitates ipsæ inveniuntur.

Nam, si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem a semisumma subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori; uti antea demonstratum est; & ulterius etiam ita declaratur, & oculis subjicitur.

Sint enim AB, BC duæ quantitates. Capiatur $AD = BC$: fiet DB differentia; harum quantitatum



summa

summa est AC, quæ bisecta in E, dat AE, vel EC semisummam, & DE, vel EB semidifferentiam. Porro est $AB = AE + EB = \text{semisummæ} + \text{semidifferentia}$; & $BC = CE - EB = \text{semisummæ} - \text{semidifferentia}$.

PROPOSITIO X.

PROBLEMA.

117. **D**Atis duobus lateribus, & angulo ab iisdem intercepto, reliquos angulos invenire.

Resolutio. Est triangulum ABC; & latus AC = 469, & BC = 584 in eadem mensura, & angulus C gr. 68: summa laterum AC + BC = 1053; & eorum differentia BC - AC = 115; subducatur deinde angulus C gr. 68, a gradibus 180; residuum 112 erit summa duorum angulorum B & A; & hujus summæ semissis = 56. Fiat ergo ex præscripto n. 89.

Ut summa duorum laterum AC + BC, 1053
ad eorum differentiam 115;

Ita tangens grad. 56, semisseos summæ
duorum angulorum A & B, 148256
ad quartum terminum 16196;

qui exhibet tangentem semisseos differentiarum eorundem angulorum A & B. Hæc in canone trigonometrico

invenietur respondere 9, 12; quibus sublatis a gradibus 56, semissi summæ duorum angulorum incogni-

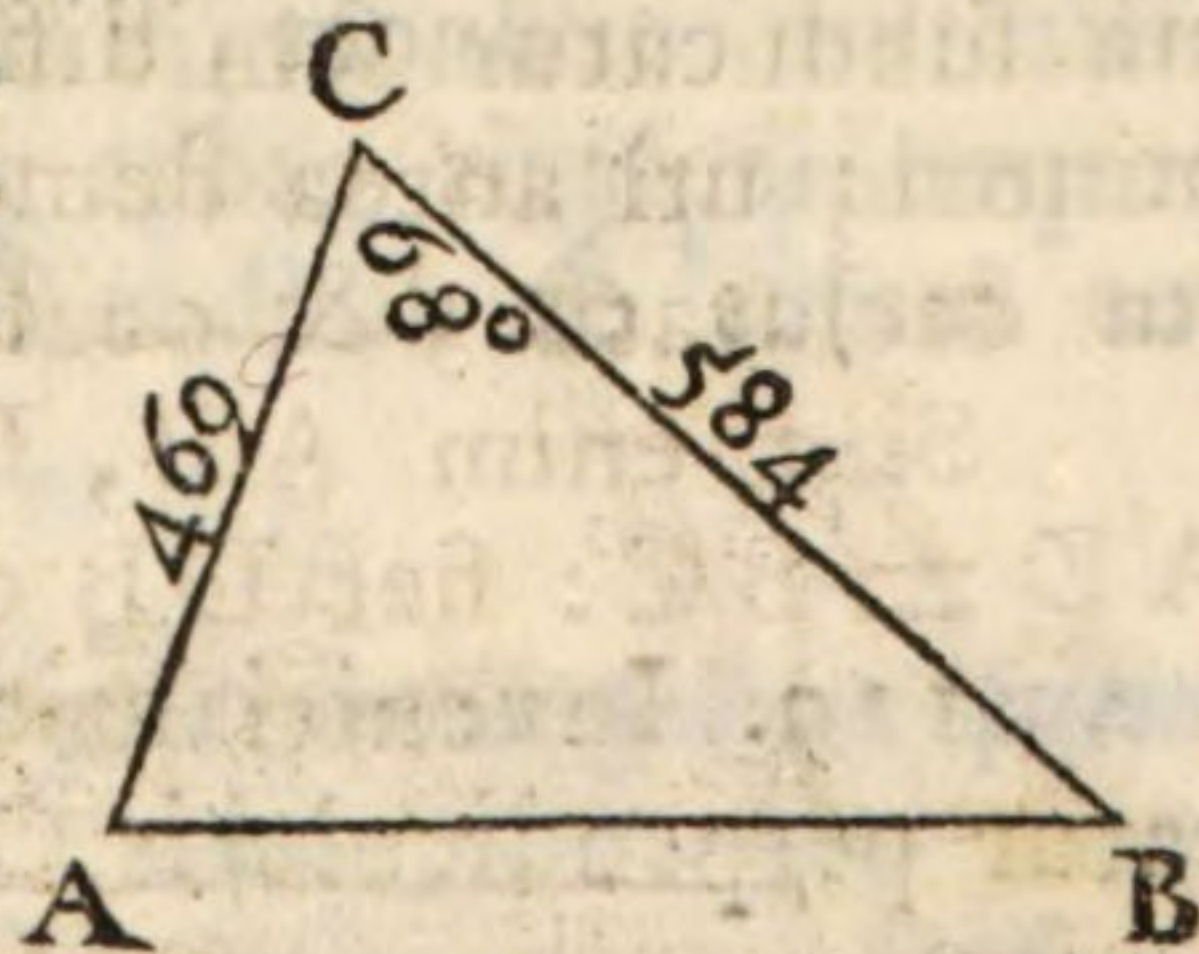
torum, residuum 46, 48 erit,

per Lemma, valor anguli B, oppositi lateri minori AC; iidem-

que gradus 9, 12 additi eidem

semissi 56, dabunt 65, 12 pro

angulo A, opposito lateri majori BC, per idem Lem.

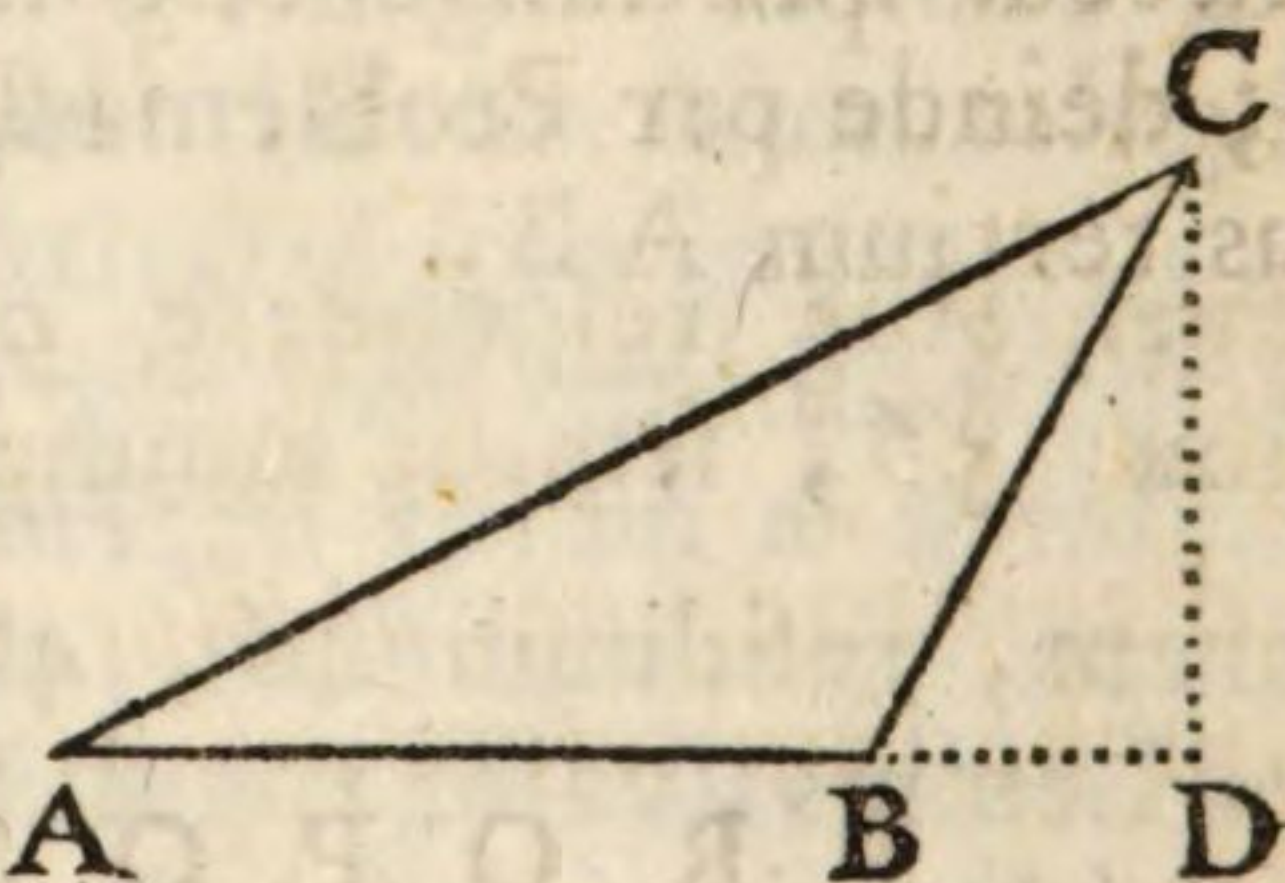
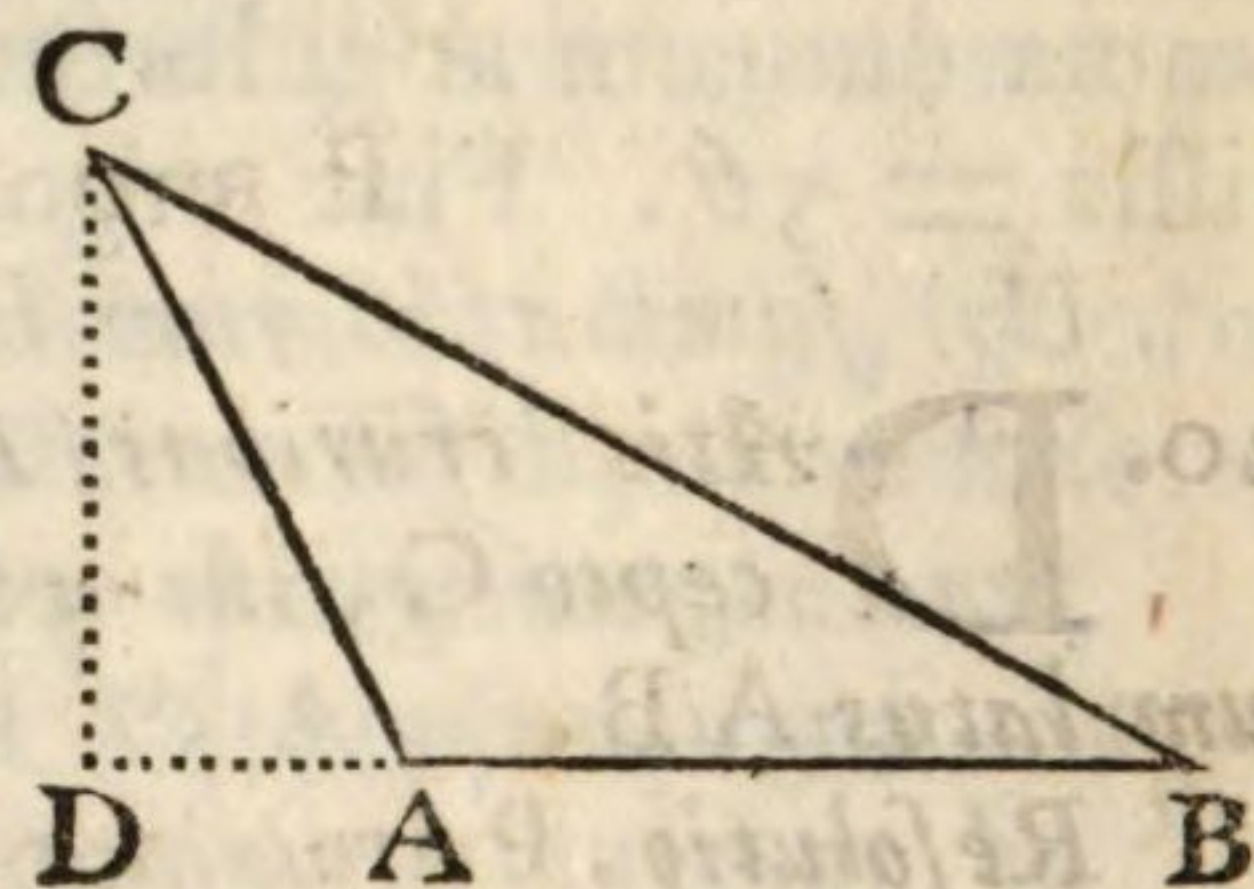
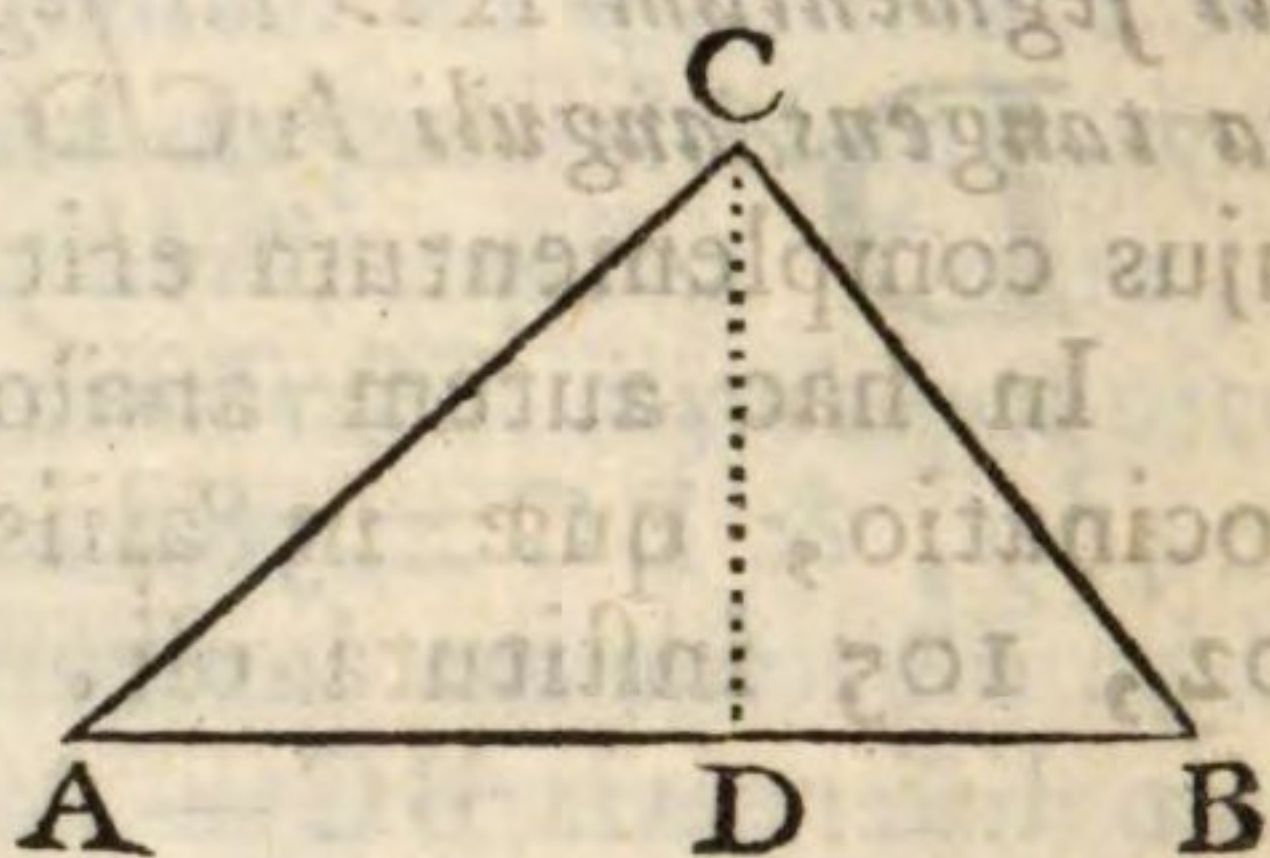


Aliter.

118. Data sint duo latera AB , AC , cum angulo intercepto A . Ex utrolibet angulo ignoto, puta, ex angulo C , demittatur perpendicularis CD in latus oppositum; & habebuntur duo triangula rectangula ADC , BDC .

In primo triangulo rectangulo ADC , ex datis, nimirum, angulo recto D , & angulo A , & hypotenusa AC , elicietur perpendicularis CD (*n.* 101.), & segmentum AD ab angulo A , & perpendiculari CD interceptum; quo dempto ex AB dato per hyp., ut in Fig. 1., vel addendo AD ipsi AB , ut in Fig. 2., vel denique subducendo AB ab invento latere AD , ut in Fig. 3., notum fiet in omni casu segmentum, vel latus alterum BD . Cognitis BD , & perpendiculari CD , invenietur facile (*n.* 104.) angulus B trianguli rectanguli BDC , & consequenter angulus incognitus BCA .

Ad majorem calculi facilitatem conducet, si fiat, ut perpendicularis cadat in latus majus ex duobus datis.

*Aliter.*

119. Inveniri etiam posset angulus B , quin quæ-
ratur perpendicularis CD .

Nam

Nam invento segmento AD , si consideretur perpendicularis CD tanquam radius, segmentum AD evadit tangens anguli ACD , & segmentum BD , tangens anguli BCD . Quia verò tres primi termini huius alterius analogiæ instituendæ, sunt probè cogniti, nimirum, segmentum AD , segmentum BD , & tangens anguli ACD , invenietur tangens anguli BCD , & consequenter angulus ipse, hoc pacto:

*Ut segmentum AD ad segmentum BD ;
Ita tangens anguli ACD ad tangentem anguli BCD ,*
cujus complementum erit angulus quæsitus B .

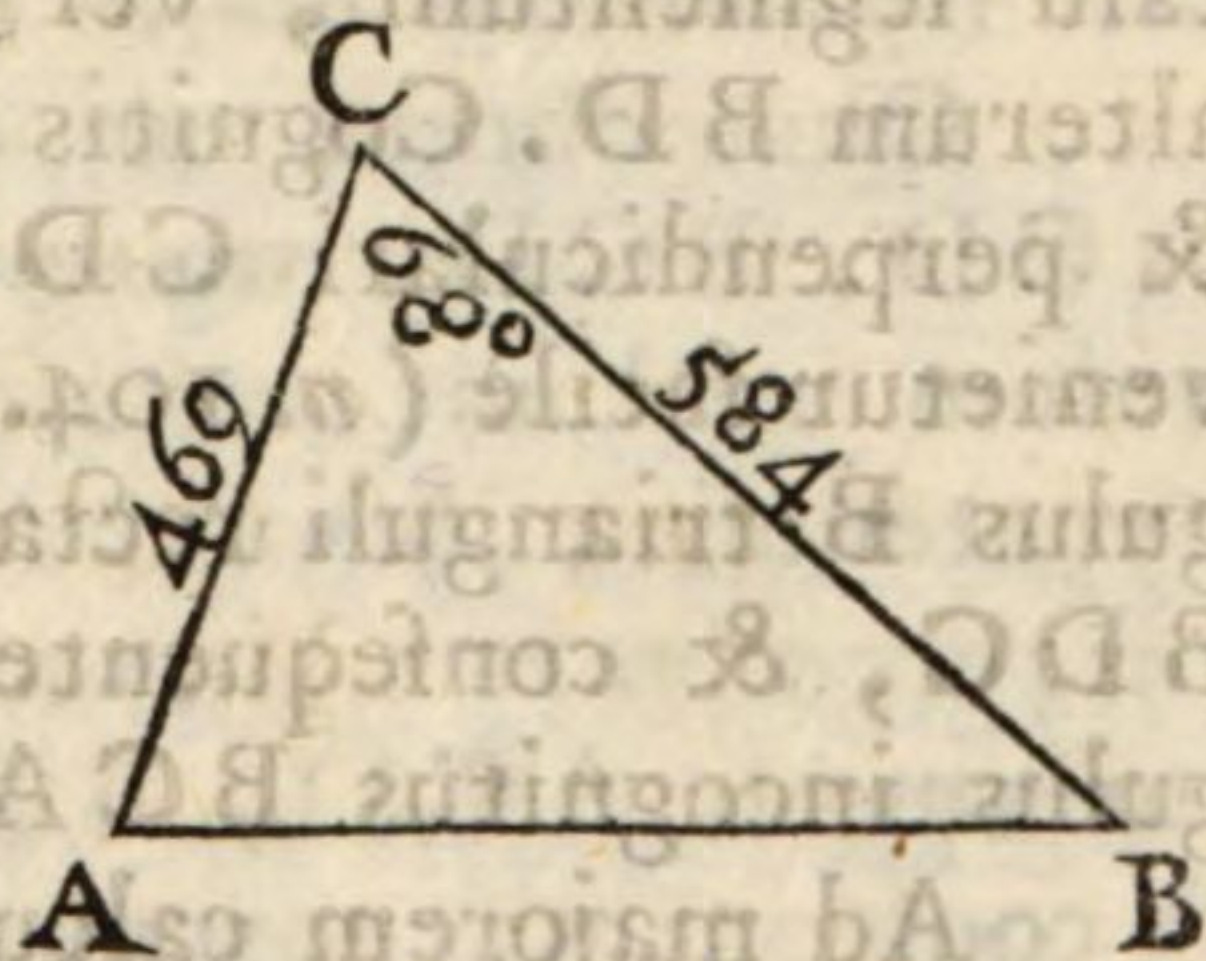
In hac autem analogia est eadem adhibenda ratiocinatio, quæ in aliis analogiis numerorum 101, 102, 105 instituta est.

PROPOSITIO XI.

PROBLEMA.

120. **D**atis cruribus AC , BC , & angulo intercepto C , invenire tertium latus AB .

Resolutio. Primò per Probl. præced. quærantur anguli A & B ; deinde per Problema IX. latus tertium AB .



PROPOSITIO XII.

PROBLEMA.

121. **D**atis tribus lateribus, quærere angulum quemvis.

Reso-

Resolutio. Elto triangulum ABC , cujus latus $AB = 348$ ped., $AC = 236$, & $BC = 314$: Quæritur trium angulorum valor.

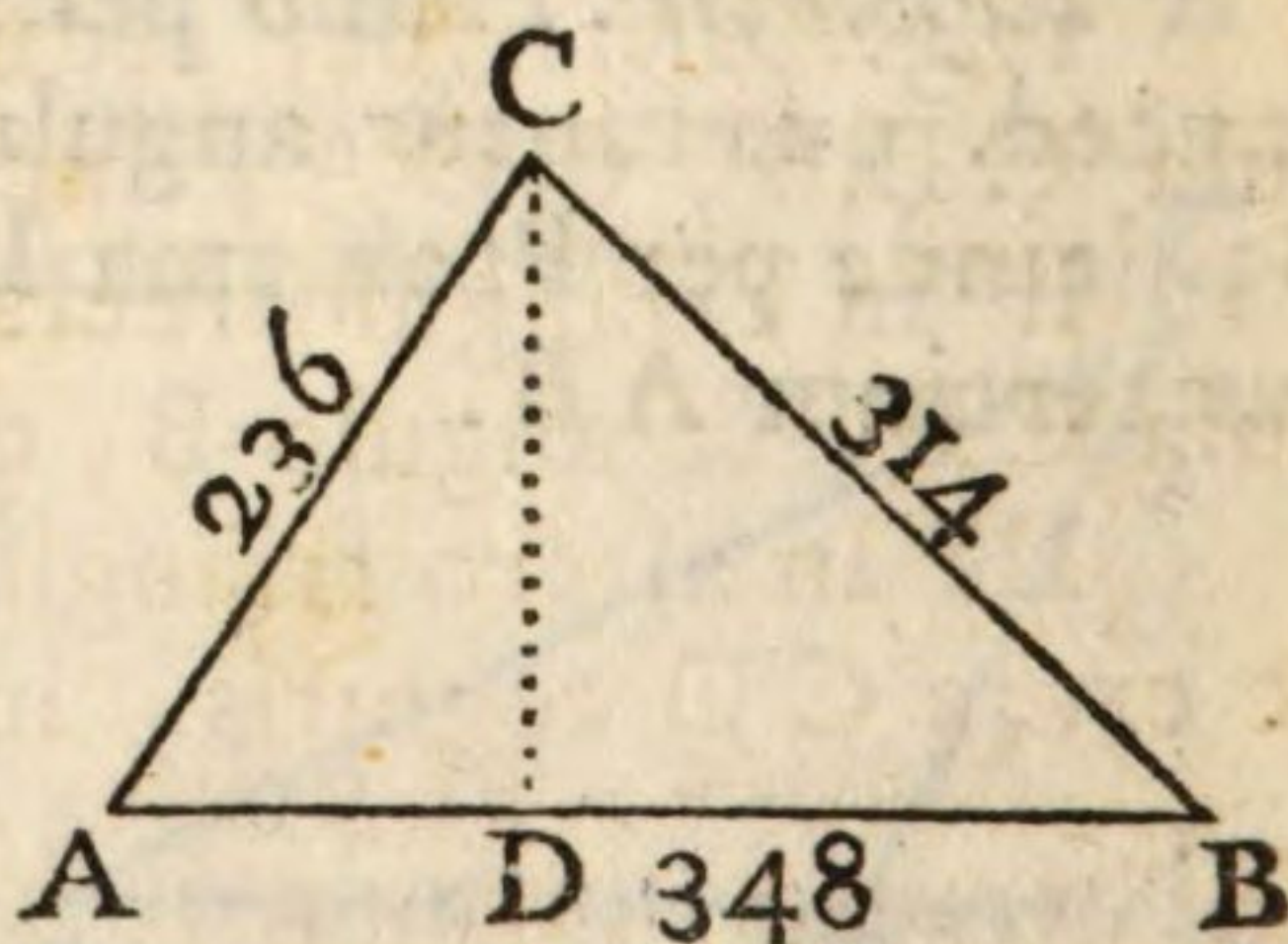
Ab angulo C , lateri majori opposito, demittatur perpendicularis CD ; adde duo minora latera $AC + BC = 550$, ut habeatur eorum summa: subtrahe minus latus AC a medio BC , ut innotescat differentia $AC - BC = 78$; & per analogiam n. 91. fiat:

Ut latus maximum AB	348
ad summam reliquorum $AC + BC$,	550;
Ita horum differentia	78
ad quartum terminum	123.

Hic enim erit differentia segmentorum AD , BD , quæ facta fuerunt a perpendiculari CD . Hæc differentia inventa 123 subducatur a maximo latere AB

348; residui 225 sumatur semissis $112\frac{1}{2}$, quæ erit segmentum minus AD , per Lem.: hæc eadem semissis $112\frac{1}{2}$ addatur quarto termino 123; summa $235\frac{1}{2}$ erit segmentum majus BD .

Quamobrem in quolibet triangulo rectangulo ACD , BCD , præter angulum rectum cognoscitur hypotenusa, & unum latus; ergo (n. 102.) invenientur anguli ACD , BCD , & consequenter eorum complementa A & B .



PROPOSITIO XIII.

PROBLEMA.

122. **D** Atis duobus lateribus CB , CA trianguli non rectanguli, & dato angulo B uni eorum laterum

rum CA opposito, quære angulum A oppositum reliquo dato lateri BC .

Oportet autem angulum quæsitum A esse specie præcognitum; hoc est, constare, num sit acutus, an obtusus, si datus angulus B acutus est.

Resolutio. Fiat:

Ut CA , datum latus, dato angulo B oppositum, ad alterum latus datum CB ;

Ita sinus anguli dati B ad sinum ignoti anguli A , qui alteri lateri dato BC opponitur.

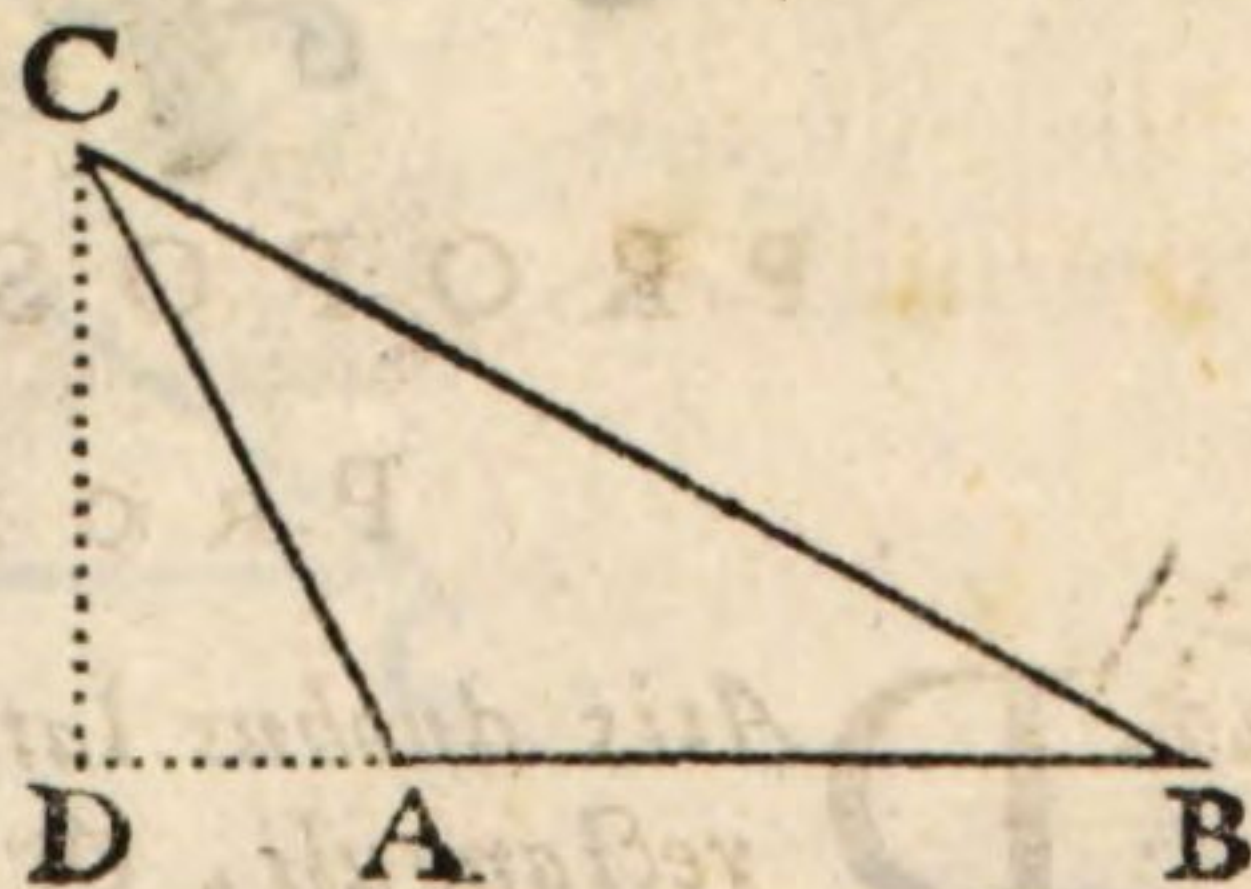
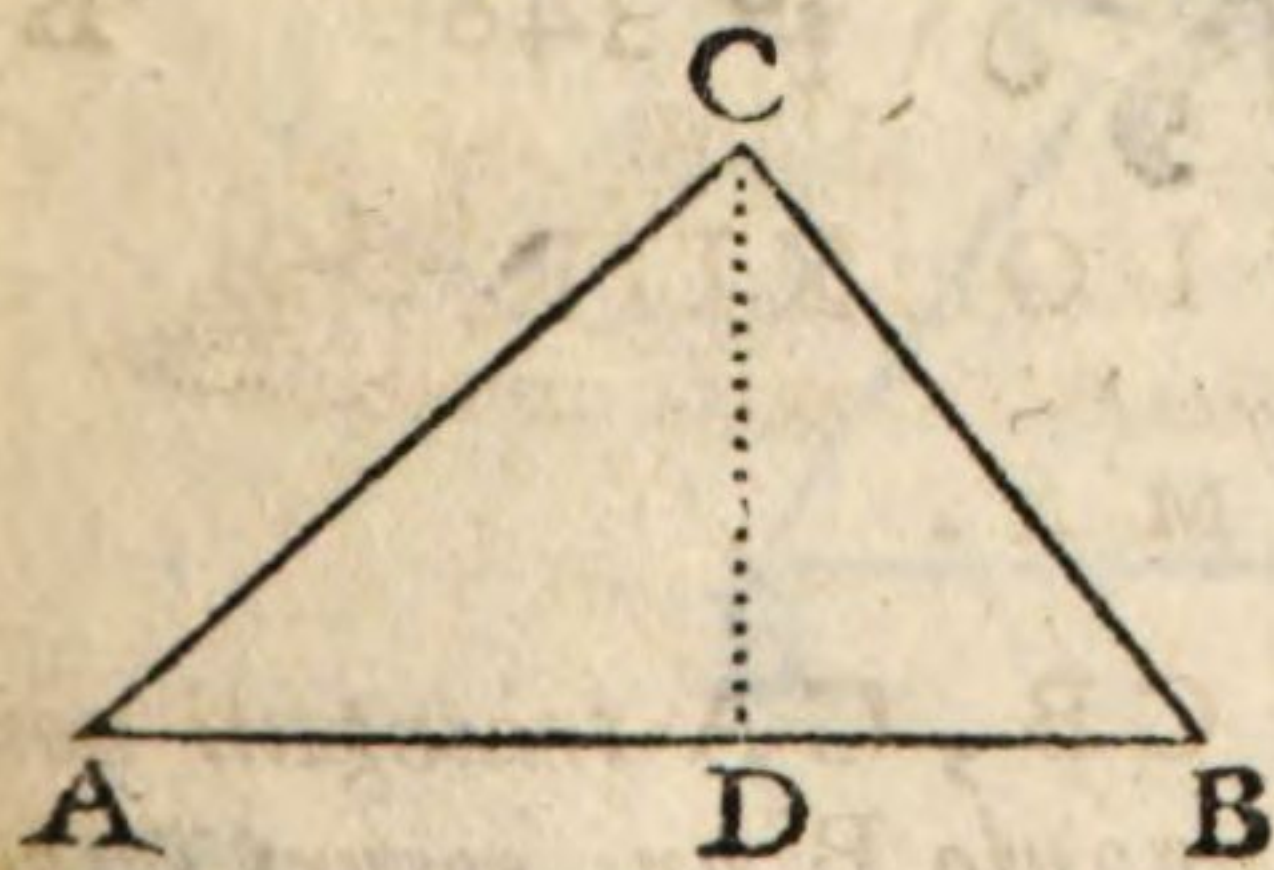
Latera enim BC , CA finibus angulorum A , B ipsis oppositorum sunt proportionalia. Quare, cum tres primi termini sint noti, etiam quartus innotescet, nempe sinus anguli ignoti A ; & per sinum invenietur in tabulis angulus ipse A , si acutus sit. Sin autem angulus quæsitus A sit obtusus, tunc angulus per sinum inventus, subtractus a 180 gradibus relinquet quæsitum A .

Necesse igitur hîc est ad inventionem anguli, ut ejus species aliunde nota sit.

Inventis angulis latus ignotum CA innotescet n. 113. 123. *Aliter* per reductionem ad triangula rectangula CDB , CDA , ducto perpendicularo CD .

I. In triangulo rectangulo CDB ex data hypotenusa CB , & angulo B , quærat latus CD ex n. 101.

II. In altero triangulo CDA ex hypotenusa CA , & crure CD cognitis, inveniat n. 102. angulus A ;



qui

qui vel ipse, vel ejus supplementum erit angulus quaesitus.

Ad inventionem igitur anguli, & lateris necesse est, ut aliunde ejusdem anguli nota sit species.

Scholion.

P. *Clavius in sua analysi triangulorum Prop. 13., verè notat, Nicolaum Copernicum, alioquin diligentissimum, hallucinatum fuisse Lib. 1. Revolutionum, Prop. 6. triangulorum rectilineorum, dum simpliciter proponit sine ulla limitatione: Si duo latera trianguli data sint, & angulus uni eorum oppositus, datus etiam, reliquum latus, & reliquos angulos dari posse. Hoc enim fieri non potest, quando datus angulus est acutus, nisi constet, num angulus alteri laterum datorum oppositus, sit acutus, an obtusus.*

Nolim tamen Tirones sollicitos esse de hoc casu, qui raro admodum in praxi contingit.



SYNOPSIS.

SOLUTIONES TRIGONOMETRICÆ

Trianguli Rectanguli.

I.

*Datis AB, BC cruribus,
Quærentur anguli?*

Fiat, $AB:BC::radius:tang. anguli A,$
cujus complementum est angulus C.

II.

*Datis AB, AC, crure & hypotenuſa,
Quærentur anguli?*

Fiat, $AC:AB::radius:sin. anguli C,$
cujus complementum est angulus A.

III.

*Datis AB & A, crure & angulo,
Quæritur BC crus alterum?*

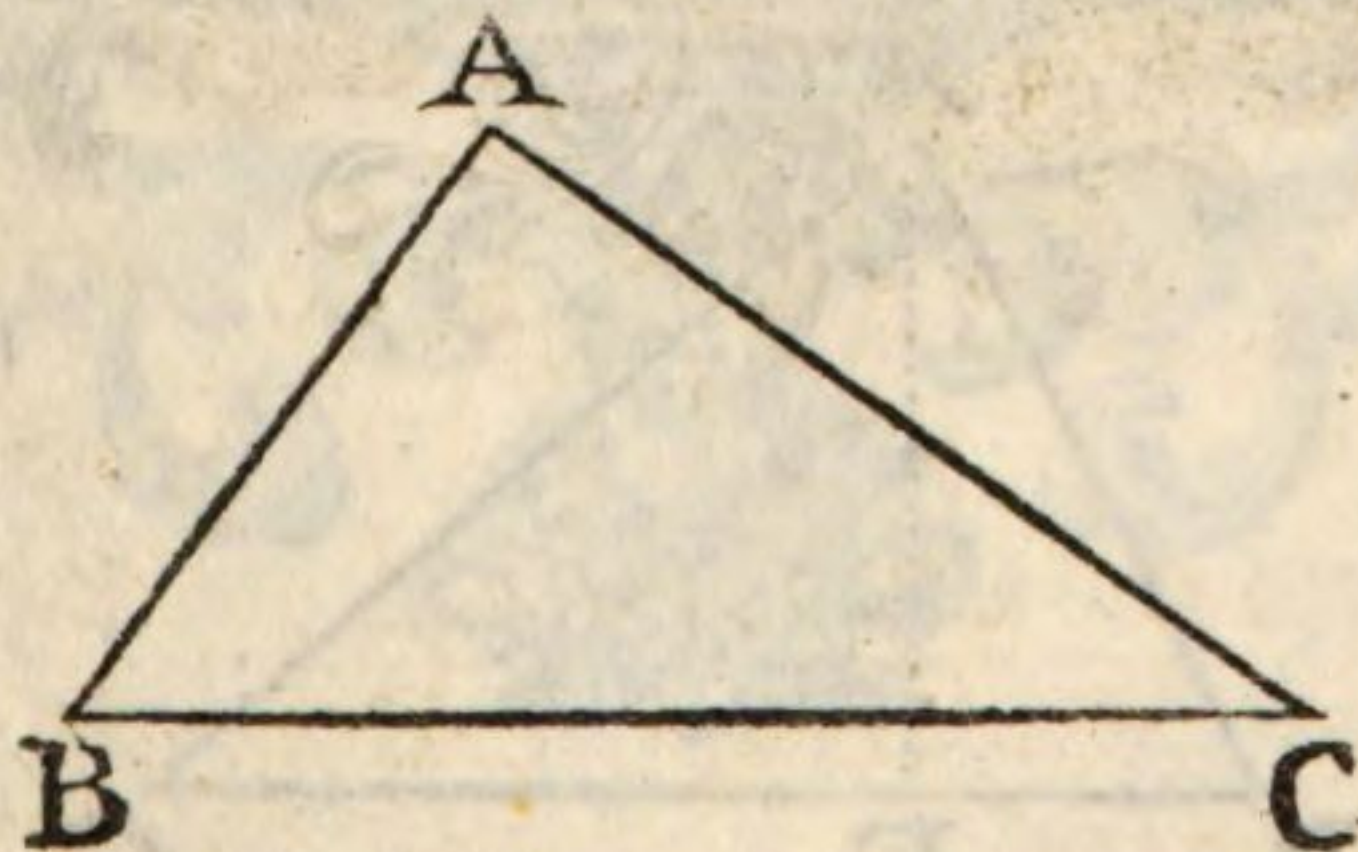
Fiat, $Radius:tang. anguli A::AB:BC.$

IV.

*Datis AB & C, crure & angulo,
Quæritur AC hypotenuſa?*

Fiat, $Sin. anguli C:rad.::AB:AC.$

Reliquæ omnes solutiones trianguli rectanguli ad
hasce quatuor reducuntur.



Trian-

Trianguli Obliquanguli

SOLUTIONES.

I.

*Datis A, B, C & AB, angulis & latere,
Quæruntur BC & AC latera?*

Fiat, *Sinus anguli C : sin. anguli A :: AB : BC;*

Item, *Sinus anguli C : sin. anguli B :: AB : AC.*

Cùm dantur duo anguli, & unum latus, reliqua etiam quæruntur, quia tertius angulus datur.

II.

*Datis A, B, C, omnibus angulis,
Quæruntur AB, AC, BC, omnia latera?*

Fiat, *Sin. anguli C : sin. anguli A :: AB : BC;*

Et *Sin. anguli C : sin. anguli B :: AB : AC.*

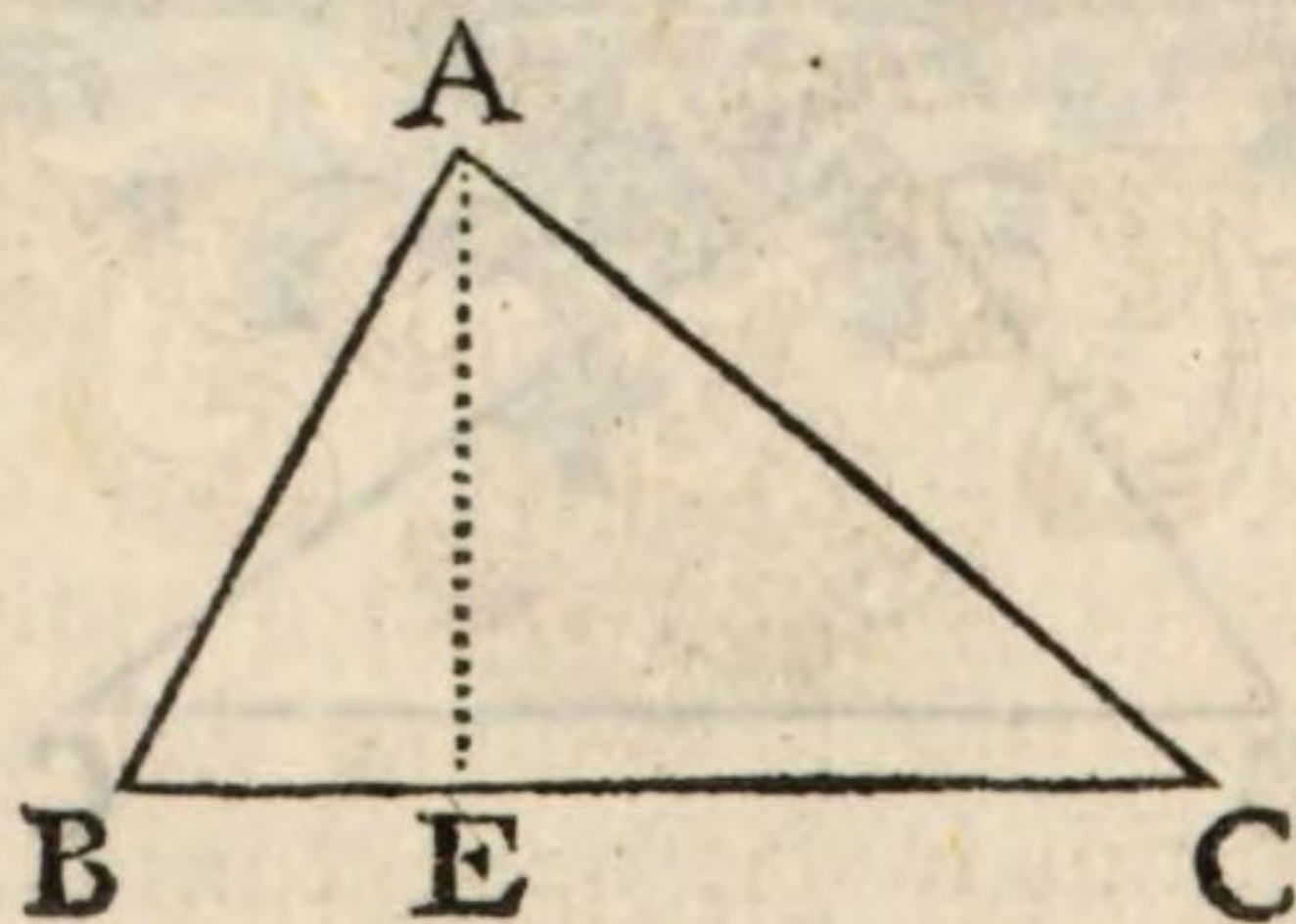
Unde datis angulis invenire licet proportionem laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.

III.

Datis AB, BC & C, duobus lateribus & angulo uni opposito,

Quæruntur A & B anguli?

Fiat, *AB : BC :: sin. anguli C : sin. anguli A,* qui proinde invenietur. Sed quia idem est sinus anguli, & ejus complementi ad duos rectos, præcognoscenda est anguli A species.



IV.

Datis AB, BC & B, lateribus duobus & angulo interjecto,

Quærantur anguli A & C?

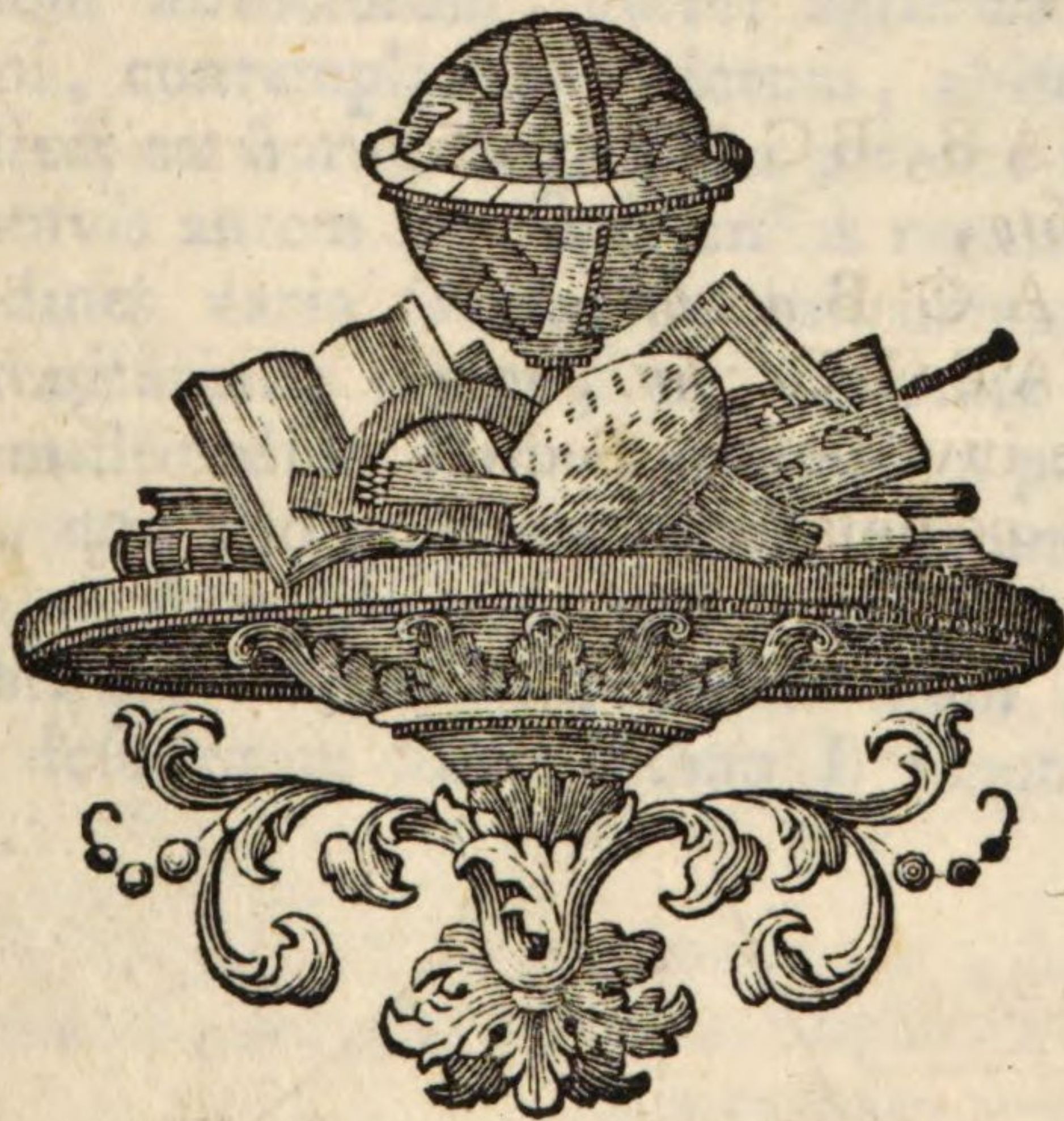
Fiat, $BC + AB : BC - AB :: \text{tang. semisummæ}$
 $\frac{A + C}{2} : \text{tang. semidifferentiæ} \frac{A - C}{2}.$

Unde dabitur differentia angulorum A & C, quorum summa quoque nota est; ac proinde per Lemma n. 115. dabuntur ipsi anguli.

V.

Datis AB, BC, AC, omnibus lateribus,
Quærantur anguli?

Demisso a vertice in basim perpendiculo, quærantur segmenta BE, CE basis; & proinde per analysim utriusque trianguli rectanguli AEB, AEC, dabuntur ipsi anguli.



PRAXIS TRIGONOMETRICA

Altimetriæ, & Longimetriæ.

CUM jamdiu compererim, admodum paucos esse, qui non in Mathematicis exerceantur eo consilio, ut, quæ didicerint, ad aliquem usum trahant; Trigonometriæ partes singulas ita digerere, ac temperare studui, ut, qui fructus ex hujus disciplinæ usu percipi possint ad humanæ vitæ commoda, non inani venditatione, sed re ipsa constaret. Etenim, dum certa ratio traditur, qua camporum longitudes, altitudes montium, vallium depressiones, locorum omnium inæqualitates inter se, & intervalla deprehendere metiendo debeamus; neminem latebit, arbitror, quantum commodi, utilitatisque substructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi syderum, aliisque artibus, & disciplinis ex horum cognitione manare possit.

Quamvis autem ad dimetiendas rerum distantias, & altitudes varia Geometræ instrumenta, sive organa excogitarint; tamen, ne varietate rerum, & praxium multitudine Tirones præpediam potiùs, quàm instruam, non alio utendum censui instrumento, quàm semicirculo, & quadrante, quo nihil simplicius, nihil parabilius. Hujus instrumenti usum in capiendis angulis, descriptum habes Tomo I. Geometriæ, numero 64.

DEFINITIONES.

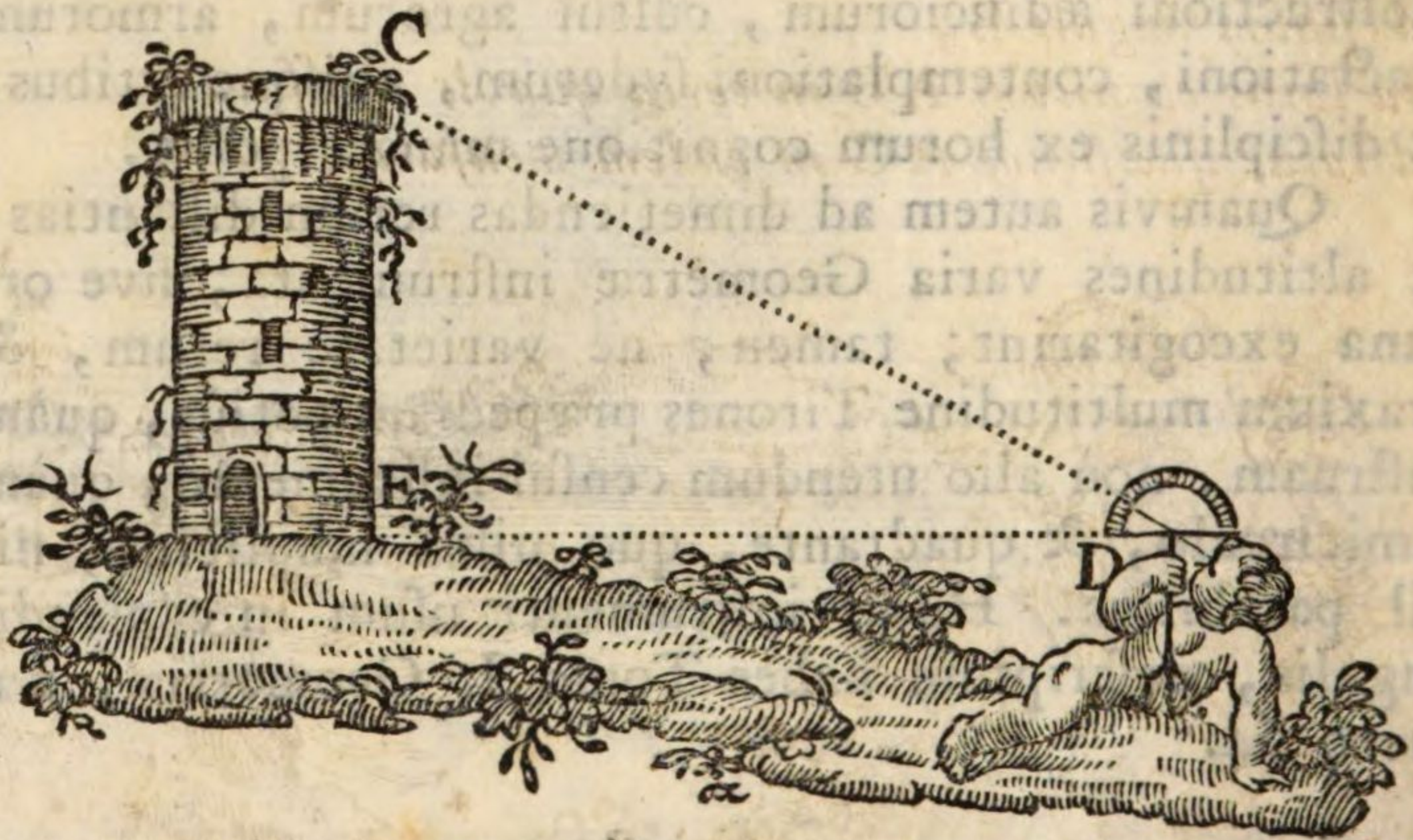
124. **A**ltitudo est linea recta ad horizontem, seu ad terræ superficiem perpendicularis, ac proinde ad terræ centrum directa.

125. *Distantia oculi ab altitudine mensuranda*, est recta DE, ab oculo D ad altitudinem CE perpendicularis.

126. *Distantia oculi ab aliquo puncto C*, est linea recta ab oculi centro D ad punctum C extensa.

127. *Angulus altitudinis* est CDE, quem in oculo D efficit distantia DE cum radio DC a vertice altitudinis ad oculum emisso.

128. *Angulus intervalli duorum locorum* est ille, quem in oculo efficiunt bini radii ab iisdem locis directi.



129. *Altitudo accessibilis* dicitur, cujus distantia mechanicè mensurari potest.

130. *Altitudo inaccessa*, cujus distantia non potest mechanicè mensurari.

PROBLEMA I.

131. **D**istantiam in una dumtaxat extremitate accessibilem metiri.

Resolutio. Esto AC latitudo fluminis, aut lacus, quam metiri oporteat. Qua parte accessibilis est, metire mechanicè longitudinem quamlibet AB, quæ proportionalis esse debet distantiae mensurandæ, ut infra docebitur Observatione V.; defixàque hastà in punctis A & B, ope semicirculi, aut quadrantis, cape angulos BAC, ABC, quibus cognitis, tertius quoque angulus notus erit. Fiat itaque (n. 113.):

Ut sinus anguli C

ad sinum anguli B;

Ita latus cognitum AB in certa quavis mensura,
ad latus quæsitum AC in eadem mensura.



Esto angulus $A = 75^{\circ} 30'$;

angulus $B = 70^{\circ} 20'$;

& consequenter angulus $C = 34^{\circ} 10'$.

Ex tabulis habeo sinum anguli $C \ 34^{\circ} 10' = 5616021$;

sinum anguli $B \ 70^{\circ} 20' = 9416665$;

aliunde longitudo AB ponitur esse hexapedarum 1269;

quamobrem hæc proportio habebitur:

$$5616021 : 9416665 :: 1269 : AC$$

distantiam quæsitam; quæ per regulam trium invenie-

tur esse hexapedarum $2127\frac{4}{5}$.

Corollarium I.

132. **S**I distantia AC , in altera tantum extremitate C inaccessibleis, maximo intervallo recederet, puta, ad tria milliaria, non ita facile Mensor, qua parte extremitas altera accessibilis est, metiri interdum mechanicè posset longitudinem aliquam, quæ sit huic distantie proportionalis, puta, unius milliariis, aut saltem semimilliariis. Usuvenire enim interdum potest,



ut propter soli inæqualitates, aliave impedimenta, mensurari mechanicè non possit longitudo tanta, quanta requiritur. Docent itaque in hoc casu, longitudinem aliam mediocrem instar basis alterius trianguli capiendam, cujus ope per idem Problema in eadem planitie inveniatur longitudo altera triplò, aut quadruplò major; & rursus, si opus sit, per hanc secundam longitudinem eadem constructione inquiretur tertia major, quantum fatis est, ut hæc denique proportionalis evadat distantiae primæ mensurandæ.

Corollarium II.

133. **H**Æc operatio usui esse solet ad Ichnographiam regionum, aut castrorum militarium delineandam, positionemque punctorum principalium determinandam, ad quæ reliquæ partes referantur.

Corollarium III.

134. **I**N arcium præterea oppugnationibus, si cuniculi subterranei ducendi sunt ad propugnaculum, furnulique subtus construendi, ut disjiciatur pars aliqua propugnaculi, eique labes, & ruina inferatur, hæc imprimis operatio ab Architecto militari erit sedulò adhibenda. Nam distantia loci, ubi effoditur cuniculus, ad propugnaculum, ad quod dirigitur, accurate capienda est, ut cuniculus in tantam longitudinem perducatur, quantà opus est ad disjiciendum propugnaculum.

PROBLEMA II.

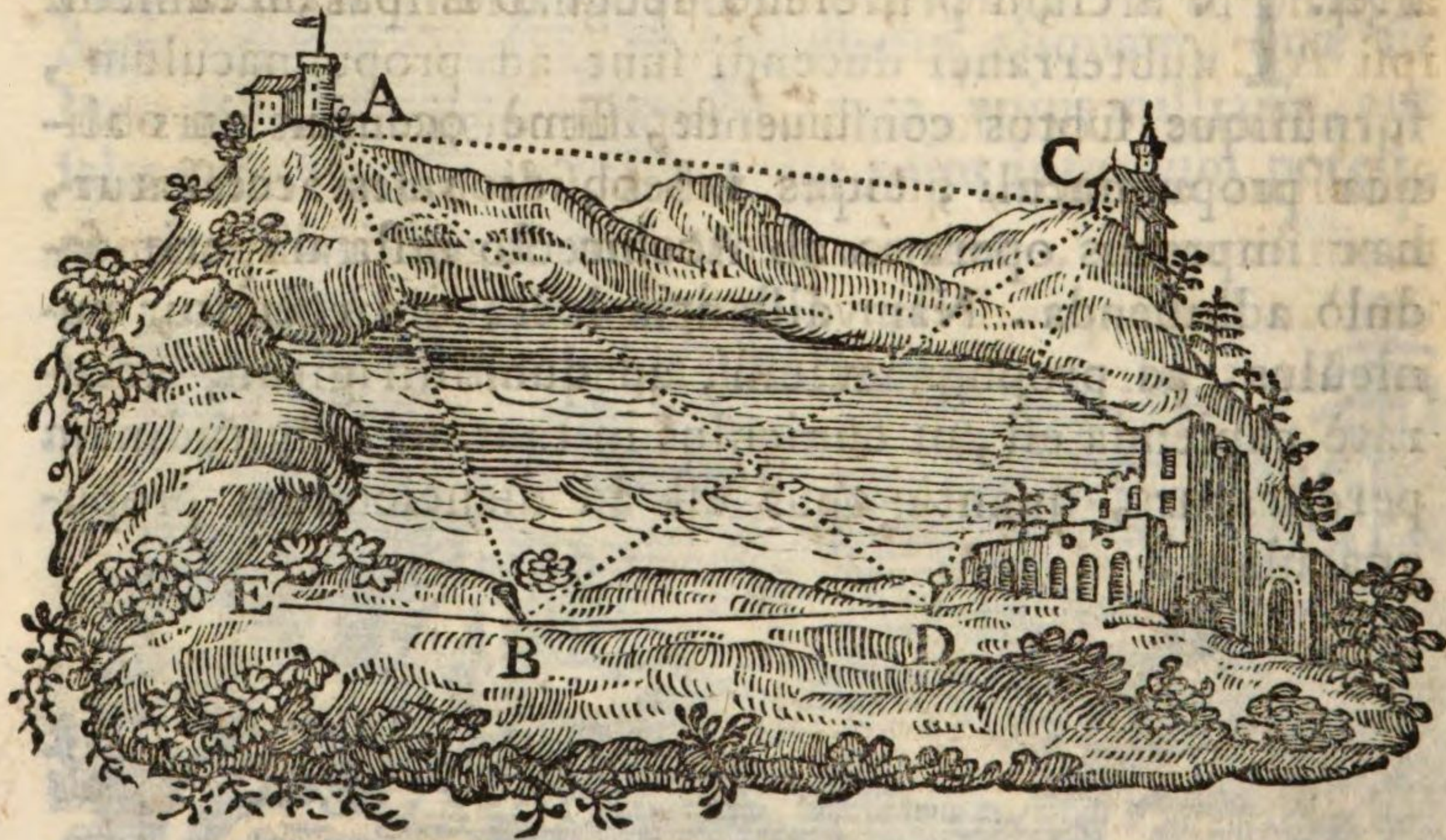
135. **I**nvenire distantiam inter duo objecta A & C, ambo inaccessibleia, quæ tamen conspici possint.

Resolutio. In planitie circumposita mensuranda est longitudo quæpiam BD, a cujus extremitatibus conspici possint duo objecta A & C; atque extremitates hujus lineæ BD signandæ erunt hastis defixis in B & D.

Eligatur prima statio in B; ac separatim capienda erit quantitas angulorum ABD, ABC, CBD: dixi *separatim*; nam, si quatuor puncta A, B, C, D non essent in eodem plano, angulus ABD minor foret summâ duorum angulorum ABC, CBD, ex quibus videtur componi.

Secunda statio fiat in D; ac separatim mensurentur duo anguli ADB, CDB.

His captis mensuris, duo habebuntur triangula BAD, BCD; & in horum quolibet cognoscentur duo anguli, & unum latus.



Itaque I. Ope trianguli ABD , cujus unum latus BD cognitum est, & duo anguli ABD , ADB noti pariter sunt, invenietur latus AB (*n.* 113.).

II. Ope trianguli BCD , in quo, præter latus BD , noti sunt duo anguli CBD , CDB , invenietur latus CB (*n.* 113.).

III. Denique ope trianguli ABC , cujus duo latera AB , BC jam innotuerunt, & angulus ABC pariter notus est, invenientur (*n.* 117.) duo anguli BAC , BCA , & latus AC ; qua postrema operatione resolvitur Problema.

Corollarium.

136. **H**Æc resolutio viam aperit, qua per datum punctum B duci possit recta BE parallela rectæ AC inaccessiblei.

Nam, invento, ut prius, angulo CAB trianguli ABC , duci poterit per datum punctum B recta BE , quæ cum recta AB efficiat angulum ABE æqualem alterno BAC ; ac proinde recta BE parallela erit ipsi AC .

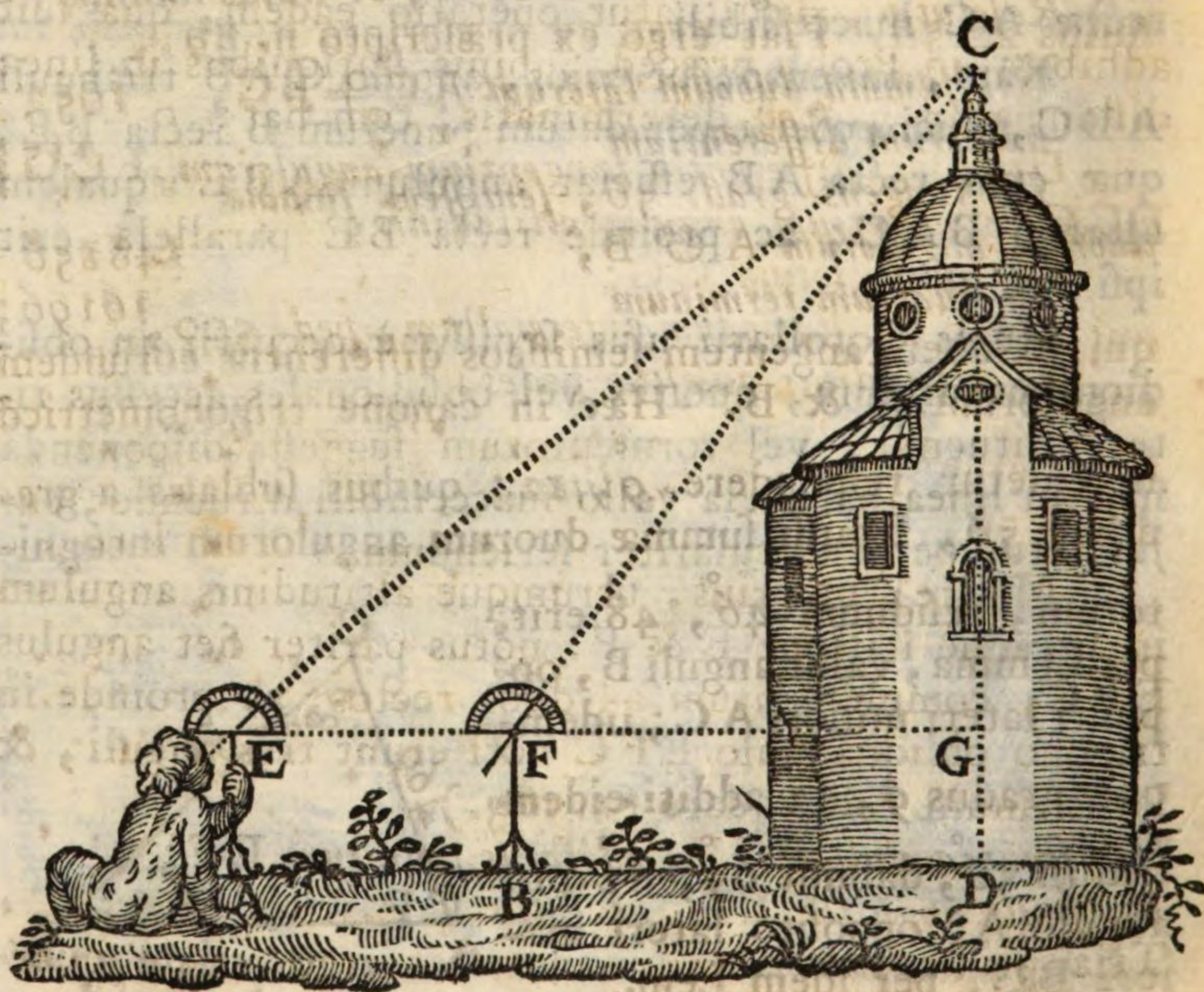
Hujus Corollarii usus sæpissimè occurrit in obsidionibus arcium, quoties vel obsidionales accessus rite instituendi, vel tormentorum suggesta disponenda sunt in linea parallela vallo inaccessiblei diruendo, cujus latus perpendiculariter feriendum.

PROBLEMA III.

137. **D**istantiam inaccessam montis, vel turris per
duas stationes metiri.

Resolutio. Turris, seu tholi templi maximi altitudo sit GC ; distantia EG . In ipsa linea distantiae eligantur duæ stationes in E & F , quarum intervallum mechanicè mensuretur, puta, pedum 500. Ad hoc præstandum requiritur planities ampla, & patens, ut accedere ad rem distantem, aut recedere ab ea tanto intervallo possis, quanto opus est. Eò autem certior erit dimensio, quò intervallum fuerit majus, ut infra exponam.

Semicirculus ad metiendos angulos altitudinis appetur in utraque statione, ut in Fig.; & inveniantur



ALTIMETRIÆ, ET LONGIMETRIÆ. 105
 altitudinum anguli CFG , CEG , quibus subtractis
 a 90 gradibus, noti fiunt anguli complentes FCG ,
 ECG . Posito ergo sinu toto CG , erunt angulorum
 FCG , ECG tangentes GF , GE ; ac proinde EF ,
 intervallum stationum, est tangentium differentia.
 Fiat ergo:

*Ut EF , differentia tangentium angulorum FCG ,
 ECG complentium altitudinis angulos,
 ad majorem tangentem EG ;
 Ita EF , stationum intervallum, pedum 500 ,
 ad distantiae EG pedes quæsitos.*

PROBLEMA IV.

138. **A**ltitudinem inaccessam montis, vel turris me-
 tiri.

Resolutio. Instituatur operatio eadem, quæ fuit
 adhibita in Probl. præced., binis stationibus in linea
 distantiae in E & F determinatis; tum fiat:

*Ut EF , differentia tangentium angulorum FCG ,
 ECG complentium angulos altitudinis,
 ad sinum totum CG ;
 Ita EF , stationum intervallum, ped. 500 ,
 ad altitudinis quæsitæ pedes.*

Aliter.

Metire, ut prius, utrumque altitudinis angulum
 in utraque statione E & F : notus pariter fiet angulus
 EFC , complementum ad duos rectos; ac proinde in
 trigono obliquangulo EFC noti erunt tres anguli, &
 latus unum EF ; quare (*n.* 113.),

Ut sinus anguli ECF , ad latus cognitum EF ;

Ita sinus anguli CEF , ad latus CF .

Tria prima sunt nota; innotescet ergo etiam quar-
 tum,

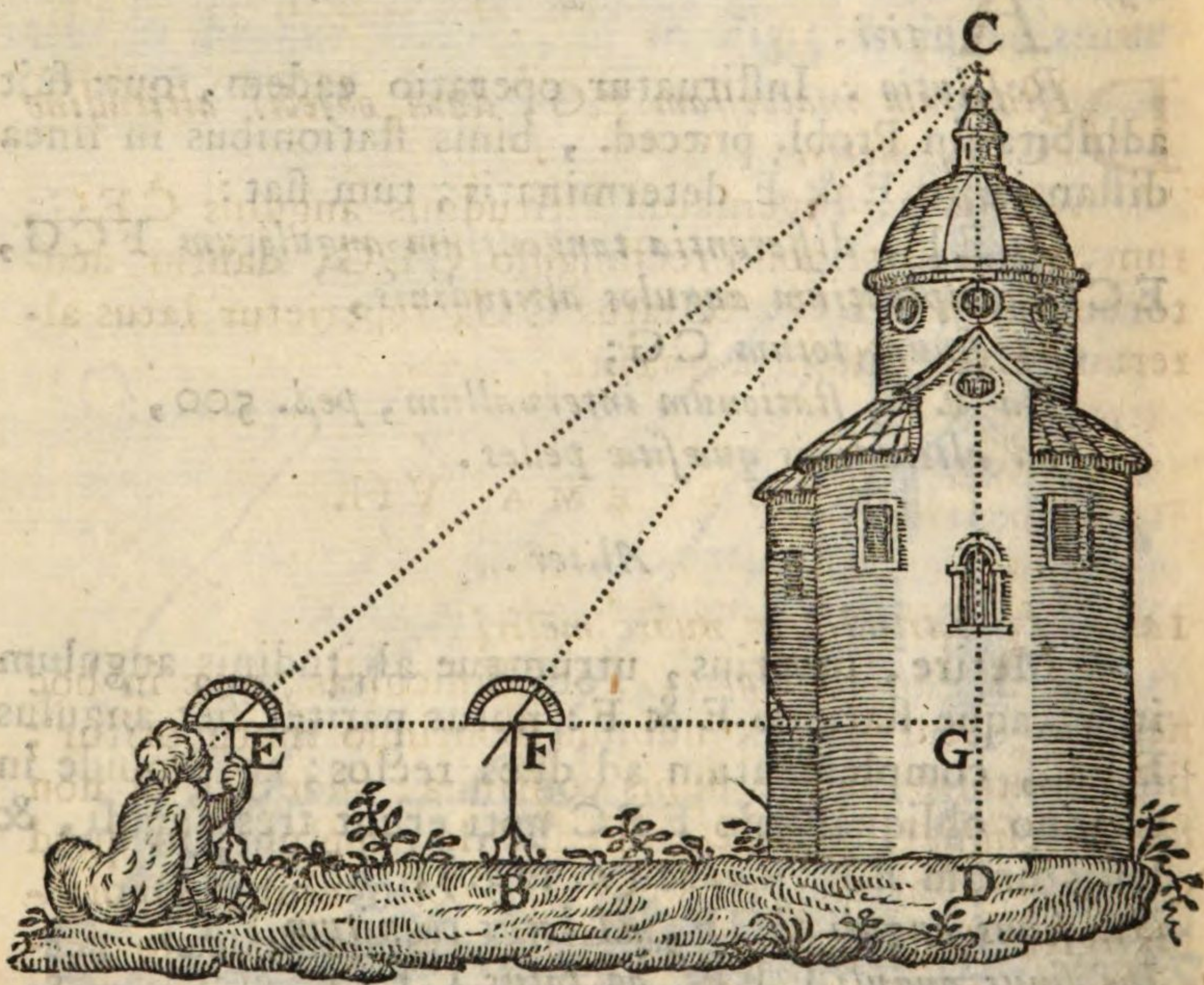
tum, nempe latus FC , in eadem mensura, in qua notum erat EF , stationum intervallum. Invento latere FC , instituatur hæc altera analogia in trigono rectangulo GFC :

*Ut sinus totus
ad latus FC ;*

*Ita sinus anguli CFG
ad CG altitudinem quæsitam.*

Scholion.

Inventæ altitudini CG interdum adjicienda erit Instrumenti altitudo $AE = DG$; ita ut summa DC sit altitudo integra quæsitæ.



PRO-

PROBLEMA V.

139. *Altitudinem accessibilem metiri.*

A *Resolutio.* Elige stationem in E, cujus distantiam EG ab objecto mensurando CG metiri commodè possis. Sit autem ea distantia mediocris, juxta regulam, quam infra determinabimus. Instrumento deinde investigetur angulus CEG, cum quo, & latere EG jam noto, innotescet latus alterum CG, altitudo quæsitæ.

PROBLEMA VI.

D *Istantiam inaccessam EG, data objecti altitudine CG, metiri.*

Resolutio. Inveniatur altitudinis angulus CEG; tum, quia in trigono rectangulo CEG, dantur acutorum unus CEG, & latus CG, reperietur latus alterum EG, distantia quæsitæ.

PROBLEMA VII.

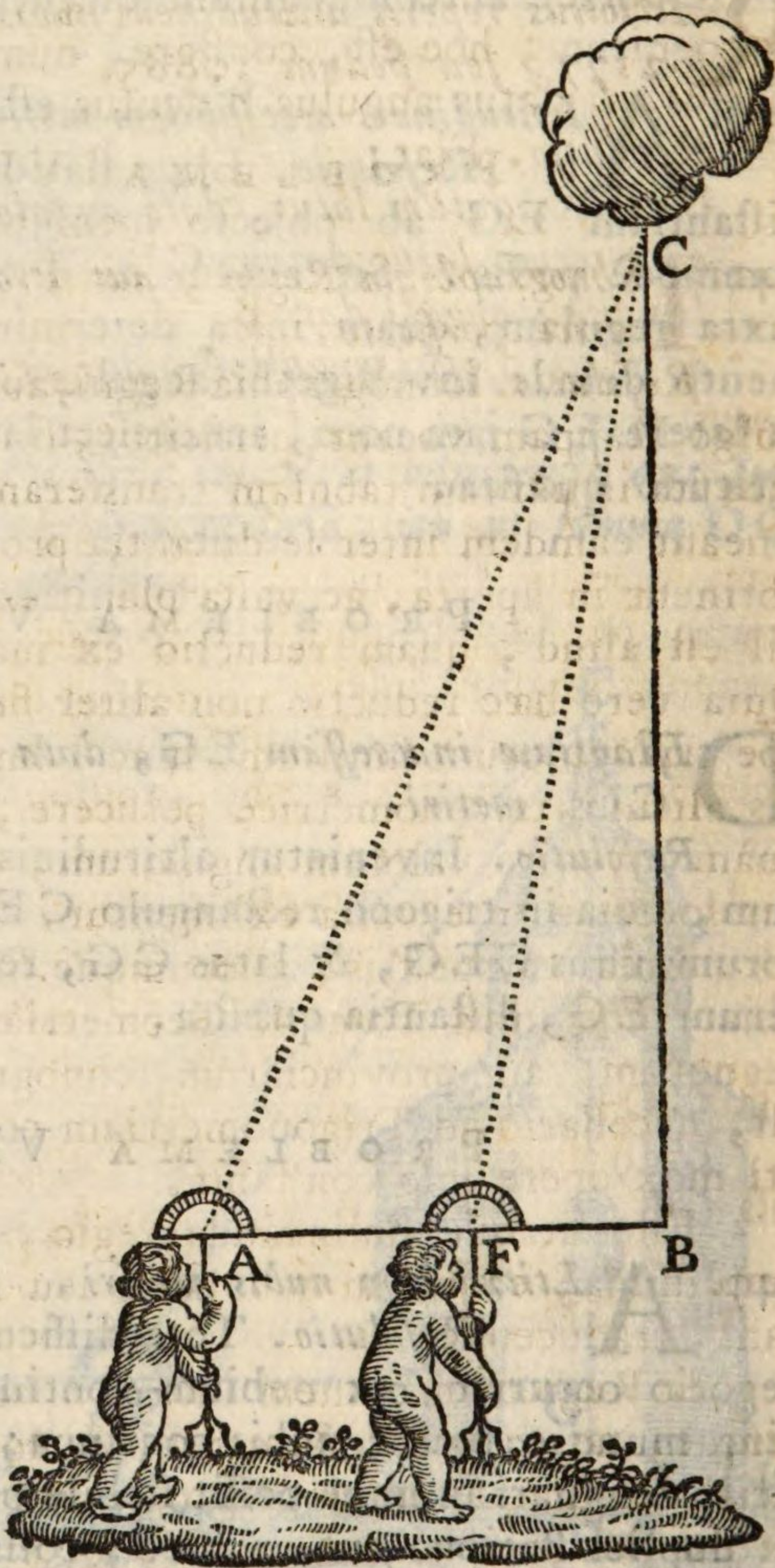
140. *Altitudinem nubis metiri.*

A *Resolutio.* Tota difficultas, quæ in hoc negotio occurrit, ex nubium continuo motu oritur; hinc mutatio figuræ nubis continua; unde fit, ut non facile designari in nube possit stabile punctum, in quod ex duplici statione, ut opus est, collimetur. Oportebit igitur nubem seligere, quales tranquillo cælo cernuntur, quæ nimirum non moveatur sensibilibiter, & quæ marginem aliquem habeat notabilem, cujus extre-

mitas,

mitas, puta, C , dignosci possit, ut in eam eodem tempore duo Observatores, distantes ab invicem uno saltem milliari, signo dato, colliment ex diversis stationibus, angulosque factos observent.

Itaque punctum in nube collimationibus destinatum, esto C : altitudo quaesita nubis sit CB : linea distantiae AB ; in qua designentur binæ stationes in A & F , distantes justo intervallo, quod vix esse minus poterit aliquot pedum millibus. Noti fiant anguli CAB , CFB , ex quibus, & spatio mechanice noto, per Probl. IV. reperietur altitudo nubis quaesita CB .



Scholion.

R ICCIOLIUS reperit altitudinem nubis candidæ passuum 2177, seu pedum 10885.

PROBLEMA VIII.

141. **I**chnographiam Regni, aut Provinciæ trigonometricè perficere.

Resolutio. Ichnographia Regni, aut Provinciæ, quam vulgò Mappam vocant, perficitur, si insigniora ejusdem loca ita in parvam tabulam transferantur, ut in ea retineant eandem inter se distantiam proportionem, quam obtinent in aperta, ac vasta planitie; quod reipsa nihil est aliud, quàm reductio ex magno in parvum. Quia verò hæc reductio non aliter fieri potest, quàm ope triangulorum similium, hinc Ichnographiam regionis alicujus trigonometricè perficere, nihil est aliud, quàm invenire valorem angulorum, & laterum, quæ per locorum intervalla exhibentur.

Areæ campestris, aliorumque similium Ichnographiam docuimus Tom. I. Geometriæ n. 467. At ubi regnorum, aut provinciarum Ichnographia perficienda est, necessariò ad Trigonometriam confugiendum erit; uti mox opere ipso constabit.

Esto itaque delineanda regio, quâ latè patet, amplissima, eaque in tabulam, seu mappam, ut vocant, traducenda.

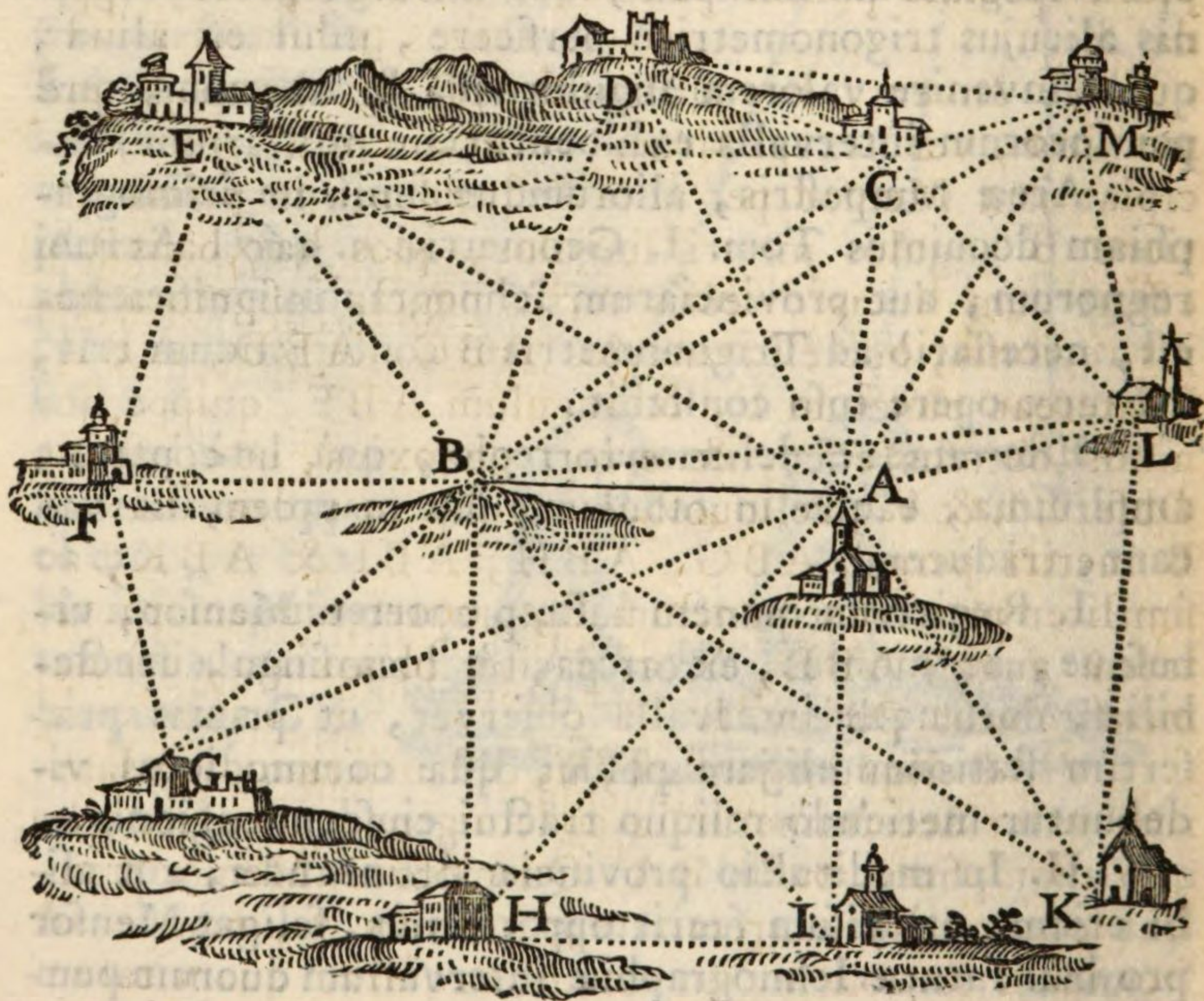
I. Regionem omnem lustret oportet Mensor, urbesque, ac montes, & arces, & loca singula spectabilia, eorumque intervalla observet, ut primas præfertim stationes eligere possit, quæ commodiores videbuntur metiendo reliquo tractui ejusdem regionis.

II. In meditullio provinciæ delineandæ, aut alibi etiam, uti visum fuerit opportuniùs, seligat Mensor pro basi futuræ Ichnographiæ intervallum duorum punctorum

110 PRAXIS TRIGONOMETRICA

Etorum A & B, quod sensibilem habeat proportionem distantis, quæ mensurandæ sunt, & in mappam referendæ; atque in iisdem punctis A & B primas stationes determinet. Intervallum A B, quod majus fuerit assumptum, eò tutior erit operatio, ut palam faciam Observ. II.; nimirum, si distantia pleræque aliorum locorum mensurandæ, proximè accedant ad duo, aut quatuor milliaria, longitudo A B eligatur vel semimilliaris, vel unius milliaris, quantum satis est, ut proportio sensibilis retineatur, quoad fieri poterit, cum reliquis distantis.

III. Quia verò longitudo assumpta A B, mechanice vix posset accurate mensurari, præsertim propter inæqualitates terræ, collesque assurgentes; hac de causa non aliter fiet nota, quàm calculo trigonometrico per Probl. II. n. 135.; nimirum, in eadem planitie distantia



altera

ALTIMETRIÆ, ET LONGIMETRIÆ. III

altera multò minor, instar basis, quærenda erit, quam mechanicè metiri facillè possit Geometra, & per hanc, Trigonometriæ præsidio, assequatur mensuram alterius basis incognitæ AB multò majoris, quæ usui esse debet immediatè ad determinandam positionem punctorum principalium mappæ describendæ.

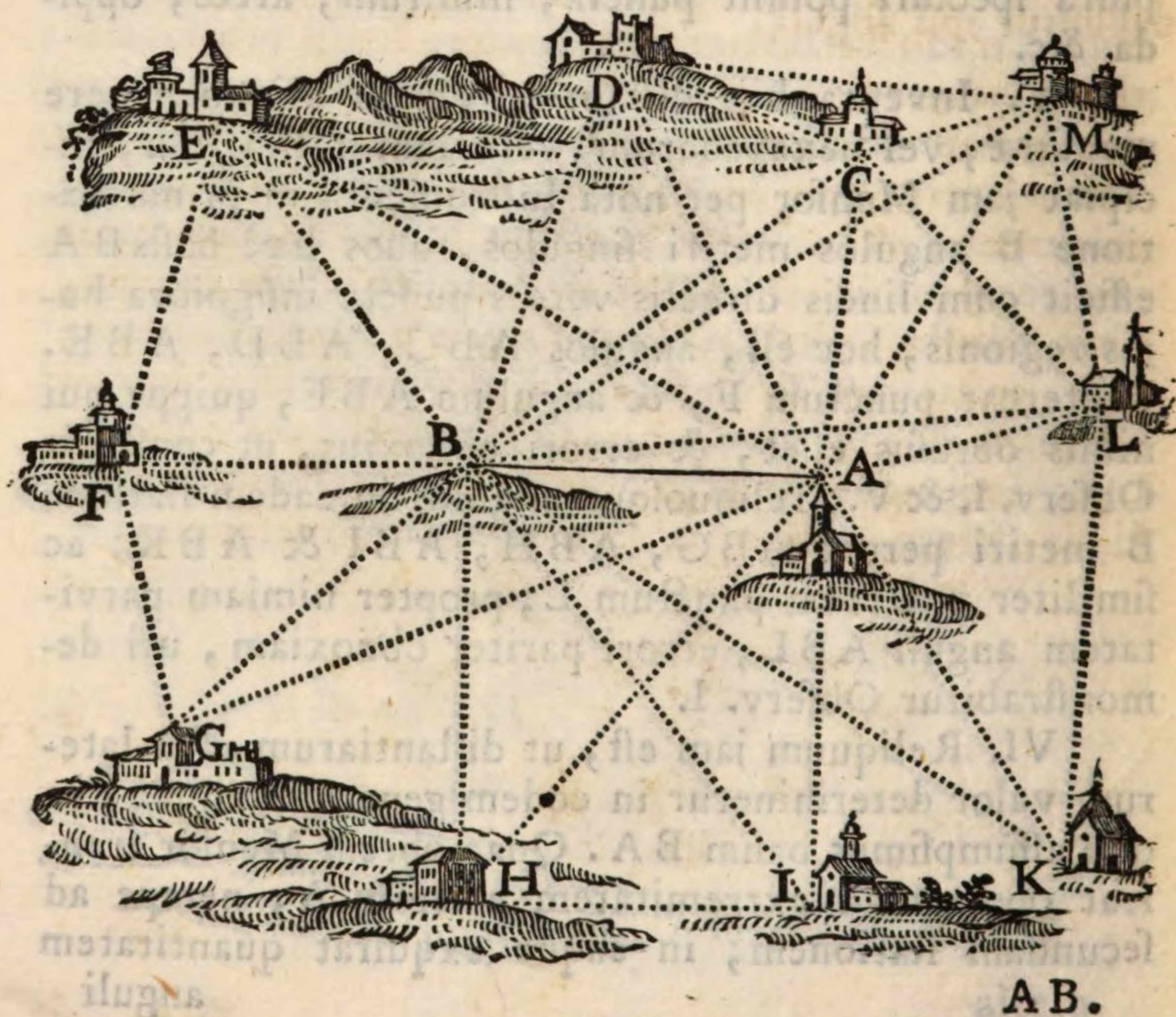
IV. Est autem duplex cautio ab accurato Menso-
re adhibenda in delectu hujus intervalli, seu basis AB .
Prima est, ut longitudinem ejusdem diligentissimè exploret; eamque semel iterumque inquireat per alias minores bases, quas seligat modò propius, modò longius, modò ad latus primæ AB , donec in hac observationum varietate constans longitudo prodeat primæ basis AB , quæ fundamentum esse debet reliquarum operationum. Altera cautio est, ut in extremitatibus A & B stationes ita figi possint a Geometra, ut ab iisdem plura spectari possint puncta, nimirum, arces, oppida &c.

V. Inventa hac distantia AB in aliquo genere mensuræ, vel hexapedarum, vel etiam milliarium, incipiat jam Menfor per nota Instrumenta in prima statione B angulos metiri singulos, quos hæc basis BA efficit cum lineis directis versùs puncta insigniora hujus regionis, hoc est, angulos ABC , ABD , ABE . Prætereant punctum F , & angulum ABF , quippe qui nimis obtusus esset, & errori obnoxius, ut constabit Observ. I. & V.; reliquosque angulos in eadem statione B metiri pergat ABG , ABH , ABI & ABK ; ac similiter prætereant punctum L , propter nimiam parvitatem anguli ABL , errori pariter obnoxiam, uti demonstrabitur Observ. I.

VI. Reliquum jam est, ut distantiarum, seu laterum valor determinetur in eodem genere mensuræ, in quo assumpsimus basim BA . Quamobrem Menfor transeat oportet ad extremitatem alteram A , nempe ad secundam stationem; in eaque exquirat quantitatem
anguli

anguli BAE , quo dato, dabitur quoque positio puncti E . Nam in triangulo ABE , datis & basi AB , & valore angulorum EAB , ABE , basi adjacentium, invenientur latera, seu distantiae AE , BE , per Probl. I. n. 131. Similiter in eadem statione A capiantur reliqui anguli BAD , BAC , BAG , BAH , BAI & BAK . Perspicuum est autem, in omnibus hisce triangulis dari basim AB , seu latus commune, angulosque eidem lateri adjacentes; quare per idem Probl. inveniatur longitudo laterum BD , AD , BC , AC &c.; & punctorum E , D , C &c. positio determinabitur.

VII. Cùm autem omissa fuerint duo puncta F & L , propter nimiam parvitatem, vel excessum anguli in statione B & A , præstat jam, ut doceam, qua methodo determinari possit horum positio, & valor distantiae, quin confugiendum sit ad basim communem



A B. Itaque, ut inveniatur punctum F, eligo jam notam distantiam BE, vel BG, vel quamlibet aliam, quæ magis expediat; eamque assumo instar basis. In rem præsentem seligo basim BE; & in duabus stationibus B & E capio angulos EBF & BEF; ac per analysim hujus trianguli, ut prius, determinabitur valor duorum laterum BF, EF, ac positio puncti F. Pariter sumpta basi AC, invenietur puncti L, & puncti M positio, si forte aliqua de causa fuerit omissa in primis duabus stationibus.

VIII. Inventus valor omnium laterum in singulis triangulis, facile jam transferri poterit in mappam geographicam, si ope scalæ geometricæ, ut jam docuimus Tom. I. Geom. n. 436., detur cuilibet lateri debitus valor in scalæ particulis, & angulorum quantitas exactè observetur.

IX. Posteaquam positiones horum punctorum accurate traductæ fuerint in mappam, simili prorsus methodo progrediendum erit ad alia puncta, quæ e primis duabus stationibus spectari non potuerunt. Reliquæ autem operationes multò erunt faciliores; nam ubique occurrent, & usui esse poterunt bases, quarum valor jam cognitus sit. Finge enim delineanda esse objecta, ultra puncta C & D: assumi poterit distantia jam nota CD, instar basis. Similiter ex alia parte eligi poterit tanquam basis, vel longitudo nota IH, vel distantia LK; eodemque artificio operaberis in reliquis positionibus determinandis, & in mappam transferendis.

OBSERVATIONES

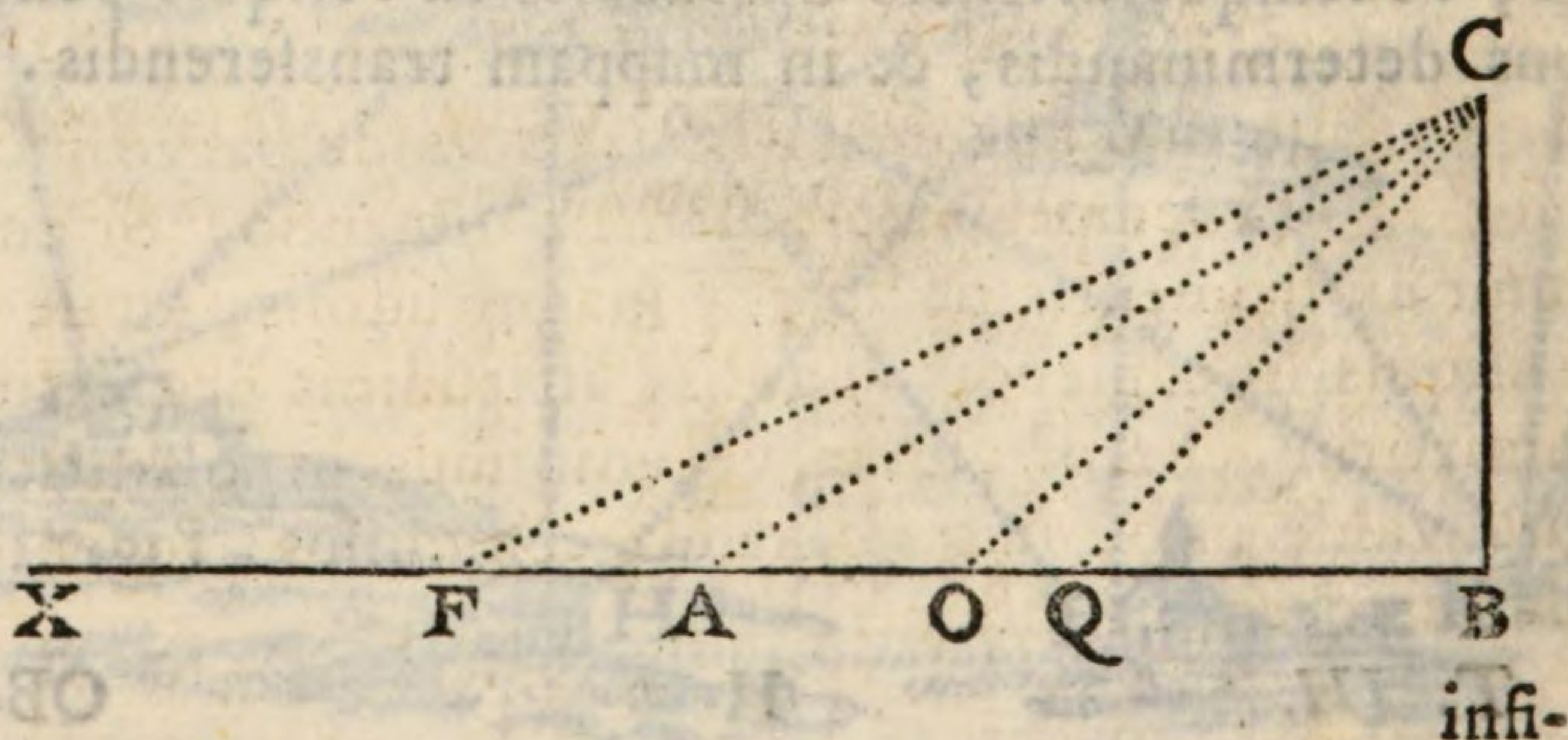
Fallaciarum complurium, quæ in Praxim trigonometricam Altimetriæ, & Longimetriæ solent irrepere.

Verissimè olim monuit P. Tacquet in sua Geometrica practica, Geometras, qui de hoc argumento scribere solent, praxes suas sine ulla limitatione proponere; unde fit, ut ii, qui in rebus geometricis parum sunt versati, dum absque ulla limitatione, ubique, & semper eodem modo operantur, in magnos errores incidant, neque satis, ex quibus nascantur causis, assequantur. Quare facturus me operæ pretium censui, si quas insignis hic Auctor, alique Scriptores acutè indicarunt errorum origines, & limitationes necessarias suis locis adhibendas, in hunc ego locum eas congeram, ut praxis a theoria nequaquam aberret.

OBSERVATIO I.

142. **E**rror vel minimus sub angulo altitudinis valde parvo commissus, multò majorem distantiae causat errorem, quàm defectus idem sub angulo altitudinis magno.

Altitudo montis fit BC: distantia horizontaliter



infinite extensa BX . Finge tibi exilem aliquem angulum altitudinis, in statione videlicet admodum remota, inventum esse BAC , qui vero angulo altitudinis major sit; verus autem sit CFB . Quoniam CAB externus, utrique CFB , & FCA æqualis est ex Elem., erit FCA differentia falsi CAB , & veri CFB ; quare angulus FCA est ipse error, seu erroris quantitas.

Pone rursus, in statione viciniore repertum esse aliquem altitudinis angulum præcedenti majorem CQB , qui a vero COB etiam differat angulo OCQ . Sint autem anguli, hoc est, errores ambo FCA , OCQ æquales. Nihilo tamen minus, etiam data errorum æqualitate, manifestum est angulum FCA longè majorem intercipere partem FA in linea distantiae, quàm sit OQ intercepta ab angulo æquali OCQ . Sunt autem FA , OQ errores distantiae; siquidem FB est distantia vera, collecta ex vero angulo altitudinis CFB ; & AB est distantia falsa, deducta ex falso angulo CAB ; ac proinde FA , distantiae veræ, ac falsæ differentia, est error distantiae. Atque idem ostenditur in OQ .

Corollarium I.

143. **I**Taque, cum peccatur in parvo altitudinis angulo, error distantiae multò major est, quàm in magno.

Corollarium II.

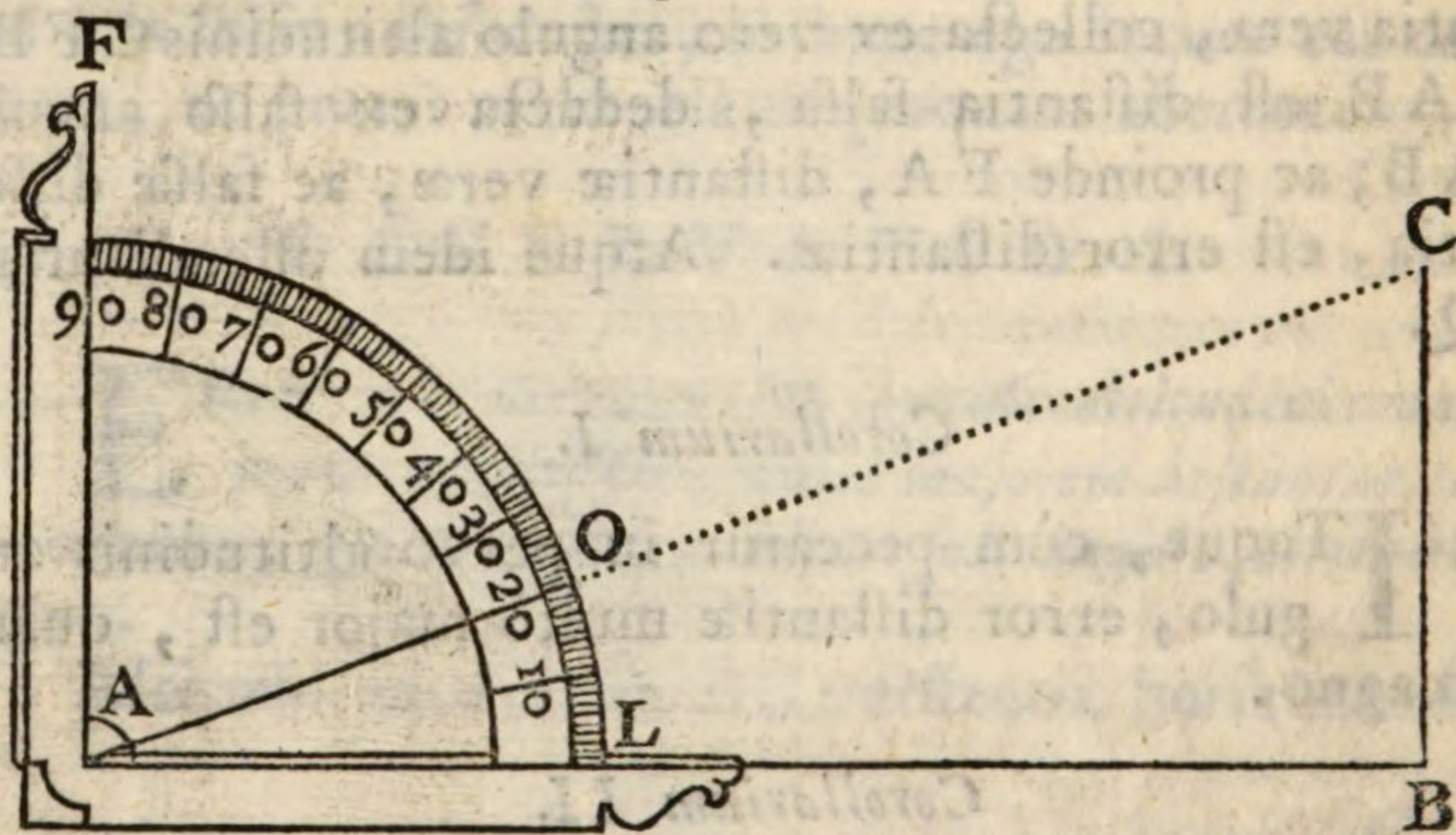
144. **H**inc sub angulo altitudinis valde parvo incerta semper erit distantiae dimensio. Si enim utamur Instrumentis ordinariæ magnitudinis, facile error aliquis in capiendis angulis, altitudinis præsertim, committitur. Error autem vel minimus in quantitate anguli valde parvi determinanda commissus, ingentem causat errorem in distantia.

Corollarium III.

145. **Q**uin imò fieri potest, ut idem error, etiam minimus, in altitudinis angulo semper decrescente, errorem in distantia causet quovis dato majorem.

Scholion.

NOtabis, in hac Observatione expendi dumtaxat defectum anguli altitudinis, ortum ex situ vitioso lateris mobilis AO , etiamsi infernum latus quadrantis, situm obtineat debitum, nempe horizonti parallelum; ex cuius defectu origo erroris altera declarabitur *Observ. VIII.* Vitiatur situs lateris mobilis AO ex mala collimatione in apicem altitudinis, & inæquali divisione graduum, aliove Instrumenti vitio.



OBSERVATIO II.

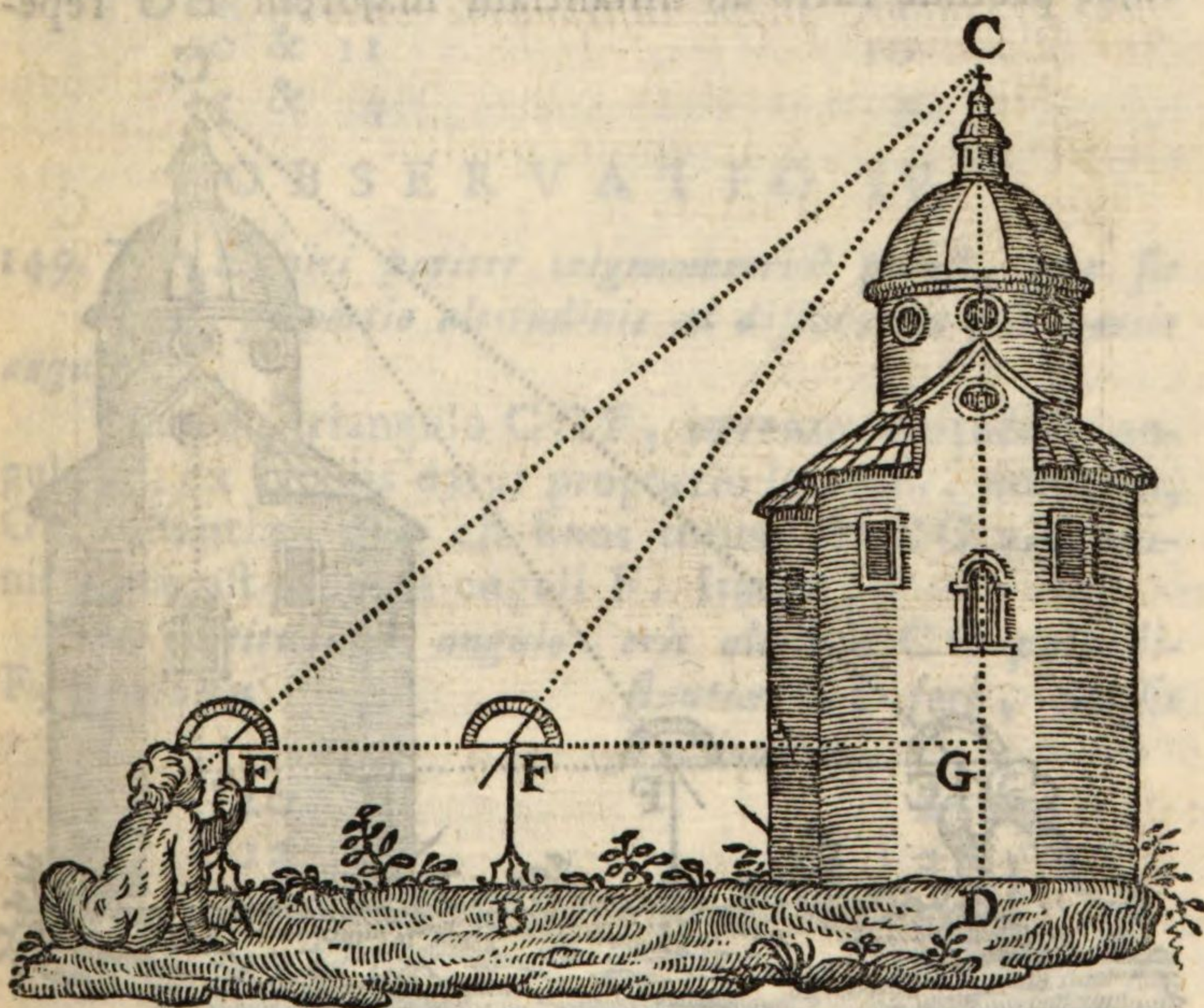
146. **Q**uoties duabus stationibus mensuranda est altitudo, aut distantia, tantum esse debet intervallum stationum, quantum satis est, ut differentia angulorum obtineatur.

Nam

Nam in constructione Problematis IV. requiritur differentia aliqua tangentium; quæ ut obtineatur, opus est justo stationum intervallo. Loca stationum sint E & F: angulorum altitudinis in his stationibus, C F G, C E G differentia est angulus E C F; est enim angulus C F G par duobus C E F, E C F, ex Elementis. Angulus autem E C F, quò major fuerit, eò certior operatio erit; porro erit major, quò stationum E & F intervallum fuerit majus.

Corollarium.

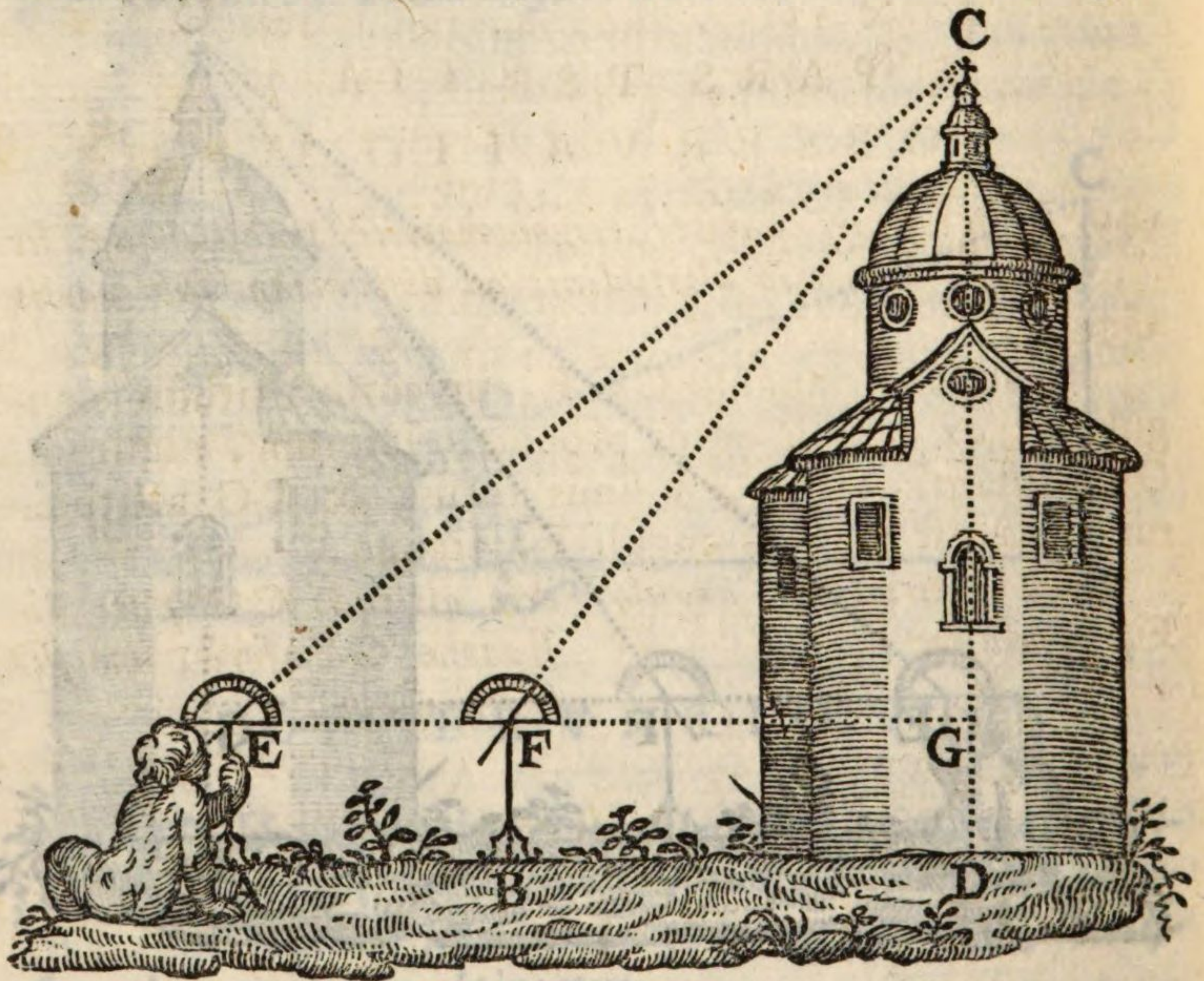
147. **E**Rrant, qui putant, stationum intervallo quolibet ad libitum assumpto, sensibilem angulorum differentiam posse obtineri.



OBSERVATIO III.

148. **D**ato quovis altitudinis angulo in statione una, definire, quanto opus sit stationum intervallo, ut acquiratur in statione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus.

Quoniam differentia angularis ECF saltem unius gradus esse debet, statuo altitudinis angulum CEG in statione remotiore E esse 14 grad., & CFG in statione proximior F grad. 15. Ergo horum complementa ECG , FCG sunt grad. 76 & 75, quorum tangentes sunt EG , FG ; & ex tabulis trigonometricis dantur 401078 & 373205, & tangentium differentia 27873, ipsum videlicet intervallum stationum EF ; cuius proinde ratio ad distantiam majorem EG repe-



rietur,

rietur, si major tangens per tangentium differentiam dividatur.

Invenies igitur hac methodo, cùm in prima statione habetur altitudinis angulus grad. 14, ut obtineatur in statione secunda angulus uno gradu major, nempe grad. 15, oportere accedere per spatium EF, quod ferè sit pars decima quarta totius distantiae EG. Eodem modo investigabitur sub quovis altitudinis angulo in statione una, quanto opus sit intervallo, ut acquiratur in statione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus; ut in adjectis exemplis.

Anguli altitudinis, graduum requirunt intervallum stationum, quod sit majoris distantiae EG pars ferè

19 & 20

18

14 & 15

14

10 & 11

10

5 & 4

4.

OBSERVATIO IV.

149. **D**efiniri pariter trigonometricè potest, quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis.

Nam in triangulo CGF, invento altitudinis angulo F, ex tabulis datur proportio laterum, nimirum, GF distantiae, quæ est sinus totus, & CG altitudinis, quæ est tangens anguli F. Itaque,

Dato altitudinis angulo erit altitudo CG pars distantiae GF ferè, omissis fractionibus,

20

2

13

3

10

5

5

11

3

19

1

57

H 4

Scho-

Scholion.

HÆc intellige, si distantia non sit tanta, ut propter rotunditatem terræ sensibilibiter curva evadat; quod eveniet, si distantia gradum unum adæquet ambitus terreni; ut infra planum faciam.

OBSERVATIO V.

150. **N**on tutò ex qualibet distantia altitudines mensurantur.

Perinde obsunt & magna distantia, & vicinitas magna: distantia quidem, quia facit, ut sub exiguo angulo spectetur altitudo, ac proinde in capiendo angulo facilè committatur error, juxta Observationem I. Magna vicinitas obest, quia efficit, ut angulus, sub quo altitudo conspicitur, vix differat a recto, ac proinde alter angulus sit acutus insensibilis; unde facilè accidet, ut altitudo colligatur major verà.

OBSERVATIO VI.

151. **E**x omni ea distantia satis tutò altitudo mensurabitur, ad quam ipsa proportionem habeat sensibilem.

Ita enim & incommoda jam dicta licebit effugere, & faciliùs angulorum sensibilis differentia, stationibus variatis, obtinebitur. Nisi forte distantia esset tanta, ut rotunditas terræ, altitudinis dimensionis officiat; ut mox observabitur.

OBSERVATIO VII.

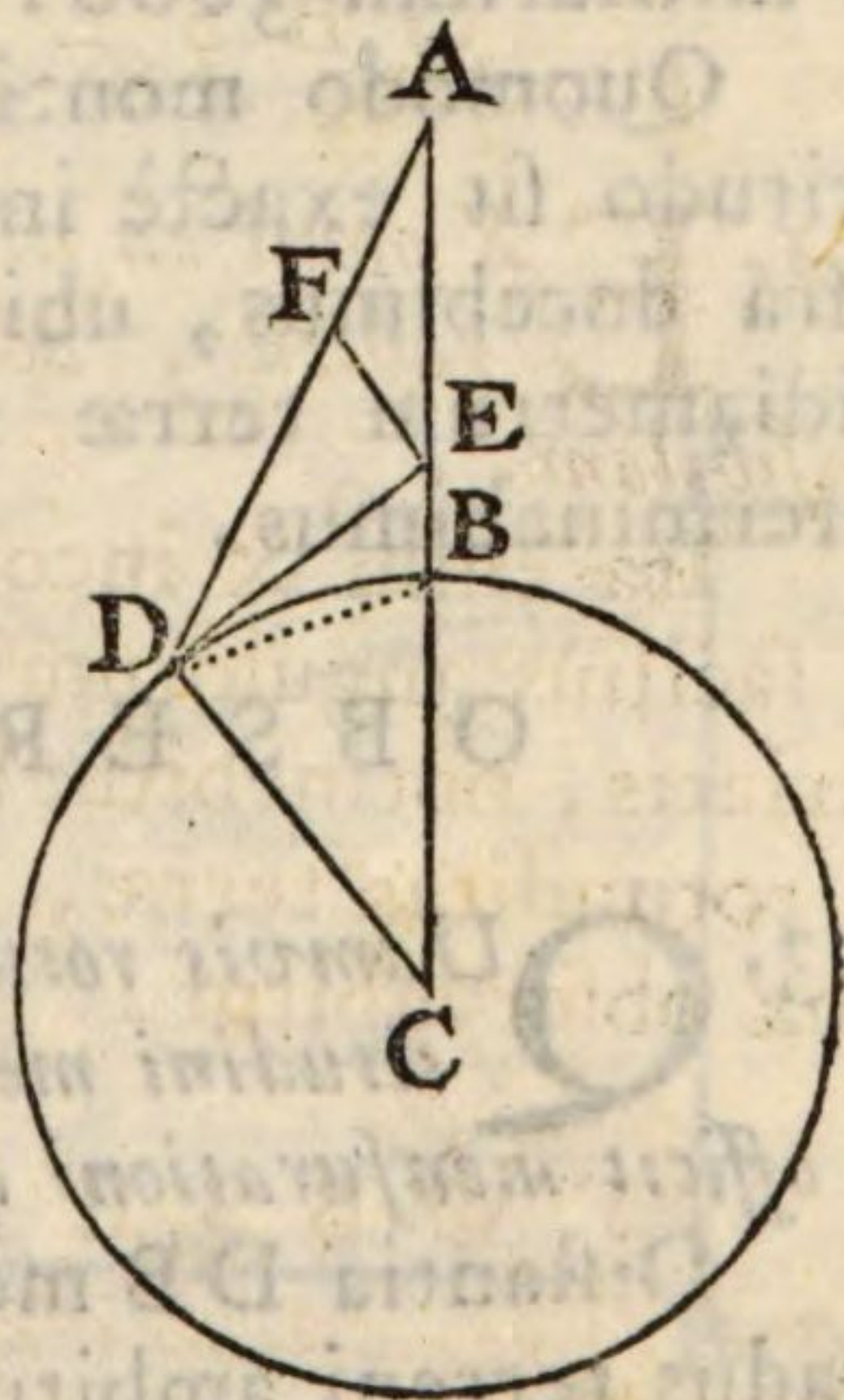
152. **Q**uam rotunditas terræ erroris invehit in altitudinum mensuram.

Su-

Superiora Problemata ita resolvimus, ut nullam rotunditatis terræ rationem habuerimus. Cùm enim altitudines, quarum, ut plurimùm, mensuram inquirimus, sint mediocres, earum mensurationi nihil officit telluris figura sphærica. Quia tamen in montium altitudine determinandà convexitas terræ aliquid potest influere, uno aut altero exemplo rem totam expedio.

Altitudo montis unius milliaris esto AB , quæ protracta transeat per C terræ centrum, cuius diameter contineat 3600 milliaria: oculus mensoris sit in puncto D , ex quo spectetur apex montis A ; sitque circumferentia BD trium milliarium, quamvis amplius intervallum in figura fuerit designatum, commoditatis gratiâ; tum assumatur, ut moris est, linea horizontalis DE respectu puncti D ; hoc est, sit angulus CDE rectus, & consequenter angulus DEC acutus, nempe grad. $89. 57$, & angulus DEA grad. $90. 3$; qui tamen consideretur ab imperito quasi rectus; ducaturque FE parallela lineæ DC ; hoc est, sit angulus DEF rectus.

His positis, triangulum rectangulum, quod hætenus in praxi trigonometrica consideravimus, non est ABD , sed DEF . Praxis autem trigonometrica docet, qua ratione metiri possimus lineam FE , quæ minor est lineâ AE , cùm angulus AFE sit obtusus. Ergo linea, seu altitudo FE multò minor erit, quàm AB , vera montis altitudo. Quæritur jam quantum deficiat. Ac primò, facile per calculum trigonome-



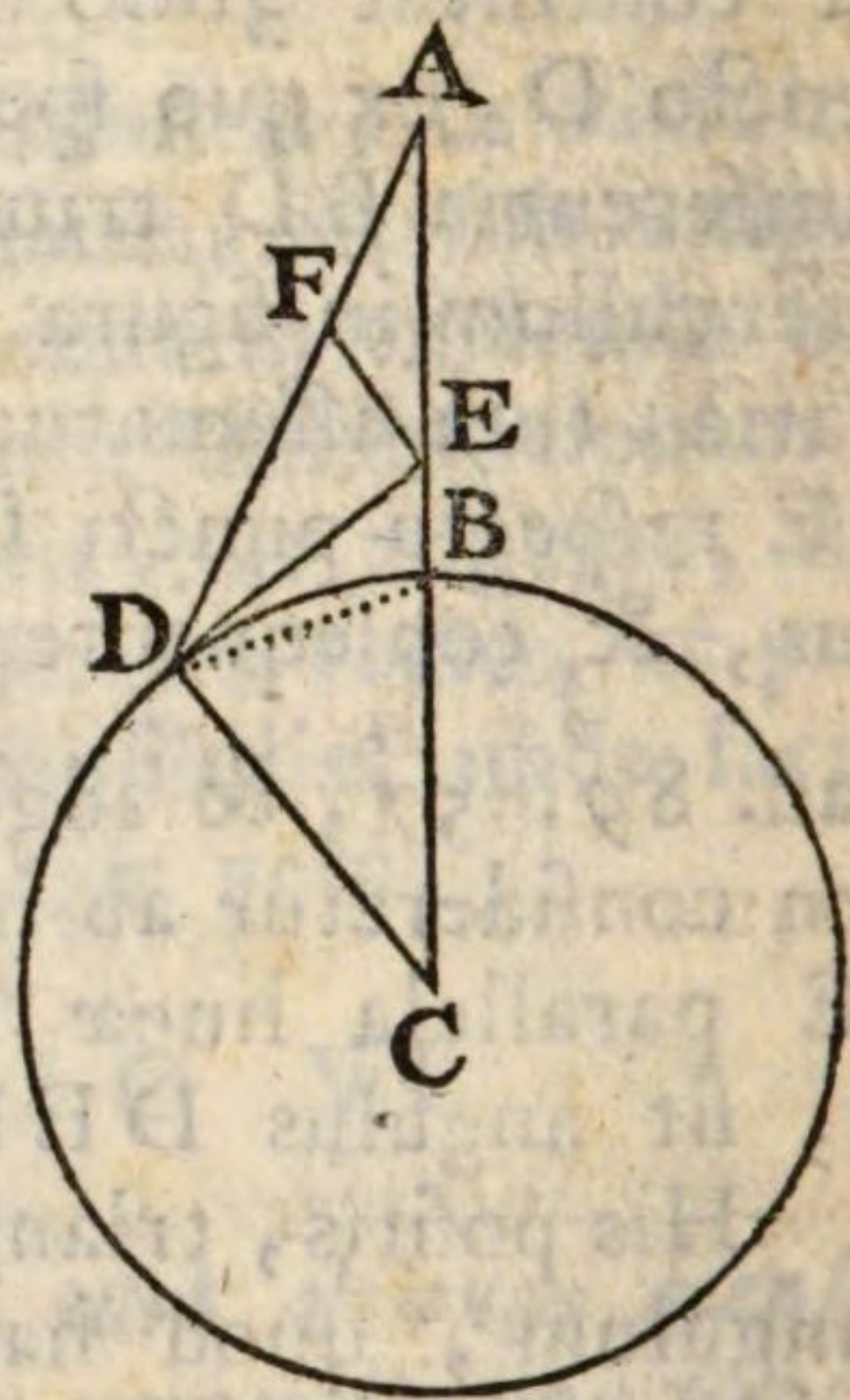
tricum

tricum eliciemus valorem lineæ BE . Consideretur triangulum rectangulum CDE , in quo latus CE est secans anguli DCE trium minorum; eritque 10000004, qualium radius ponitur esse 10000000; & consequenter BE erit earundem partium 4. Pono rursus, semidiametrum terræ continere milliaria 3600, seu passus 3600000, hoc est, pedes 1800000. Fiat ergo: *Ut sinus totus 10000000 ad pedes 1800000, ita 4 ad pedes $7\frac{1}{5}$* . Erit ergo BE pedum $7\frac{1}{5}$. Simili methodo in-

venietur trigonometricè, quantum altitudo inventa FE deficiat ab AE . Quare altitudo montis AB minor adhuc invenietur pedibus $7\frac{1}{5}$.

Si arcus DB esset unius gradus, longè major error committeretur, hoc est, pedum 2663, posita semidiametro terræ milliarium 3600.

Quomodo montis alicujus altitudo sit exactè inquirenda, infra docebimus, ubi etiam semidiametrum terræ accuratiùs determinabimus.



OBSERVATIO VIII.

153. **Q**uamvis rotunditas terræ multum detrahbat altitudini mensurandæ, eadem tamen nihil ferè officit mensurationi distantiae.

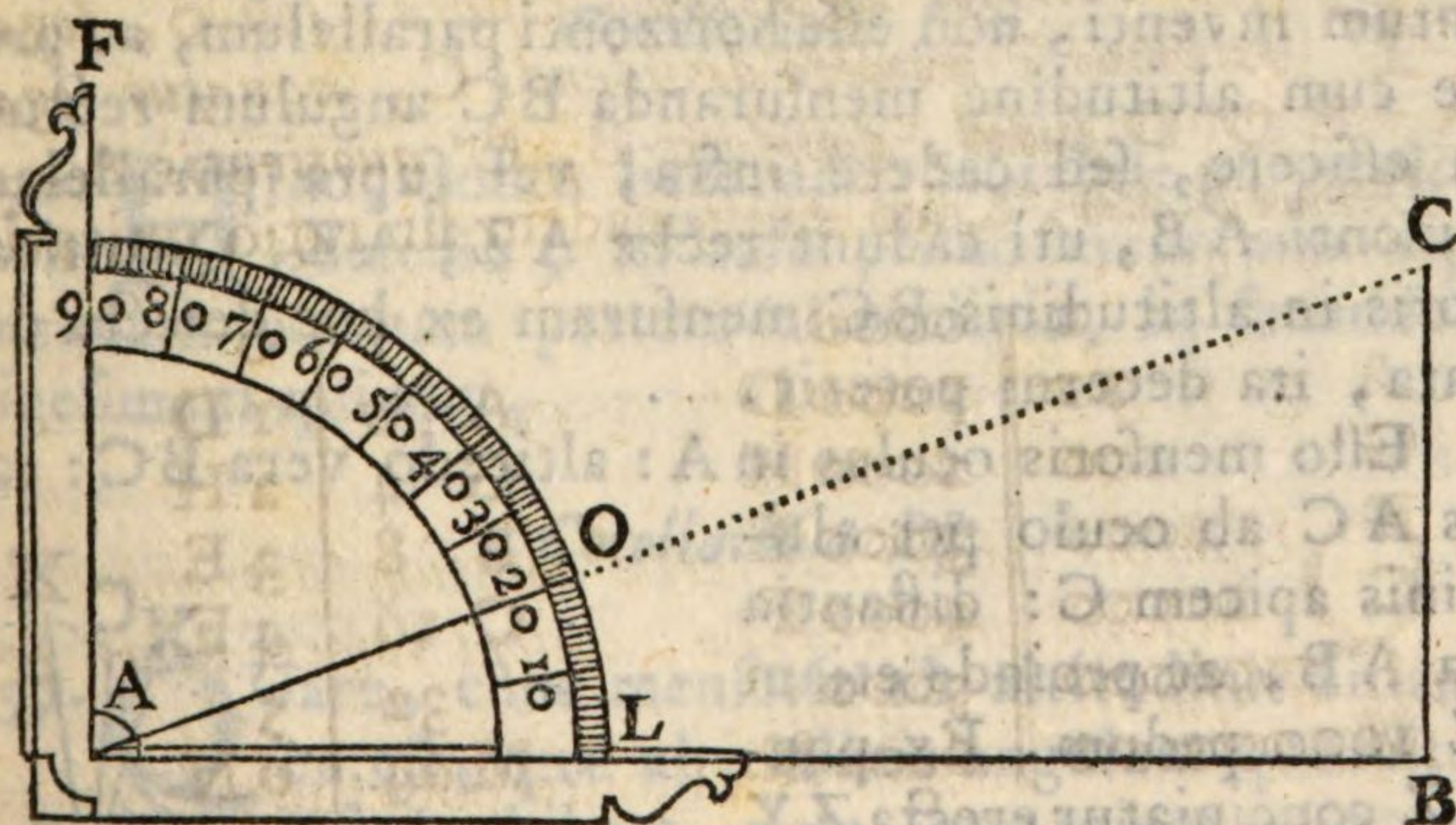
Distantia DB mensoris a monte ponatur esse unius gradus terreni ambitus, hoc est, ut demonstrat P. Tacquet in Geom. pract. Probl. IV. Cap. VI., 24 mil-
lia-

liarium Belgicorum. Linea distantia, cujus quantitas inquiri potest, est, non arcus DB, sed DE, tangens superficiem terræ. Ducatur subtenſa DB: tangens DE unius gradus, excedit DB subtenſam unius gradus, ne parte quidem millesima; quare distantia DE insensibiliter excedit subtenſam DB, multòque magis arcum DB. Hinc rotunditas terræ, quæ in unius gradus intervallo tantum detraheret altitudini menſurandæ, hæc eadem nihil quidem erroris ullo modo perceptibilis derivaret in distantiam 24 miliarium.

OBSERVATIO IX.

154. **P**Ræcipuus, & frequentior error, quo altitudinum dimensio vitiatur, ex defectu perpendiculi.

Quoties altitudines metimur, semper infernum latus AB anguli CAB, qui per quadrantem, aut semicirculum invenitur, esse debet horizonti parallelum; alioquin non haberetur trigonum rectangulum ABC.



Id verò obtinetur ope perpendiculari. Nam in quadrante, ope perpendiculari, statuitur supernum Instrumenti latus perpendicularare horizonti; & in semicirculo statuitur perpendicularis horizonti semidiameter dividens semicirculum in duos quadrantes; unde consequens est, ut latus alterum quadrantis, ipsum nempe anguli latus infernum, sit horizonti parallelum.

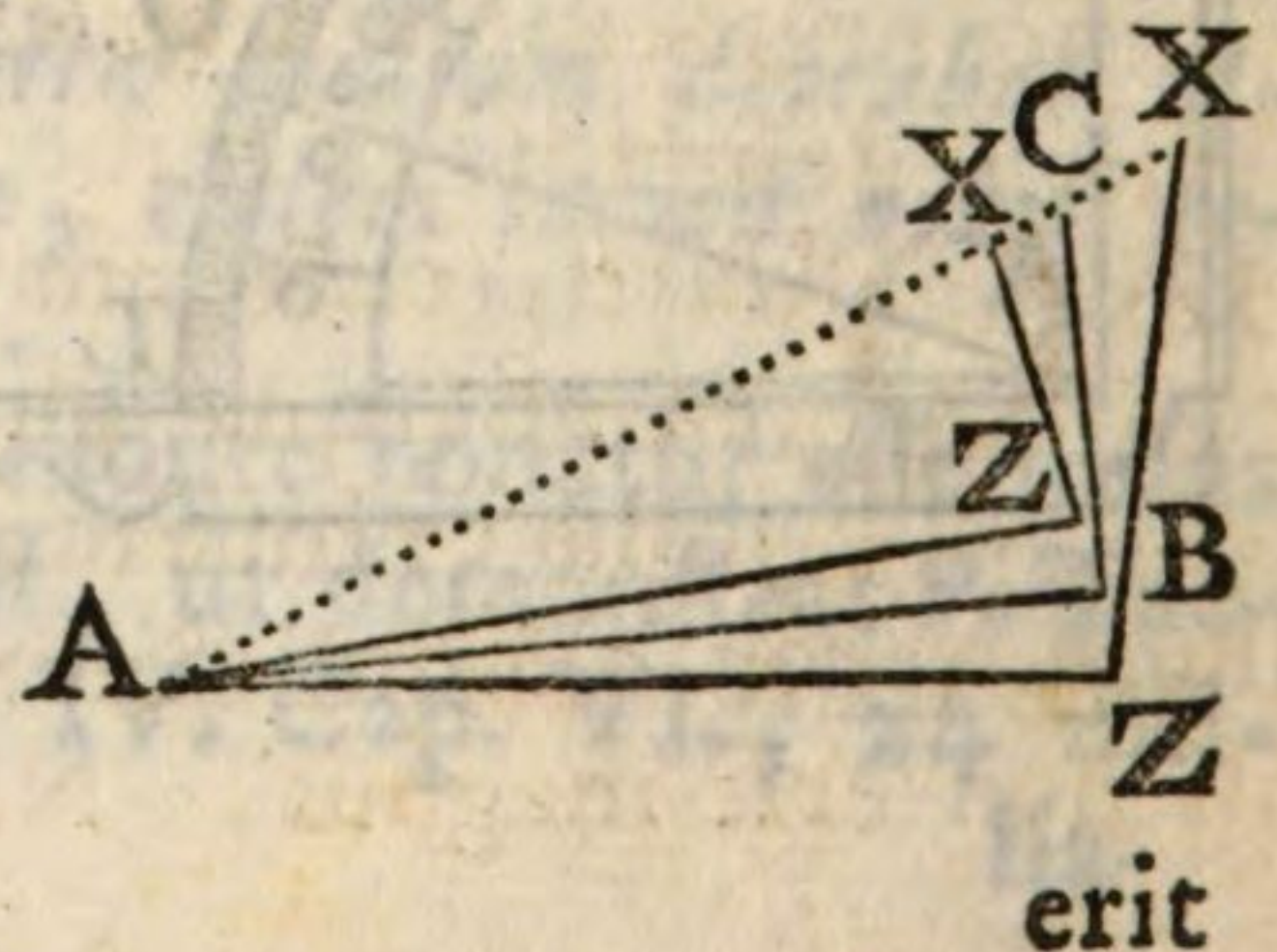
Collocatio itaque perpendicularis unius lateris Instrumenti sedulò examinanda est; deviatio quippe insensibilis a perpendicularo, errorem infert in dimensione sensibilem. Quare cautio adhibenda duplex: Prima est, ut perpendicularo ita planum quadrantis applicetur, ut tamen illius libertatem contactu suo non impediat; Secunda, ut perpendicularum quiescat; hinc ejus motum leni attactu elidere oportet, si nimis diu titubet.

OBSERVATIO X.

155. **D***efiniri potest quantitas erroris ex defectu perpendiculari in altitudinis mensuram derivata.*

Pone latus inferius anguli altitudinis per Instrumentum inventi, non esse horizonti parallelum, ac proinde cum altitudine mensuranda BC angulum rectum non efficere, sed cadere infra, vel supra parallelam horizonti AB , uti cadunt rectæ AZ , AZ . Quantitas erroris in altitudinis BC mensuram ex hoc defectu derivata, ita decerni poterit.

Esto menforis oculus in A : altitudo vera BC : radius AC ab oculo per altitudinis apicem C : distantia data AB , ac proinde etiam AZ 1000 pedum. Ex puncto Z concipiatur erecta ZX perpendicularis ad AZ ; cui occurrat radius AC in X :



erit ZX altitudo falsa; cujus quantitas ex hoc situ vitioso innotescet loco veræ BC . Ponamus insuper angulum ZAB , quo deflectit AZ a parallelo situ AB , esse 30 minutorum; ipsum verò altitudinis angulum Instrumento repertum CAZ grad. 10.

His ita constitutis, cadat primò AZ infra AB . Quoniam CAZ est grad. 10, & ZAB 30 minut., erit CAB grad. 9. 30^I; cum quo, & latere AB 1000 pedum in triangulo rectangulo ABC , reperietur *altitudo vera* BC pedum 167. 3. 4^{II}, hoc est, cum tribus decimis, & quatuor centesimis. Jam in trigono rectangulo AZX , quia dantur rursus latus AZ 1000 pedum, & angulus XAZ grad. 10, reperietur *altitudo falsa* ZX pedum 176. 3. 2^{II}. Erroris ergo quantitas est ferme pedum 8. 9. 8^I.

Quod si AZ cadat supra AB , eodem ratiocinio similiter reperietur erroris quantitas pedum 9. 0. 1^I.

Corollarium I.

156. **H**inc, posito licet adeo notabili perpendiculi defectu, in casu primo error non æquat decimam octavam partem altitudinis, in secundo ne vigesimam quidem.

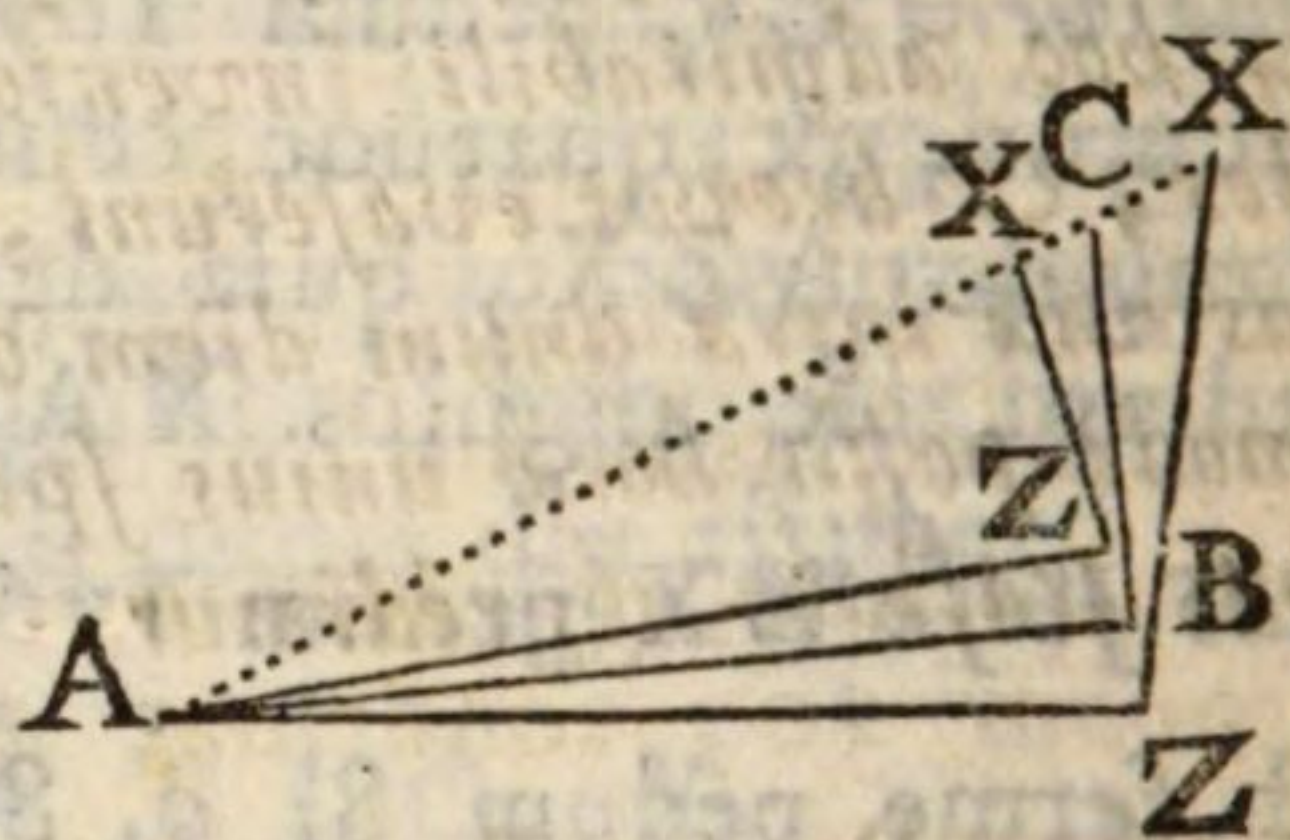
Corollarium II.

157. **Q**uare, cum mensoris ab altitudine distantia ea est, quæ altitudinis angulum quantitatis justæ exhibeat, puta, non minorem 10 gradibus, error quoque dimensionis ex defectu perpendiculi non erit magnus. Nam & defectum perpendiculi
fatis

fatis crassum assumpsimus, minorum nempe 30, qualem non facile accuratus mensor committeret, & distantiam eam, quæ angulum satis efficeret parvum, videlicet 10 graduum.

Corollarium III.

158. **S**ub angulo majore, cæteris paribus, error adhuc multò insensibilior evadet. Nam reliquis datis iisdem, si angulus altitudinis XAZ fuerit 45 graduum, eodem discursu reperies errorem non æquare quinquagesimam sextam partem altitudinis veræ AB , cadente AZ infra parallelam AB ; cadente autem supra, ne partem quidem quinquagesimam octavam.



Corollarium IV.

159. **H**inc verissimè monet P. Tacquet in Geom. pract., perspicuum esse, si cautè, & accuratè operemur, posse altitudines montium, secus ac nonnullis imperitis aliquando visum est, absque errore notabili, etiam mediocri adhibito Instrumento, reperire; quod ipsum etiam ex sequenti Observatione confirmabitur.

OBSERVATIO XI.

160. **D**Atis omnibus iisdem, quæ supra, sub angulo altitudinis vel nimis parvo, vel valde magno, major evadet, ac sensibilibior error, qui oritur ex defectu perpendiculi.

Esto altitudinis angulus grad. 5. Eodem discursu reperietur error major nona, sed minor octava altitudinis parte, quando AZ cadit infra parallelam horizonti AB. Cum verò AZ cadit supra AB, error proveniet major undecima parte altitudinis, sed minor decima; qui error, cum ne ipse quidem adeo sit enormis, præsertim sub angulo altitudinis tam exili, videlicet grad. 5, & perpendiculi defectu tam crasso, minutorum 30, confirmat amplius ea, quæ paulo ante dicta sunt.

Ulteriùs autem decrescente altitudinis angulo, prædictus error fiet intolerandus. Nam, reliquis datis, si altitudinis angulus sit grad. 3, & AZ cadat infra AB, proveniet error quinta parte altitudinis major. Rursum, si angulus altitudinis sit 2 grad., & AZ cadat etiam infra AB, error tertiam excedet altitudinis partem.

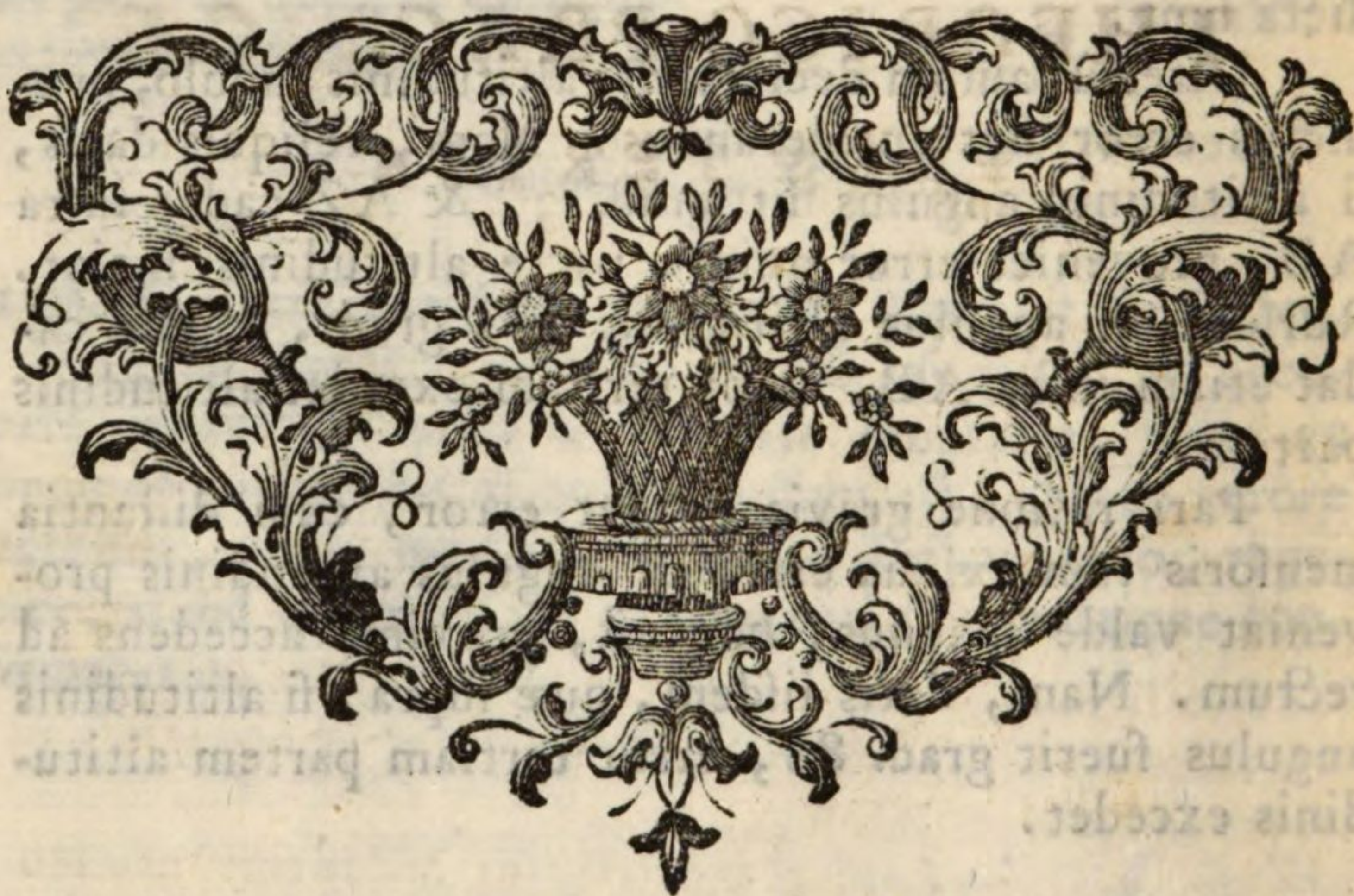
Pari ratione gravis evadet error, cum distantia menforis tam exigua erit, ut angulus altitudinis proveniat valde magnus, hoc est, proximè accedens ad rectum. Nam, datis iisdem, quæ supra, si altitudinis angulus fuerit grad. 88, error tertiam partem altitudinis excedet.

Corollarium.

161. **E**X haftenus dictis etiam confirmantur ea, quæ Obser. VI. demonstrata sunt; tutissimam nempe altitudinis dimensionem institui ex distantia mediocri, quæ exhibeat altitudinis angulum quàm proximè grad. 45.

Scholion.

Sunt & alia observanda circa refractiones, quæ notabiliter variant altitudinis, vel distantiae angulum, praesertim in dimetiendis distantissis syderum, planetarum, vel majorum montium altitudine capienda. Sed de his infra.



TRIGONOMETRIÆ THEORICO-PRACTICÆ

P A R S T E R T I A.

LECTORI.

QUamvis universæ Mathesi ingens olim attulisset adjumentum, primò characterum indicorum, deinde fractionum decimalium introductio; non minor tamen ad res mathematicas accessio facta est, ex quo Neperus superiore sæculo mirificum illud logarithmorum inventum excogitavit, & perfecit; quorum quidem usus, quàm latè pateat per omnes mathematicas disciplinas, nemo est in iis studiis mediocriter versatus, qui ignoret.

Ac primò, omnis ferè solutio, sive analysi trianguli, ope canonis subtenfarum, sinuum, tangentium, & secantium absolvebatur per regulam proportionum, uti hætenus a nobis factitatum est. Numeri autem, qui inveniuntur in tabulis sinuum, ut vitentur fractiones, eamque habeant accuratam diligentiam, quæ requiritur, septem, aut octo characteribus constant. Ex quo fit, ut operationes trigonometricæ multum laboris, tædii, immo & periculi habeant, ne in tam longis operationibus aliquid erroris irrepat. Unus omnium doctissimus Neperus, ac de universa Mathesi bene meritus, alios numeros pro sinubus, tangentibus, & secantibus substituit; quorum ope idem sola additione præstamus, quod multiplicatione; idemque subtractione, quod olim divisione efficiebamus; numerosque ferè immensos, qui vix tractari, subigique in calculo possent, facili compendio in ordinem coegit per logarithmos; & eorum canonem descripsit, construxit, & edidit Edimburgi, anno 1614.; quem statim omnes Mathematici, utilitate permoti, avidè arripuerunt.

Paucis post annis, quàm hæc ediderat Neperus, aliam subinde magis commodam logarithmorum for-

nam excogitavit, quam Henrico Briggio statim aperuit, Geometriæ in Academia Oxoniensi Professori; eundemque sibi socium operis, adiutoremque habuit, ut logarithmos in meliorem formam redactos completeret. Sed Nepero demortuo, totum, quod restabat, onus in Briggium devolutum est, qui magno labore, & summa, qua pollebat, ingenii subtilitate, canonem logarithmicum ex nova illa forma composuit pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 20000, & a 90000 ad 100000; ac methodum construendi canonem unâ exposuit in sua Arithmetica logarithmica, Londini edita anno 1624.

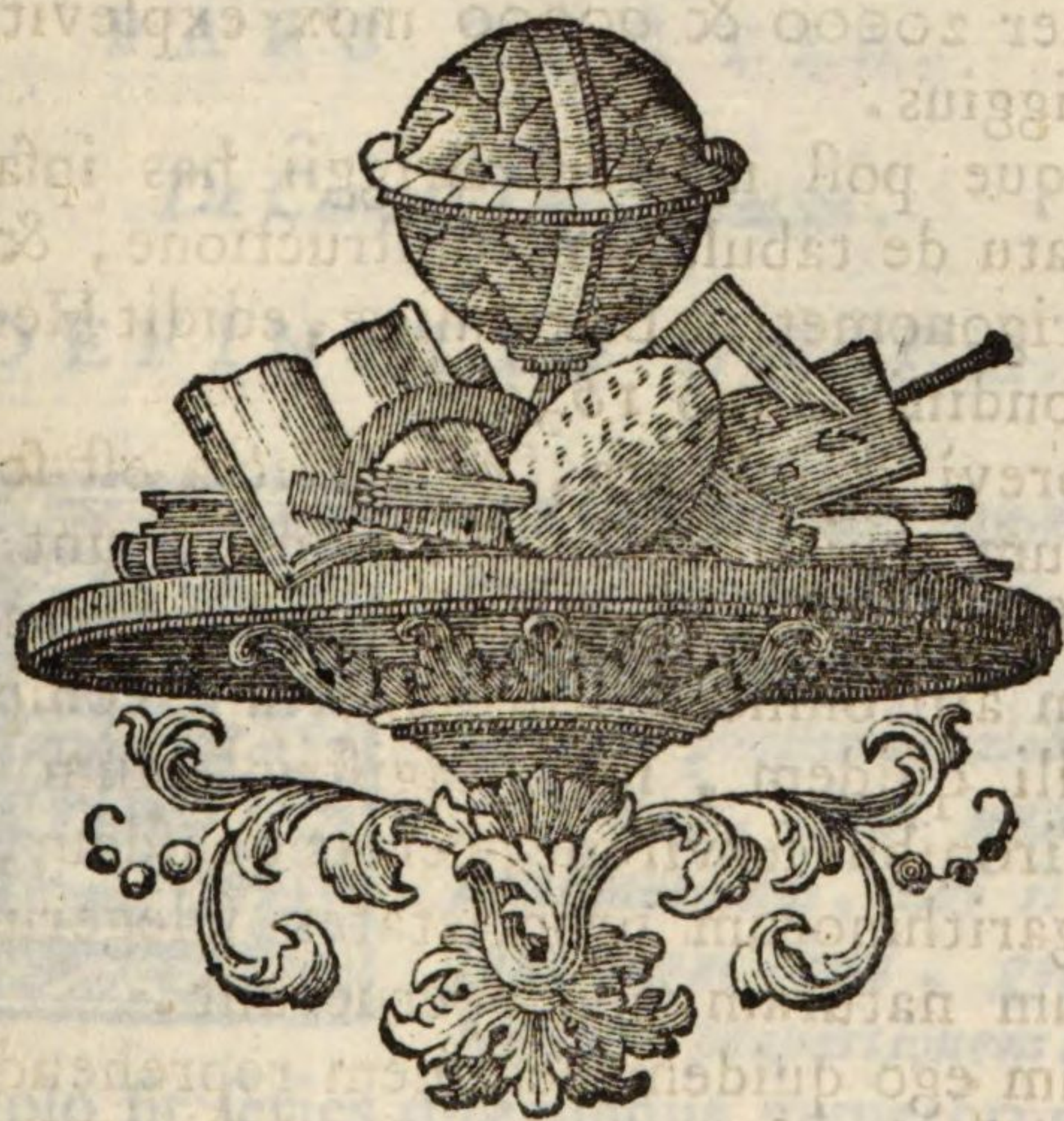
Paulo post eundem canonem iteratò edidit Goudæ apud Batavos anno 1628 Adrianus Vlaccus; & lacunam inter 20000 & 90000 mox explevit, ut docuerat Briggsius.

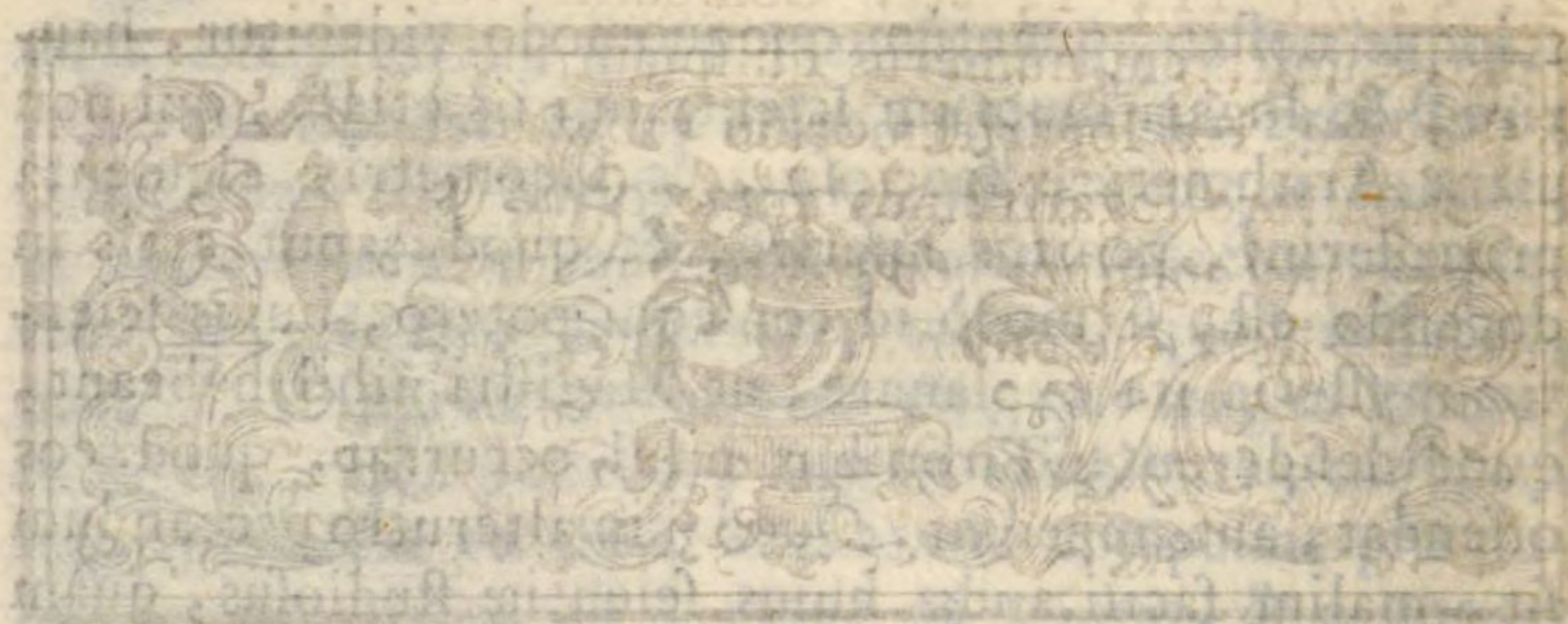
Denique post mortem Briggii has ipsas tabulas cum tractatu de tabularum constructione, & usu, sub nomine Trigonometriæ Britannicæ, edidit Henricus Gellibrand Londini, anno 1633.

Ita brevî & inventa, & perfectâ est scientia logarithmorum, cui illustrandæ non defuerunt nostro, & superiore sæculo Viri in re mathematica exercitatissimi. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed Magistris solùm scripsere; alii, ut Tironibus servirent, certas quasdam, magisque obvias logarithmorum proprietates selegerunt; intimam eorum naturam non aperuerunt.

Horum ego quidem neminem reprehendo. Habet quisque in scribendo certum, & destinatum scopum, quo tendat, & arcum dirigat magna cum laude, & scientiarum incremento. Mihi quidem propositum est Neperum, Briggium, Vladium, aliosque sequi in hoc tractatu, non ut Interpretes facere solent, sed, ut in reliquis Elementis, e fontibus eorum, iudicio, arbitrio-

trioque nostro, quantum quoquomodo videbitur, haurire; & logarithmorum scientiam, iis etiam, qui non ultra Arithmeticae speciosae, & Geometriae elementa procefferint, penitus aperire; & quod caput artis in docendo est, si modò id consequi potero, hujus scientiae mysteria ita explanare, ut Magistri nihil habeant, quod desiderent; Tironibus nihil occurrat, quod eos offendat, aut impediat. Quod si in alterutro peccandum sit, malim facilitandae hujus scientiae studiosus, quàm geometricae brevitatis cupidus videri.







TRIGONOMETRIÆ

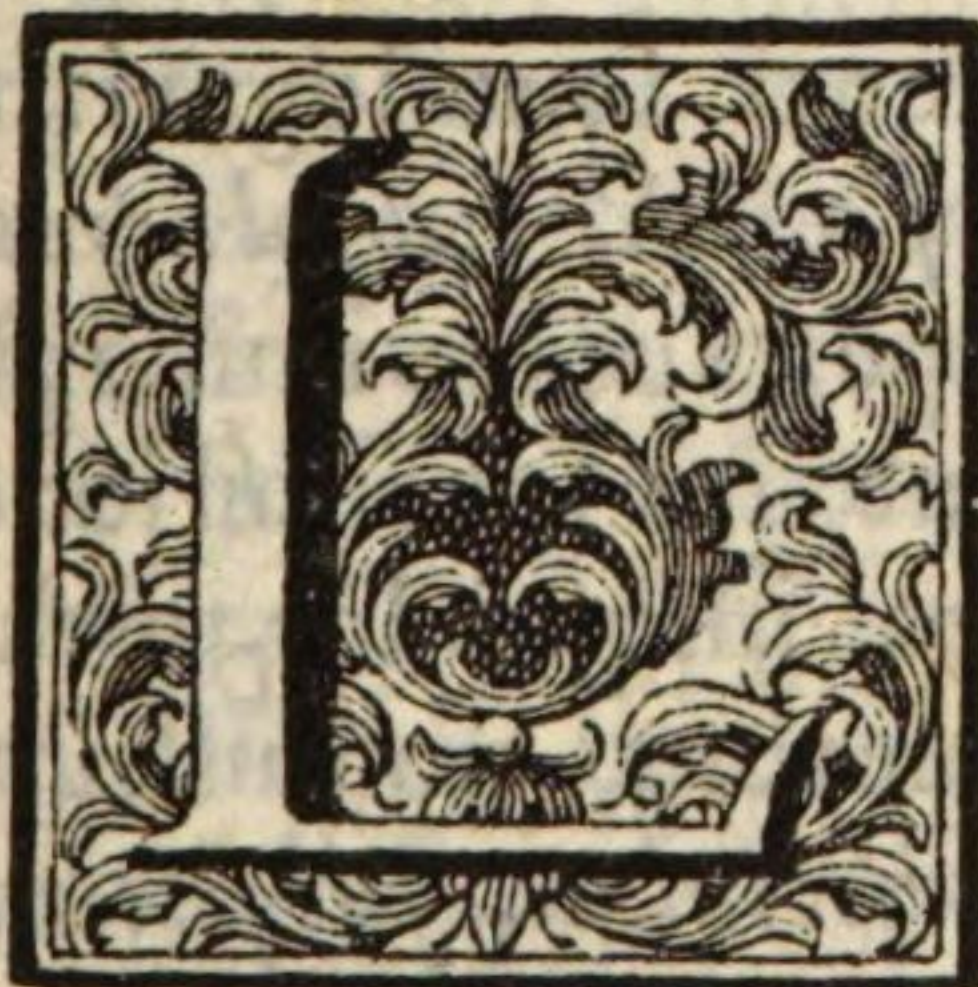
THEORICO-PRACTICÆ

PARS TERTIA.

De Canone Logarithmico.

DEFINITIO UNICA.

162.



LOGARITHMI sunt numeri arithmetice proportionales, adjuncti, aut respondentes numeris geometricè proportionalibus.

Vel, sunt numeri, qui arithmetice, ubi ii, quorum sunt logarithmi, geometricam servant proportionem.

Exemplo sit series quæcunque numerorum geometricè proportionalium, ut A, cui e regione respondeat alia series B numerorum quorumlibet arithmetice proportionalium, nempe æquidifferentium, sive crescen-

A 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.

B 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

I 4

do,

do, five decrescendo. Hi numeri B, dicuntur *logarithmi* numerorum A; qui logarithmi possunt esse quicunque numeri ad libitum assumpti, dummodo æquali semper excessu se superent crescendo, vel æquali defectu semper decrescant.

163. Ut autem vel in ipso limine percipias finem, propter quem inventi sunt hujusmodi logarithmi, finge me velle, datis tribus numeris, quærere quartum proportionalem. Sint dati tres numeri seriei A, 2, 4, 8, quibus quæritur quartus proportionalis. Regula consueta jubet multiplicari 8 per 4, & productum 32 dividi per primum 2; quotiens scilicet 16 est ille, qui quæritur. Nos aliter operabimur per logarithmos: si trium numerorum geometricè proportionalium 2, 4, 8, logarithmis in prima serie acceptis, 2, 3, 4, addamus duos ultimos 3 & 4 = 7, & ab hoc numero 7 auferatur primus, nempe 2, residuum erit 5: Dico hunc numerum 5 esse logarithmum numeri quæsitæ; ac proinde, si tabulam consulas, videasque numerum geometricum in serie A respondentem numero 5 seriei sequentis B, invenies pariter 16.

Ad hunc itaque finem inventi sunt logarithmi, ut per ipsos regula trium longè facilius absolveretur, quàm vulgò fieri consuevit; nempe mutata multiplicatione in additionem, & divisione in subtractionem, ut videbimus. Ex hac propterea insigni logarithmorum proprietate eosdem descripserunt nonnulli hoc modo. *Logarithmi sunt numeri artificiales, substituti pro*

A 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.

B 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

B 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c.

B 48, 45, 42, 39, 36, 33, 30 &c.

B 0, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 4, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$, 8 &c.

naturalibus, apti ad solvendam multiplicationem sola additione, & divisionem sola subtractione.

Scholion.

SUpputationes arithmeticae, quæ olim in tabulis sinuum propter magnitudinem numerorum, qui invicem multiplicandi essent, ac dividendi, usque adeo operosæ fuerant, & tædii plenæ, ac proinde errandi periculo obnoxia, hoc admirabili invento logarithmorum usque adeo faciles, & breves evaserunt, ut, quod per antiquas analogias vix intra unum diem obtineri poterat, absolvi jam commodè possit horæ unius spatio, ope logarithmorum, de quibus tractare aggredimur.

164. Progressio quævis geometrica non hanc potius, quàm illam logarithmorum seriem sibi vindicat; sed liberum est cuique, logarithmorum seriem, quam voluerit, adhibere. Determinatis tamen logarithmis duorum numerorum, jam amplius liberum non est quoscunque logarithmos assignare cæteris numeris geometricè proportionalibus; puta, si logarithmus unitatis sit 1, & binarii sit 2, ut in tabula præcedenti, necessariò logarithmus quaternarii erit 3, & octonarii erit 4; & ita de cæteris seriebus arithmeticis, quæ applicari possunt eidem progressioni geometricæ.

165. Tametsi logarithmorum species possit ad libitum assumi, ut diximus, nihilominus præstantissima, ac commodissima est illa, quæ ciphræ 0 ponit pro logarithmo unitatis, propter rationes inferiùs tradendas; ut in hoc exemplo.

A 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c.

B 0, 1, 2, 3, 4, 5 &c.

B 0, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 4, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{2}{3}$ &c.

166. Qui tabulas condiderunt, progressionem decuplam, 1, 10, 100, 1000 &c. pro geometrica assumpserunt, numerosque, qui maximo excessu 100000000 se superarent, pro arithmetica progressionem; ac conditionem, quam nuper indicavimus, observarunt; qua fieret, ut geometricam ordirentur ab 1, & arithmeticam a 0, propter usus infra tradendos.

<i>Progr. geom.</i>	<i>Progr. arithm.</i>
1	0
10	100000000
100	200000000
1000	300000000
10000	400000000 &c.

167. Quid autem causæ fuerit, cur logarithmorum Inventores pro terminis progressionis arithmeticæ assumpserint numeros tanto excessu se superantes, breviter indicabo; quod planius infra exponam. Nam, si in hoc opere, usuque logarithmorum nihil aliud præstari oporteret, quàm datæ cuilibet seriei numerorum geometricè proportionalium 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. assignare seriem numerorum arithmeticè proportionalium, seu logarithmos 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., facilimum id quidem esset, nec magni moliminis opus. Quia verò in quacunque serie geometrica multi desunt numeri intermedii, quibus in nostris operationibus indigere possumus; ideo logarithmi applicati cuicumque seriei geometricæ, debent maximo excessu se invicem superare, *ut intermediis possint etiam sui logarithmi, sine ulla fractione assignari.* Quod, ut facilius intelligas, confer jam dictam seriem arithmeticam 1, 2, 3, 4 &c. cum serie geometrica 1, 2, 4, 8 &c. Cùm unitas sit logarithmus unitatis, binarius binarii, ternarius quaternarii, hinc jam deesset logarithmus ternarii; pariter nullus inveniretur logarithmus numerorum 5, 6, 7, 9, 10, 11 &c.; in quo esset maximus defectus in canone logarithmico; nam quotiescunque occurrerent numeri hujusmodi, cessaret omnis logarithmorum usus.

Ex

Ex quo fit, ut, si logarithmus unitatis esset 0, pro logarithmo binarii possent accipi 10000000, pro logarithmo quaternarii 20000000, pro logarithmo octonarii 30000000; & tunc possent suppetere complures logarithmi *pro numeris intermediis*, etiam sine fractionibus; uti mox exponam.

Verum, antequam logarithmorum speciem aliquam, usumque referam, quem obtinent in Trigonometria, necessarium duco proprietates omnibus logarithmis communes explicare.

De Logarithmorum proprietatibus, & inventione.

LEMMA I.

168. **S**I fuerint quatuor numeri arithmetice (sive continue, sive non continue proportionales), summa extremorum æquabitur summæ mediorum. Et contra.

Ut quoniam numeri 9, 15, 21, 27 sunt arithmetice proportionales, tam summa extremorum 9 & 27, quàm mediorum 15 & 21, est 36. Rursus in numeris 5, 6, 3, 4, extremorum summa est 9, æqualis summæ mediorum pariter 9.

LEMMA II.

169. **S**I fuerint tres numeri arithmetice proportionales, summa extremorum æquabitur duplo medii. Et contra.

Patet in numeris 4, 6, 8. Summa enim extremorum est 12, quantum est duplum medii. Item in numeris 17, 26, 35, in quibus tam medium duplicatum, quàm extremi simul additi, efficiunt 52. Conuersum quoque horum Lemmatum perspicuum est.

Utrumque Lemma demonstratur Tom. III. Arith. Univer.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

170. **S**I quatuor numeri A, B, C, D sint geometricè proportionales, summa ex logarithmis E, H extremorum A, D , æquabitur summæ ex logarithmis F, G mediorum B, C . Et contra.

Demonstratio. Nam, cum numeris geometricè proportionalibus semper respondeant numeri arithmetice proportionales, ut ex logarithmorum definitione patet, erunt hac de causa logarithmi E, F, G, H arithmetice proportionales; ac proinde per Lem. I. summa extremorum E, H æquabitur summæ mediorum F, G .

Quòd si summa extremorum E, H sit æqualis summæ mediorum F, G , ostendetur eadem ratione numeros A, B, C, D esse geometricè proportionales. Erunt enim per idem Lem. I. logarithmi E, F, G, H arithmetice proportionales, & per logarithmorum definitionem, numeri A, B, C, D proportionales geometricè. Quod est propositum.

Corollarium.

171. **I**Taque, quatuor numerorum geometricè proportionalium A, B, C, D datis tribus, quartum licebit reperire. Si enim quartus quæsitus sit D , unus extremorum, a summa ex logarithmis F, G medio-

					I	O
				A	2	1 E
					4	2
				B	8	3 F
				C	16	4 G
					32	5
				D	64	6 H
	I	0000				
A	10	1000	E			
B	100	2000	F			
	1000	3000				
C	10000	4000	G			
D	100000	5000	H			

rum B, C, dempto logarithmo E alterius extremi A, remanebit logarithmus H numeri quæſiti D. Si autem quærat^r C, unus mediorum, a ſumma ex logarithmis E, H extremorum A, D, auferatur logarithmus F medii dati B; & relinquetur logarithmus G medii quæſiti.

Scholion.

172. **Q**Uamvis numeri E, F, G, H non ſint arithmeticè continuè proportionales, ſive æquidifferentes, nihilominus ſunt logarithmi numerorum geometricè proportionalium A, B, C, D, juxta præmiſſam definitionem, quæ præciſè id requirit, ut logarithmi ſint numeri arithmeticè, ſive continuè, ſive non continuè, proportionales, adjuncti, aut reſpondentes numeris geometricè, ſive continuè, ſive non continuè, proportionalibus.

PROPOSITIO II.

THEOREMA.

173. **S**I ſint tres numeri A, B, C geometricè proportionales, ſumma ex logarithmis D, F extremorum A, C, æquabitur duplo logarithmi E medii B. Et contra.

Demonſtratio. Quoniam A, B, C ſunt geometricè proportionales, erunt D, E, F arithmeticè proportionales ex logarithmorum definitione. Ergo ex Lem. II. ſumma logarithmorum D, F æquabitur duplo logarithmi E.

Si verò ſumma logarithmorum D, F æqualis fuerit duplo logarithmi E, erunt rurfus D, E, F arith-

	I	00000	
	10	10000	
A	100	20000	D
B	1000	30000	E
C	10000	40000	F
	100000	50000	

meticè

metice proportionales ex eodem Lem.; & ex logarithmorum definitione, numeri A, B, C erunt geometricè proportionales. Patet ergo propositum.

Corollarium.

174. **H**inc e tribus numeris proportionalibus A, B, C datis duobus, tertius invenietur. Si hic tertius sit C, extremorum unus, a logarithmo duplicato E medii B, subtrahatur logarithmus D extremi dati; & habebitur logarithmus F tertii quæsitæ. Sin autem quæratür medius B, summa logarithmorum D, F extremorum bisecta dabit logarithmum E numeri quæsitæ.

	I	00000	
	IC	10000	
A	100	20000	D
B	1000	30000	E
C	10000	40000	F
	100000	50000	

PROPOSITIO III.

THEOREMA.

175. **C**um unitatis logarithmus est 0, summa ex logarithmis D, E numerorum A, B, multiplicandi, & multiplicantis, æquatur logarithmo F producti C.

Demonstratio. Cum enim in omni multiplicatione unitas ad numerum multiplicantem sit semper in eadem ratione, quam habet multiplicandus ad productum;

	I	0000	
A	10	1000	D
G	100	2000	H
B	1000	3000	E
C	10000	4000	F
	100000	5000	
M	1000000	6000	N

	I	0	
A	2	1	D
G	4	2	H
B	8	3	E
C	16	4	F
	32	5	
M	64	6	N

erunt

erunt unitas, & numeri A, B, C geometricè proportionales; & eorum logarithmi erunt æquidifferentes, per def.; ac propterea, per Lem. I., summa logarithmorum D, E æquabitur summæ logarithmorum F , & unitatis. Est autem logarithmus unitatis 0 ; erit igitur summa logarithmorum D, E soli logarithmo F æqualis, numeri nempe producti. Quod est propositum.

Scholion.

SI unitatis logarithmus esset aliquis numerus, a summa logarithmorum D, E auferri deberet logarithmus ipsius unitatis, ut habeatur logarithmus F producti. Cum autem ponatur 0 , sublevamur in calculis ab hac subtractione; ideoque multiplicatio instituitur sola logarithmorum additione; atque hæc est ratio, cur logarithmus unitatis statuatur 0 .

PROPOSITIO IV.

THEOREMA.

176. **S**I unitatis logarithmus sit 0 , logarithmus D cuiuscunque numeri A , duplicatus facit logarithmum H quadrati G ; triplicatus facit E logarithmum cubi B ejusdem numeri A .

Demonstratio sequitur ex præced. Cum enim duplicatio logarithmi D idem sit, ac additio, ex qua fit logarithmus H numeri G ; erit ipse numerus G factus ex multiplicatione ejusdem numeri A in se; sic enim summa logarithmorum multiplicandi, & multiplicantis æquatur logarithmo producti, per præced. Est ergo G quadratum ejusdem A . Quod est primum.

Jam verò logarithmus H cum duplus sit logarithmi D , ex hypothesi, erunt logarithmi D & H simul, tripli solius logarithmi D . Est autem ejusdem D triplus

plus etiam logarithmus E (ponitur enim ex logarithmo D triplicato fieri E); ac proinde logarithmus E æquatur duobus D, H simul; Quare numerus B producitur ex A in G, ut patet per præced., hoc est, ex radice in quadratum; ac propterea ejusdem A cubus est. Quod erat alterum.

Corollarium.

177. **H**inc ex logarithmo alicujus numeri quadruplicato fiet logarithmus biquadrati, seu quartæ potestatis ejusdem numeri; ex eodem quintuplicato fiet logarithmus quadrato-cubi, seu quartæ potestatis ipsius numeri; & ita, si ducatur per 6, 7, 8 &c., semper producetur logarithmus illius dignitatis algebraicæ, per cujus exponentem multiplicatus fuit logarithmus propositi numeri. Verùm hæc attigisse sufficiat in præsens.

P R O P O S I T I O V.

T H E O R E M A.

178. **P**osito unitatis logarithmo ciphra, seu 0, logarithmus F numeri dividendi C, æquatur logarithmis E & D simul, divisoris B, & quotientis A.

Demonstratio. Cùm enim eadem sit ratio unitatis

	I	0000		I	0
A	10	1000 D	A	2	1 D
G	100	2000 H	G	4	2 H
B	1000	3000 E	B	8	3 E
C	10000	4000 F	C	16	4 F
	100000	5000		32	5
M	1000000	6000 N	M	64	6 N

ad

ad quotientem A , quæ divisoris B ad dividendum C , ut patet ex def. divisionis; erunt unitas, & numeri A , B , C geometricè proportionales, & logarithmi unitatis & D , E , F proportionales arithmeticè ex def. Quare ex Lem. I. summa logarithmorum unitatis & F , hoc est, solus logarithmus F , æquabitur logarithmis E & D simul sumptis. Quod &c.

PROPOSITIO VI.

THEOREMA.

179. **E** Xistente unitatis logarithmo ciphra, si cujuspiam numeri M logarithmus N bisecetur, hoc est, ejusdem sumatur dimidium, proveniet E , logarithmus quadratæ radices B ; si capiatur tertia pars, habebitur H , logarithmus radices cubicæ G ejusdem numeri M .

Demonstratio. Quoniam logarithmus E duplicatus facit N , per hyp., erit (*n.* 176.) M quadratus numerus ipsius B , hoc est, B radix quadrata numeri M . Similiter, cum logarithmus H sit tertia pars logarithmi N , ex hypothesi idem H triplicatus faciet N ; ac proinde numerus M cubus erit ipsius G , sive G cubica radix numeri M . Quod &c.

Corollarium I.

180. **H** Inc, si cujuslibet numeri logarithmus dividatur per 4, 5, 6 &c., fiet logarithmus radices ejusdem numeri, denominatæ ab ea potestate, cujus exponens pro divisore sumptus fuerit.

Corollarium I I.

181. **E**X superioribus Propositionibus totus pendet logarithmorum usus in operationibus arithmeticis.

Multiplicatio. Si duo numeri vulgares multiplicandi sint inter se, eorum logarithmi simul additi, dabunt logarithmum producti (n. 175.).

Divisio. Si numerus aliquis per alium numerum dividendus sit, ex logarithmo dividendi dempto divisoris logarithmo, relinquetur logarithmus quotientis (n. 178.).

Formatio potestatum. Si numerus quilibet in se quadratè, vel cubicè ducendus sit, ejus logarithmus duplicatus, vel triplicatus gignet logarithmum quadrati, vel cubi (n. 176.).

Extractio radicum. Si numeri cujuspian quærat^rur radix quadrata, vel cubica, dimidium, vel tertia pars logarithmi ejusdem numeri, erit logarithmus radicis quæsitæ (n. 179.).

Scholion.

PRæcedentes operationes omnibus logarithmis sunt communes. Jam ad constructionem canonis logarithmici veniamus.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

182. *Scopum canonis logarithmici aperire.*

Resol. I. Logarithmorum calculus ad usus Trigonometriæ, & sinuum inveniendorum minimè esset accommodatus, si nihil aliud quæreret, quàm logarithmos eorum dumtaxat numerorum, qui forent in aliqua ex dictis progressionibus geometricis. Latiùs ad interjectos numeros extendatur oportet; ut in hisce etiam eadem operationes arithmeticæ, pari facilitate, ac brevitate exerceri possint.

II. Quia verò fas unicuique est progressionem quamlibet pro arbitrio seligere; hinc factum est, ut Auctores, qui tabulas condiderunt, progressionem decuplam 1, 10, 100 &c. assumpserint pro geometrica, ac numeros, qui se se invicem superent eodem semper excessu 10000000, pro arithmetica; commodiorem verò illam logarithmorum speciem invexerint, quæ ciphram ponit pro logarithmo unitatis, & unitatem cum aliquibus ciphris pro logarithmo denarii, eo consilio, ut, quos observavimus usus n. 14, 15, 16, in operationibus multiplicationis, & divisionis, derivari facillè possent in huiusmodi canonem logarithmicum.

<i>Progr. geom.</i>	<i>Progr. arith.</i>
1	0.00000000
10	1.00000000
100	2.00000000
1000	3.00000000
10000	4.00000000
100000	5.00000000
1000000	6.00000000

III. Denarii logarithmus *varius ponitur a diversis Auctoribus; prout etiam varius statuitur sinus totus, seu radius.* Cum enim logarithmi referantur ad inventionem sinuum, tangentium &c., ut ex dicendis pate-

bit, tantus debet esse denarii logarithmus, quantus ipse radius. Quare logarithmus denarii mihi erit 1.00000000; ut etiam communiter ab aliis assumitur.

IV. Logarithmi unitatis, & denarii dicuntur logarithmi *radicales*, quoniam sunt cæterorum logarithmorum radices; his enim statutis, reliquorum proportionalium logarithmi habentur per æquale incrementum; ac propterea non potest amplius mutari logarithmorum series; augentur namque logarithmi, sicuti crescunt in proportionalibus ipsæ proportionales. Quare, cum proportio 100 ad 1 duplicata sit proportionis 10 ad 1; & proportio 1000 ad 1 triplicata sit ejusdem proportionis 10 ad 1 &c.; logarithmus centenarii duplus esse debet logarithmi denarii, nempe, 2.00000000, & logarithmus millenarii, triplus, hoc est, 3.00000000 &c.

V. Prima logarithmorum figura puncto solet separari a reliquis figuris, & vocatur *Characteristica*, sive *Indicativa*; quippe quæ indicat, quot figuris post primam constet numerus integer absolutus, cujus est logarithmus. Quamobrem logarithmi numerorum ab 1 ad 10 exclusivè, characteristicam habent 0; a 10 ad 100 exclusivè, habent 1; a 100 ad 1000 exclusivè, habent 2; & ita deinceps; quippe *characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti, cui logarithmus respondet*; ut proinde, dato quovis numero absoluto, puta, 62075, quinque figurarum, statim sciatur, ejus logarithmo deberi 4 pro characteristicâ.

VI. Scopus itaque artificii, quo tabulæ logarithmicæ construuntur, eò tendit, ut inveniantur logarithmi omnium numerorum, qui sunt inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c. Qua in re illud observandum est, vulgares numeros alios dici *primos*, alios *compositos*. Primi numeri sunt, quos sola unitas metitur, seu, qui nullam habent partem, præter unitatem; ut sunt 2,

3, 5,

3, 5, 7, 11, 13 &c. Compositi verò sunt, quos præter unitatem numerus quispiam metitur; ut 4, 6, 8, 9 &c. Ad logarithmorum tabulas condendas sufficit inquirere logarithmos numerorum primorum; etenim ex his omnium compositorum logarithmi enascuntur, uti mox ostendam.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

183. **I**nvenire logarithmos omnium numerorum, qui primi vocantur, quique terminis progressionis geometricæ decuplæ interjecti sunt.

Resolutio. Oporteat invenire logarithmum numeri 3, qui, cum sit interjectus inter 1 & 10, postulat, ut ipsius logarithmus quæsitus, sit pariter interjectus inter logarithmos 0 & 10000000 numerorum 1 & 10. Quæratur itaque medius proportionalis geometricus inter 1 & 10, & pariter medius proportionalis arithmeticus inter 0 & 10000000, ut in Elementis Arithmeticæ præscribitur; ac toties repetatur hæc operatio inter alios, aliosque numeros (quod exemplo mox demonstrabimus), donec invenias logarithmum præcisè respondentem numero 3. Observandum præterea est, in hujusmodi operationibus toties radicem quadratam extrahi oportere; quia verò difficile est ex numeris tam parvis tot extrahere radices, quin incidas in residuum, quod tutò negligi non possit, ac proinde subsequentes operationes implicentur; docent numeris 1 & 10 adjiciendas esse, quot volueris, ciphras, puta, septem; quod perinde est, ac si uterque numerus multiplicaretur per 10000000, atque hac ratione intelligeretur divisus in partes decimales quàm minimas, eo consilio, ut fractiones, quæ in extractionibus radi-

cum negliguntur, nullum afferant sensibilem errorem. His animadversis

Sint A & Z hi duo numeri 1 & 10 septem ciphris aucti, qui inter se multiplicentur; & ab eorum producto 10000000000000000 extrahatur radix quadrata, vel magis proxima B 31622777. Hic numerus erit medius geometricus inter A & Z. Inveniatur pariter medius proportionalis arithmeticus inter logarithmos numerorum A & Z; quod obtinebimus (*n.* 169.), si addantur simul eorum logarithmi 00000000 & 10000000, quorum summa est 10000000, cujus semissis 05000000 erit medius arithmeticus, qui e regione ponitur medio geometrico B.

Jam verò, si nuper inventus medius geometricus B, foret 30000000, haberemus idipsum, quod quærimus; & medius arithmeticus 05000000 esset ipsius logarithmus. Cum autem medius geometricus B 31622777 major sit numero 30000000, oportet, ut inter hunc medium B majorem, & numerum A minorem quæratur medius geometricus C, & inter eorum logarithmos medius arithmeticus.

Secundus hic medius geometricus C minor utique est numero 30000000; sed ad eundem magis accedit, quàm numerus A. Itaque omisso numero A, quæratur tertio medius geometricus D, inter C & B; & in qualibet operatione quæratur pariter medius arithmeticus inter eorum logarithmos.

Hic tertius medius geometricus D adhuc minor est numero 30000000, cui tamen proximior est, quàm numerus C. Omittatur itaque C; quæraturque quartus medius geometricus E, inter D & B.

Cum autem quartus inventus medius geometricus E adhuc minor sit numero 30000000, quærendus inter E & B, quintus F; qui cum adhuc sit minor numero 30000000, eadem methodo quærendus inter F & B, sextus G.

Hic

	<i>Geometricè.</i>	<i>Arithmeticè.</i>		<i>Geometricè.</i>	<i>Arithmeticè.</i>
A	100000000	000000000	H	29961428	04765625
B	31622777	050000000	M	29995132	04770508
Z	1000000000	100000000	L	30028875	04775391
A	100000000	000000000	M	29995132	04770508
C	17782794	025000000	N	30011999	04772949
B	31622777	050000000	L	30028875	04775391
C	17782794	025000000	M	29995132	04770508
D	23713737	037500000	O	30003564	04771729
B	31622777	050000000	N	30011999	04772949
D	23713737	037500000	M	29995132	04770508
E	27384196	043750000	P	29999348	04771118
B	31622777	050000000	L	30003564	04771729
E	27384196	043750000	P	29999348	04771118
F	29427272	046875000	Q	30001456	04771423
B	31622777	050000000	O	30003564	04771729
F	29427272	046875000	P	29999348	04771118
G	30505279	048437500	R	30000402	04771271
B	31622777	050000000	Q	30001456	04771423
F	29427272	046875000	P	29999348	04771118
H	29961428	04765625	S	29996869	04771194
G	30505279	048437500	R	30000402	04771271
H	29961428	04765625	S	29999869	04771194
I	30232130	04804687	T	30000132	04771233
G	30505279	048437500	R	30000402	04771271
H	29961428	04765625	S	29999869	04771194
K	30096474	04785156	V	30000000	04771213
I	30232130	04804687	T	30000132	04771233
H	29961428	04765625			
L	30028875	04775391			
K	30096474	04785156			

Hic enim verò sextus G major est numero 300000000, sed minor numero B . Quamobrem quæraturs septimus medius geometricus H , inter F & G .

Atque ita deinceps, semper inquirendo medium geometricum inter proximè maiorem medium jam inventum, & proximè minorem ipso ternario, seu 300000000, quousque occurrat medius, qui ab eodem 3 nulla fractione differat, ac proinde post ipsum 3 omnes figuræ sint 0; & assignando simul cuicunque medio geometrico suum medium arithmeticum, seu logarithmum; nam inventus cùm fuerit dictus medius geometricus, ejus logarithmus pro ternarii logarithmo capiendus erit.

Igitur post decimam nonam operationem pervenietur ad medium geometricum V 300000000; cui respondebit medius arithmeticus 4771213, logarithmus ternarii inventus ad logarithmum denarii 10.00000000.

Corollarium.

184. **S**imili artificio habebis omnium numerorum 2, 5, 7, qui vocantur primi, logarithmos interjectos inter 1 & 10; pariter logarithmos numerorum primorum, nimirum, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, qui interponuntur inter 10 & 100; ac denique logarithmos eorum, qui sunt inter 100 & 1000.

Nam logarithmi numerorum primorum, qui excedunt numerum 1000, facile invenientur additione simplici, citra erroris sensibilis periculum; uti mox ostendam.

Scholion.

IN tabulis supputandis non est necesse eam, quam exposuimus, methodum adhibere, nisi in numeris primis; nam in iis numeris, qui ex aliorum multiplicatione oriuntur, quique dicuntur compositi, satis erit logarithmos componentium addere, ut habeatur logarithmus producti; quod statim demonstrare pergam.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

185. **I**nvenire logarithmos omnium numerorum compositorum.

Resolutio. Inventis logarithmis omnium primorum usque ad 1000, multò facilius invenientur logarithmi omnium numerorum ex illis compositorum. Nam, si duo numeri primi, multiplicatione alium componant, logarithmi componentium simul additi dabunt logarithmum compositi, seu producti. Et contra, si a logarithmo numeri compositi subducatur logarithmus unius numeri componentis, relinquetur logarithmus alterius componentis, seu quotientis; ut dictum est n. 175. & 178.

Itaque, si a dato logarithmo numeri 10 subducatur logarithmus, quem pono inventum, numeri 5, residuum erit logarithmus numeri 2.

Si logarithmus numeri 2 addatur logarithmo numeri 3, habebitur logarithmus numeri 6.

Et quoniam quaternarius binarii quadratus est, & octonarius, ejusdem cubus; logarithmus binarii duplicatus, erit quaternarii logarithmus, triplicatus autem, octonarii (n. 176.).

Ita quoque logarithmus ternarii duplicatus, erit novenarii logarithmus. Et summa logarithmorum, numero-

merorum 3 & 4, erit logarithmus numeri 12; atque ita procedendo, ex logarithmis numerorum primorum invenies logarithmos numerorum compositorum.

Scholion.

H*Oc artificio supputatæ sunt tabulæ logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 100000; sed hæ majoris formæ volumen implent. In libellis, qui vulgò solent circumferri, producuntur tabulæ usque ad 10000. Nos ad calcem hujus partis, logarithmorum tabulas adjecimus ab 1 ad 1000, ne voluminis moles augeatur; ac præterea, quòd hæ ad instituti nostri rationem satis essent. Ne tamen Tirones lateat artificium, quo hujusmodi tabulæ continuari possint ad quemcunque numerum, etiam faciliore methodo pro numeris primis, sit*

P R O P O S I T I O X.

P R O B L E M A.

186. **C***Ognitis logarithmis omnium numerorum ab 1 usque ad 1000, canonem logarithmicum producere usque ad 10000, ad 100000 &c.*

Resolutio. Observetur priùs oportet, hanc esse numerorum indolem, ut, quòd majores sunt, eò minus habeant numerorum, qui primi vocantur. Nam ab 1 usque ad 1000 interjecti sunt 169 numeri primi; & a 1000 usque ad 2000, dumtaxat 135; & a 2000 usque ad 3000, adhuc minores 127; atque ita deinceps diminutione continua; ita ut a 9000 ad 10000 intercipientur tantummodo 110 numeri primi.

Ex quo sequitur, pro quovis numero primo haberi semper septem, aut octo numeros compositos. Verum quidem est, eosdem non esse proportionaliter dispositos, aut interjectos cuilibet numero primo; sed illud
semper

semper observabis, quatuor saltem, aut quinque numeros compositos vel antecedere, vel subsequi continuo quemlibet numerum primum.

His animadversis, constructaque jam tabula logarithmica omnium numerorum naturalium ab 1 usque ad 1000, ut docuimus n. 184. & 185., hæc eadem continuari poterit a 1000 ad quemlibet alium numerum, hoc artificio.

I. E regione cujusvis numeri compositi collocentur logarithmi, qui ad eundem spectant; & invenientur per præced. Probl.

II. His positis, vacuæ remanebunt cellulae logarithmorum, qui numeris primis respondere debent, inter quos, aut supra, aut infra, semper habebuntur quatuor, aut quinque logarithmi numerorum compositorum, serie non interrupta, ut jam diximus.

III. Sedulo examinetur, quantum augeantur iidem logarithmi; notabisque hoc idem incrementum semper diminui certa quadam quantitate, quæ non est semper eadem, sed quæ non nisi unitate variare debet.

IV. Quamobrem, cognita differentiâ, quæ perpetuo regnat inter logarithmos inventos numerorum compositorum, decerni statim poterit, quantum hæc diminuenda sit, ut inveniantur logarithmi numerorum primorum.

Exemplum. Pone jam inventos logarithmos numerorum naturalium 1000 usque ad 1008, ut in sequenti tabula; sitque inveniendus logarithmus numeri primi 1009.

Si logarithmi inventi invicem subtrahantur, alter ab altero, hoc est, logarithmus numeri 1000 a logarithmo numeri 1001, atque ita deinceps, usque ad 1008, notabis differentias logarithmorum diminui certa quadam quantitate, quæ variat inter 4 & 5.

Quare, si differentia 4310 (logarithmi numeri

1007 a logarithmo numeri 1008) diminuatur quantitate 4, qua differentiæ decreſcunt, & reſiduum 4306 addatur logarithmo numeri 1008, ſumma erit logarithmus numeri primi 1009; qui logarithmus deſerat inter 1008 & 1010.

Subduci deinde poterit logarithmus numeri 1009 a logarithmo ſubſequentis 1010, atque ita deinceps, ut conſtet, an logarithmorum differentiæ decreſcant eadem quantitate. Hac methodo logarithmos numerorum primorum facile obtinebimus; quin imò, ſi quis error irreperſerit in logarithmos numerorum compoſitorum, hac notatione deprehendetur.

<i>Numeri naturales</i>	<i>Logarithmi</i>	<i>Differentiæ</i>
1000 - - -	300000000	
		- - - 4341
1001 - - -	30004341	- - - 5
		- - - 4336
1002 - - -	30008677	- - - 4
		- - - 4332
1003 - - -	30013009	- - - 4
		- - - 4328
1004 - - -	30017337	- - - 4
		- - - 4324
1005 - - -	30021661	- - - 5
		- - - 4319
1006 - - -	30025980	- - - 4
		- - - 4315
1007 - - -	30030295	- - - 5
		- - - 4310
1008 - - -	30034605	
	4306 - - -	
1009 - - -	30038911	

OBSERVATIO I.

187. **Q**uid causæ sit, cur numeri progressionis decuplæ 1, 10 &c., totidem ciphris augeantur, quot logarithmus denarii.

Cùm nuper quæreremus logarithmum ternarii, interjecti inter 1 & 10, iussimus, utrique addi oportere 7 ciphras; quod perinde est, ac si uterque multiplicaretur per 10000000, ac proinde reduceretur in partes decimales quàm minimas, hoc pacto, $\frac{1.00000000}{10000000} = 1$,

$\frac{10.00000000}{10000000} = 10$ &c. Ratio est, quia numerorum, qui

in dicta progressionem decupla non continentur, logarithmi accurati haberi non possunt; adhibitis tamen fractionibus decimalibus, adeo veris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant.

Quod ut superiore exemplo intelligas, cùm quærimus logarithmum, puta, ternarii, nil aliud quærimus, quàm logarithmum alicujus medii proportionalis inter 1 & 10, qui ad ternarium quàm maximè accedat.

Itaque inter 1.00000000 & 10.00000000 quæsitus medius proportionalis est B 3.1622777 (Tab. pag. 151.), & inter eorum logarithmos inventus medius arithmeticus 0.50000000, qui erit logarithmus ipsius B, hoc est, numeri ternarium superantis fractione decimali

$\frac{1622777}{10000000}$. Figuræ namque, puncto ad dexteram separatæ,

sunt numerator præscriptæ fractionis, cujus denominator 10000000 refertur ad omnes alios numeros; quare me-

dius B 3.1622777 legendus est $3 \frac{1622777}{10000000}$; & rursus me-

dius T 3.0000132 legendus $3 \frac{132}{10000000}$. Numerus ille

integer

integer decimalibus præfixus, vocatur logarithmi characteristica, ut dictum est. Sic continua inquisitione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui sint proximè majores, & minores, quàm 3, devenitur tandem ad numerum $3.00000000 = 3 \frac{0000000}{10000000}$, qui vel ne unà quidem millionesimà differat a 3; atque hinc ejus logarithmus numero 3 attribuitur citra errandi periculum.

Itaque tabulæ, quæ construuntur, nil aliud exhibent, quàm *veris quàm proximos logarithmos numerorum, qui medii sunt inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c.*, inquirendo semper medios proportionales veris quàm proximos, & eorum logarithmos.

OBSERVATIO II.

188. **L**eges characteristicæ in tabulis logarithmicis.

In hac logarithmorum forma notabis, si tabulas consulas, logarithmos numerorum ab 1 ad 9 habere characteristicam 0, cum aliquot decimalibus adjunctis. Sic numeri 3 invenietur in tabulis logarithmus 0.4771213. At, qui sequuntur a 10 usque ad 99, habebunt pro characteristica unitatem decimalibus auctam; a 100 ad 999 characteristicam 2 cum partibus decimalibus; & ita porro. Sic numeri 15 logarithmus 1.1760913: pariter numeri 171 logarithmus 2.2329961. Hinc,

I. Omnis quantitas, quæ designatur unitate, & quolibet ciphRARUM numero, puta, 100, 1000 &c., habet in logarithmi characteristica tot unitates meris ciphRIS præfixas, quot ipsa ciphRAS. Sic numeri 100 logarithmus 2.00000000, numeri 1000 logarithmus 3.00000000.

II. Quilibet alius numerus tot habet pro characteristica

rística unitates decimalibus præfixas, quot ipse notis constat, unâ demptâ. Sic numeri 897 logarithmus 2.9527924; & sic deinceps.

III. Hinc dato quovis numero absoluto, puta, 62075, quinque figurarum, statim innotescere potest, ejus logarithmo deberi 4 pro characteristica.

IV. Hinc etiam omnes numeri in ratione decupla eundem habent logarithmum, præter characteristicam; uti ex apposita tabula perspicuum est.

V. Hinc etiam logarithmi numerorum, puta, 20, 30, 40, 50 &c., vel 100, 300, 400, 500 &c., decuplam, vel vigecuplam, vel centuplam &c. proportionem habentium ad numeros 2, 3, 4, 5 &c., expeditissimè innotescunt, mutata dumtaxat characteristica logarithmorum numerorum 2, 3, 4, 5 &c.

<i>Proport.</i>	<i>Logarithmi</i>
3	0.4771213
30	1.4771213
300	2.4771213
3000	3.4771213
30000	4.4771213 &c.

OBSERVATIO III.

189. **C**Ur logarithmus denarii augendus sit tribus saltem ciphris, ut logarithmi aliorum numerorum inveniantur.

Denarii logarithmus varius ponitur a diversis Scriptoribus; prout etiam varius statuitur sinus totus, five radius. Cum enim reperiantur logarithmi respectu sinuum, tangentium &c., ut ex dicendis constabit, tantus esse debet denarii logarithmus, quantus ipse radius. Logarithmus denarii nobis est 1.00000000; ut etiam communiter ab aliis assumitur.

At pro inveniendis logarithmis aliorum numerorum, ipse logarithmus 1.00000000 augendus est tribus saltem ciphris (quemadmodum in inventionem sinuum auctus

auctus fuit ipse radius), ut fiat 1.00000000.000; juxta quem logarithmum reperiendi sunt omnes alii logarithmi, qui postea tot figuris sunt mutilandi (addendo unitatem residuo, ubi opus fuerit, non secus ac de finibus advertimus), quot ciphrae fuerunt adjunctae ipsi denarii logarithmo; tum in tabulas ordinandi.

Quod ut exemplo intelligas, finge tibi quærendum esse methodo superius descripta, septenarii logarithmum ad logarithmum denarii 1.00000000, prout scribitur in tabulis. Sanè, cum numeri sint minores, longè brevius, ac facilius ipsummet assequeris 0.8450980, quàm si ad denarii logarithmum 1.00000000.000 tribus ciphris auctum, quæras ejusdem septenarii logarithmum 0.8450980.400. At primum minùs idoneum statim judicabis ad reliquos logarithmos, qui ex eo nascuntur, pro tabulis construendis. Etenim logarithmus septenarii 0.8450980, quadruplicatus facit numeri 2401 logarithmum 3.3803920; at ejusdem septenarii logarithmus 0.8450980.400 pariter quadruplicatus gignit ipsiusmet numeri 2401 logarithmum 3.3803921.600, hoc est, 3.3803922; prout in tabulis majoribus exhibetur.

Ratio est, quia tres ultimæ figurae 400 ad dexteram in logarithmo septenarii, quæ fractionem $\frac{400}{1000}$ constituunt, in multiplicationis processu ad unitatem, binarium, & ultra ascendere possunt.

Inveniendi sunt igitur omnes logarithmi ad denarii logarithmum 1.00000000.000; e quibus postea abjiciendæ sunt tres ultimæ figurae, ut perfectiores tabulae habeantur.

OBSERVATIO IV.

190. **C**ur logarithmi sine ullis fractionibus in canone disponi possint; cum tamen sæpe fractiones continere deberent.

Ratio est, quia omnis error, qui in logarithmis majoribus ad unitatem non perveniat, potest negligi; quippe qui tam parva pars est sui totius, ut evanescat. Ex quo sequitur, quod, si alicui numero addantur quotlibet ciphrae, error in illo additamento factus, negligi possit.

Exemplum. Sit numerus 10000000, cui addamus majoris accuratationis gratià, duas ciphras 10000000.00; deinde operemur, quasi nullum punctum interjectum foret; sitque aliquis error in duabus ultimis ciphris adjectis; Dico tutò negligi posse errorem illum. Nam ille error perveniet tantum ad aliquot centesimas partes illius numeri; dum enim numero 10000000 addimus duas ciphras, eundem multiplicamus per 100; ergo, si post illam interpunctionem sit aliquis numerus, erit tantum fractio; puta, 10000000.04, erit $10000000 \frac{4}{100}$, quæ ad unitatem non pertingit, ac proinde negligi potest. Negligi autem non debet, dum quis tabulam logarithmorum construit, uti notavimus, ne hic error sæpius repetitus, tandem aliquid notabile efficiat. Quare tabulà completà rejiciuntur omnes fractiones.

Corollarium I.

Hinc accuratissimus erit canon logarithmicus, si logarithmus denarii augeatur ne dum tribus, sed etiam septem ciphris, distinctis interpunctione aliqua.

Corollarium II.

Sequitur, quòd sufficienter cognoscitur quantitas aliqua respectu tabulæ construendæ, si dicatur, *esse minor aliquo numero maximo cognito, & major alio numero maximo pariter cognito*. Utì, si dicatur, aliqua quantitas esse major numero 999999.00000004, & minor numero maximo 999999.00000006, ita ut tota differentia sit post interpunctionem; hæc erit sufficienter cognita respectu tabulæ, quæ negligit fractiones, seu quidquid post interpunctionem ponitur. Nam in hoc casu dicerem, quantitatem illam esse 999999. Ita Archimedes, posita diametro circuli 497, definivit, circumferentiam esse inter terminos 1562 & 1561, hoc est, majorem 1561, & minorem 1562.

Corollarium III.

Hinc etiam in usu ordinario calculi subducuntur duæ ultimæ ciphre a quolibet logarithmo, ut brevior supputatio evadat, dum residuo, hoc est, minore numero utimur in reliquis operationibus; nisi forte omni accuratione opus sit; utì usuvenit in calculis astronomicis. Qua in re illud idem observandum, quod monuimus in calculo finuum; nam, *si duæ ultimæ ciphre, quæ subducuntur, plus valeant, quàm 50, addenda erit unitas ultimæ ciphre residui logarithmi, ut exactior sit calculus; si minùs valeant, quàm 50, nihil erit addendum residuo; si præcisè valeant 50, pro libito addi poterit unitas residuo, vel non addi; quemadmodum in logarithmo 1.8388491, qui respondet numero 69, sumi potest 1.83885; quippe duæ postremæ ciphre 91 plus valent, quàm 50.*

Ratio hujus praxis derivatur ex valore ciphRARUM crescentium in proportionem decupla, a dextra ad sinistram procedendo. Nam hinc sequitur, quòd, si duæ
ciphre

ciphrae ablatae efficiant plus, quam 50, earum valor excedet semissem unitatis ciphrae sequentis in tertia sede; si minus, quam 50, minus etiam valeant semisse unitatis; denique, si praecise sint 50, exacte adaequent semissem ciphrae sequentis. Itaque in nostro exemplo, adjecta unitate numero 4, logarithmus 1.83885 erit proximior vero.

OBSERVATIO V.

191. **L**ogarithmus cujusvis numeri indicat, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem, & ipsum numerum, sive designat distantiam, quam habet idem numerus ab unitate.

Ad uberiores logarithmorum notitiam censeo diligenter observanda, quae acute notat Bonaventura Cavallerius parte 1. Trigon. n. 25. In progressionem A numerorum geometricè proportionalium, intelligi debent alii, atque alii numeri continuè proportionales, in ratione quidem minima, ita ut inter unitatem, & denarium concipiantur tot proportionales, quot sunt unitates in logarithmo denarii, una dempta, nempe in hac tabula, 9999999. Quo fiet, ut proportio, quam habet 1 ad 10 per praedictos terminos 9999999 proportionales intermedios, divisa sit in intervalla, seu proportiunculas 10000000, tot nimirum, quot sunt unitates in logarithmo denarii; atque adeo ab unitate usque ad denarium numerabuntur 10000000 termini minimi proportionales.

Cum autem eadem sit proportio 10 ad 100, quae 1 ad 10, inter 10 & 100 cadent alii 9999999 termini continuè proportionales cum primis. Et ob eandem rationem inter 100 &

A	B
1	0.00000000
10	1.00000000
100	2.00000000
1000	3.00000000
10000	4.00000000
Prop.	Logarithmi.

1000, item inter 1000 & 10000 &c. alii 9999999.

Quamobrem ratio 10 ad 100 divisa erit rursus in 10000000 proportiunculas; atque ita ratio 100 ad 1000 in alias 10000000 &c. Hinc ab 1 usque ad 100 erunt dictarum proportionum 20000000; & usque ad 1000, erunt 30000000; quantus scilicet est logarithmus centenarii, millenarii &c.

A	B
1	0.00000000
10	1.00000000
100	2.00000000
1000	3.00000000
10000	4.00000000
Prop.	Logarithmi.

Ex quo jam patet, *logarithmum cujusvis numeri indicare, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem, & ipsum numerum*, sive indicare distantiam, quam habet idem numerus ab unitate. Ita quidem denarius distat ab 1 per 10000000 proportiunculas, centenarius per 20000000 &c., unusquisque scilicet per suum logarithmum.

At spectatà dumtaxat primà logarithmorum figurà, 0, 1, 2, 3 &c., quæ appellatur characteristica, habetur quidem distantia cujusque numeri ab unitate, sed per integras proportionales decuplas, hoc est non divisas in 10000000 proportionales; totum enim idem est, ac omnes ejus partes simul sumptæ.

OBSERVATIO VI.

192. **Q**uo pacto logarithmi numerorum etiam naturalium 2, 3, 4, 5 &c. sint indices, saltem quàm proximè, proportionum minimarum, quæ inter unitatem, & numerum quemvis interjiciuntur.

Cum enim inter 1 & 10 sint alii octo numeri naturales, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; & inter 10 & 100 medient alii 89, nempe 11, 12, 13 &c.; item inter 100 & 1000 alii 899, & ita deinceps; hi quoque in illa eadem serie numerorum proportionalium in ratione

ne minima imaginandi sunt, eisdemque sui assignandi logarithmi, quamvis in nullum dictorum proportionalium coincident. Pro logarithmo autem cujuslibet numeri naturalis intermedii, puta, binarii, assumetur logarithmus illius minimi proportionalis, qui maxime ad binarium accedat. Pariter pro logarithmo quinarium capiendus erit, absque erroris suspitione, logarithmus alicujus numeri eorundem proportionalium, qui a quinario insensibiliter differat; & sic de aliis.

Quare logarithmus etiam ejusdem binarii erit index, sed proximus, proportionum minimarum, quæ inter 1 & 2 interjiciuntur; alterius verò cujusvis numeri supra denarium, puta, 47, logarithmus 1.6720978 indicare potest, ab 1 usque ad 47 interjici 1.6720978 proportionem minimas, vel etiam indicare integram proportionem decuplam (propter characteristicam 1) cadere inter 1 & eundem 47, ac præterea proportionunculas 6720978.

De Usu Tabularum.

EXploratà logarithmorum naturà, & origine, reliquum jam est, ut doceam, quomodo dato numero, ejus logarithmus inveniatur, vel contra; & quomodo tabulæ ultra suos limites extendi possint.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA.

193. **D**ato numero absoluto non excedente 1000 maximum tabularum, ejus logarithmum e tabulis elicere.

Resolutio. Numerus datus vel est integer, vel fractus, vel integer cum fracto.

Casus I.

SI sit *integer*, eoque minor, ad quem tabulæ perti-
gunt, is quærat in sinistra columna ordinum,
ubi notatur littera N; & in dextera ejusdem ordinis
e regione occurret ejus logarithmus quæsitus. Ut nu-
meri 934 reperietur logarithmus 2.9703469; & nu-
meri 171 logarithmus 2.2329961; & sic de aliis.

Casus II.

SI numerus, cujus quæritur logarithmus, fuerit *fra-
ctio simplex*, cujus tam numerator, quàm denomi-
nator non excedant 1000, uti fractio proposita $\frac{5}{8}$, $\frac{13}{14}$;
quærat in tabulis logarithmus utriusque; & a loga-
rithmo numeratoris auferatur logarithmus denominato-
ris: differentia erit logarithmus fractionis.

Demonstratio. Nam in omni fractione, uti osten-
sum est in Commentariis Arith. univers., denominator
est ad numeratorem, ut unitas ad fractionem; ergo
summa logarithmorum denominatoris, & fractionis
æquabitur (*n.* 168.) summæ logarithmorum numerato-
ris, & unitatis, hoc est, soli logarithmo numerato-
ris, cum unitatis logarithmus sit 0; quare, si a loga-
rithmo numeratoris auferatur logarithmus denomina-
toris, remanebit logarithmus fractionis.

Quod autem differentia duorum logarithmorum
numeratoris, & denominatoris sit logarithmus fractio-
nis, sic etiam, in gra-
tiam Tironum, aliter
declaratur. Sit hæc
fractio proposita $\frac{5}{8}$,
quæ, ut constat ex
Arith., est quotiens

<i>Proportionales</i>		<i>Logarithmi</i>
Denominator	8	0.9030900
Numerator	5	0.6989700
Unitas	1	0.0000000
Fractio	$\frac{5}{8}$	— 0.2041200

divisio-

divisionis, in qua 5 divideretur per 8. Si enim 5 numeri essent dividendi inter 8, quilibet $\frac{5}{8}$ quinque octavas accipere deberet; ergo (n. 178.) logarithmus divisoris 8, & quotientis $\frac{5}{8}$ æquatur logarithmo divisi, nempe 5; ergo, si ex logarithmo numeri 5 auferas logarithmum numeri 8, restabit logarithmus quotientis, idest, fractionis; cum eadem sit ratio unitatis ad quotientem, quæ divisoris ad dividendum.

Monitum.

194. **S**I fuerit fractio propriè dicta, in qua denominator excedat numeratorem, logarithmus denominatoris major erit logarithmo numeratoris; ac proinde ille ex hoc subtrahi non potest. Vicissim ergo minor logarithmus numeratoris, a majore logarithmo denominatoris subducatur; & differentia, seu residuum, erit adhuc logarithmus propositæ fractionis; dummodo huic residuo præponatur nota —, more Analystarum, qua nota — significetur hoc residuum esse numerum defectivum, & minorem, quàm nihil; uti factum vides in superiore tabella, in qua logarithmus fractionis $\frac{5}{8}$ notatur — 0.2041200.

Quod autem logarithmus fractionis propriè dictæ sit semper numerus defectivus, sic facilè ostenditur. Nam fractio quælibet minor est unitate; ergo ejus logarithmus minor est logarithmo unitatis, hoc est, minor quam 0. Numeri autem infra 0 descendentes, sunt numeri defectivi, minores nihilo; notanturque singuli signo —; hinc, quod minor est fractio, eò major est logarithmus defectivus; quoniam major est distantia minoris fractionis ab 1, quàm majoris.

Corollarium.

195. **H**inc fractiones omnes, quibus *unitas est pro numeratore*, habent logarithmum ipsissimum denominatoris; puta, fractionis $\frac{1}{12}$ logarithmus idem est, ac logarithmus duodenarii, sed cum hoc discrimine, quòd logarithmus duodenarii est numerus positivus, cui præponitur signum + 1.0791812; fractionis autem $\frac{1}{12}$ logarithmus est — 1.0791812 numerus defectivus.

Quotiescunque autem addendus est logarithmus fractionis alicui alio logarithmo, vel subtrahendus; additio, vel subtractio institui debet juxta leges signorum + & —, de quibus Scriptores Algebræ tractare solent, & in nostris Comment. Tom. I. n. 19. 26. fusiùs egimus.

Casus III.

196. **S**I numerus integer *fractionem habeat adjunctam*, cape logarithmum integri, ejusque differentiam a logarithmo proximè sequenti; tum regula trium sic erit instituenda. Si numerus integer augetur unitate, ejus logarithmus augetur inventà differentià; cùm ergo augeatur dumtaxat datis partibus unitatis, quantò major evadet ejus logarithmus? Hoc incrementum invenies per regulam trium, quod additum logarithmo integri, dabit logarithmum compositi ex integro, & fractis.

Exemplum. Si quæratür logarithmus numeri 257,

III
325,

^{III} 325, integri cum adnexa fractione decimali $\frac{325}{1000}$, quære ex tabulis logarithmum numeri integri unitate majoris 258; & ex eo subtrahe logarithmum numeri 257: invenies differentiam 16866; tantum nempe crevit logarithmus, ubi numerus respondens augetur unitate. At in nostro casu augetur non quidem 325 unitatibus, sed 325 millesimis partibus unitatis; unde sic erunt termini ordinandi. $1:16866::\frac{325}{1000}$ ad quartum, quem, minutiis contemptis, invenies 5481. Tantum ergo crevit logarithmus numeri 257, ob additas eidem numero fractiones decimales datas $\frac{325}{1000}$; quare logarithmo numeri 257 adde incrementum 5481; & habebis numeri 257, ^{III} 325 logarithmum = 2.4104812 quàm proximè.

Scholion I.

197. **Q**Uamvis logarithmorum differentie, numerorum differentiis non sint proportionales, tamen ab ea proportionem tam parum aberrant in differentiis exiguis, cujusmodi hæ sunt, ut pro talibus haberi possint, sine ullo sensibilis erroris periculo.

Scholion II.

198. **Q**Uòd si interdum commodius sit, integrum numerum per fractionis denominatorem multiplicare, ita ut tota quantitas simul collecta evadat fractio impropria, commodius etiam invenietur ejus logarithmus, subducendo logarithmum denominatoris a logarithmo numeratoris. Sic, si quærat^r log. numeri $9\frac{1}{3}$, fiat

$$\frac{28}{3}$$

$\frac{28}{3}$; & a log. numeri 28 aufer log. numeri 3; & habebis 0.9700367 log. numeri $9\frac{1}{3}$.

Scholion III.

199. **S**I fractio sit decimalis, notabis in ea semper subaudi denominatorem constantem unitate, ac totidem ciphris, quot sunt in ipsa notæ decimales. Itaque hujus denominatoris logarithmum subtrahere a logarithmo numeratoris; & signum — negativum differentię præfigens, habebis logarithmum fractionis decimalis. Si quæritur logarithmus fractionis decimalis 0.194, aufer logarithmum numeri 194 a logarithmo numeri 1000 (hic enim est denominator ejus fractionis); & habebis logarithmum — 0.7121983 fractionis 0.194.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

200. **D**ati numeri excedentis 1000, maximum tabularum, quibus uteris, invenire logarithmum vero proximum.

Resolutio. Si numerus datus, cujus quæritur logarithmus, major sit numero 1000, maximo scilicet tabulæ, dividatur numerus major, quàm 1000, per divisores 10, 100, 1000, donec quotiens proximè minor sit, quàm 1000; si enim adhuc ille quotiens major esset, divideretur ulterius, donec non plus valeat, quàm aliquis eorum numerus, qui in tabulis continentur. Hujus quotientis quæritur logarithmus, cui addatur logarithmus divisoris 10, vel 100, vel 1000; hoc

hoc est, compendiosè, *quotientis characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt ciphrae in divisore*. Quod si duplex facta fuerit divisio, addatur bis logarithmus illius numeri, per quem facta est divisio; summa logarithmorum, qui in tabula continentur, divisoris, & quotientis, æquabit logarithmum numeri dividendi, excedentis 1000.

Demonstratio pendet ex n. 178.

Exemplum I. Si datus numerus 5430 dividatur per 10, prodibit quotiens 543 minor, quàm 1000: hujus quotientis logarithmus in tabulis inventus, est 2.7347998; cui addito 1.0000000 logarithmo divisoris 10, nempe auctà characteristica, unitate, fiet 3.7347998, logarithmus quæsitus numeri 5430.

Exemplum II. Si numeri 453307 quæraturs logarithmus, dividatur per 1000, fietque quotiens $453\frac{307}{1000}$: hujus numeri habentis adhærentem fractionem, quæraturs logarithmus (n. 196.), qui addatur logarithmo numeri 1000, nempe auctà characteristica ternario; & prodibit logarithmus numeri propositi.

Paucis, hujus regulæ praxis huc tandem redit. *Ex numero dato tot notas, puncto interjecto, resecta, quot opus est, ut evadat proximè minor numero 1000 maxima tabulæ; tum ejus logarithmus inquiratur, non aliter, quàm si propositus numerus ex integris, & decimalibus constaret, uti factum est n. 199. Logarithmi sic inventi characteristicam tot unitatibus auge, quot in dato numero notæ pro decimalibus sunt habitæ; & habebis logarithmum quæsitum.*

Exemplum III. Numeri 257325 quæraturs logarithmus. Punctum infere post 257, ut fiat 257.325, cujus numeri cum adnexa fractione decimali invenies logarithmum 2.4104812; & quia tres notæ ab integro resectæ sunt, & pro decimalibus habitæ, adde 3 hujus characteristicae;

sticæ; & habebis numeri dati 257325 logarithmum 5.4104812.

Operationis ratio facilè intelligitur. Etenim, dum integri numeri notas aliquas ad ordinem decimalium deprimimus, perinde facimus, ac si illum divideremus per numerum constantem unitate, & totidem ciphris, quot sunt depressæ notæ. Redibit autem numerus ad priorem quantitatem, si illum per eundem numerum multiplices, per quem divisus est; eritque $257.325 \times 1000 = 257325$. Hæc autem multiplicatio fit additione logarithmorum quotientis, & divisoris.

Exemplum IV. Si daretur numerus 25732.5^I, cum adnexa fractione decimali, quoniam duas tantum ex integro notas deprimere ad decimales necesse est, perinde erit, ac si illum divideres per 100; quare, invento, ut antea, logarithmo numeri 257.325^{III}, ejus characteristica duabus tantum unitatibus augenda esset; & haberemus numeri dati 25732.5^I logarithmum 4.4104812.

Scholion I.

201. **N**otandum tamen, quod, si datus numerus ita numeros tabularum excedat, ut plusquam duplo plures notas habeat, logarithmi hac methodo inventi, non satis erunt accurati; cum proxima sit, non accurata, ea proportio, in qua regulæ trium usus innititur. Quare in his casibus satius est tabulas consulere, quæ ad majores numeros pertingunt.

Scholion II.

202. **S**i numerus datus, cujus quæritur logarithmus, sit compositus, & innotescat, qui numeri eum producant, addantur logarithmi numerorum producentium; & habebitur dati numeri logarithmus. Ut, si detur ma-
ximo

ximo tabulæ major numerus 36480, qui oritur ex multiplicatione numerorum 304 & 120; quærat^{ur} logarithmus utriusque: eorum summa est logarithmus numeri 36480. Hæc tamen operatio supponit, datum numerum esse compositum, ac præterea, quod factores eundem producentes cognoscantur; at regula in Problemate proposita, & universalior est, & multò facilior.

Scholion III.

203. **S**I ex notis arithmeticis dati numeri subducantur una, duæ, vel tres &c., initio fact^o a dextra; perinde est, ac si idem numerus divideretur per 10, vel 100, vel 1000 &c. Notæ arithmeticæ, quæ sinistrorsum remanent, sunt quotiens, & illæ, quæ dextrorsum subducuntur, sunt numerator fractionis, habentis pro denominatore aliquem ex divisoribus 10, 100, 1000 &c., prout subducuntur una, vel duæ, vel tres notæ.

Scholion IV.

204. **I**Nventio logarithmi alicujus numeri supra 1000, nihil est aliud, nisi extensio tabularum ad numeros majores, quàm 1000; intra quem numerum tabulam nostram circumscripsimus, ne plus æquo excresceret. Est autem in hac extensione animadversio non vulgaris habenda. Nam logarithmi tabularum computati ad denarii logarithmum 1.00000000, respectu maximorum numerorum sunt parvi; hinc fit, quod, cum eorum differentie semper decrescant, ut patet, in hac extensione tandem evanescant, & logarithmi ad æqualitatem reducantur. Hac de causa nullam habebunt differentiam logarithmi numerorum, puta, 2656385774 & 2656385775; est enim utriusque logarithmus 9,4242911.

At si logarithmi tabularum respicerent logarithmum denarii 1.00000000.000, tunc eorundem numerorum logarithmi aliquam ostenderent differentiam; esset namque
numeri

numeri 2656385774 logarithmus 9.4242911.457; & numeri 2656385775 logarithmus 9.4242911.459. Itaque, nisi maximi numeri valde differant, eorum logarithmi ad denarii logarithmum 1.00000000 sunt æquales. Quapropter, si daretur numerus quindecim, viginti figurarum, vel amplius, sufficeret pro ejus logarithmo sumere logarithmum primarum ad summum decem figurarum.

Scholion V.

HActenus, dato numero, ejus logarithmus quæsitus est; superest, ut dato logarithmo, numerus investigetur.

PROPOSITIO III.

PROBLEMA.

205. **D**ato logarithmo non excedente 3.00000000, maximum tabularum, ad quem canonis logarithmici extensio continuata ponatur, invenire in eodem canone numerum eidem respondentem.

Casus I.

Quoniam propositus logarithmus non excedit maximum tabularum numerum, quæratur logarithmus datus inter posteriores logarithmos, hoc est, a logarithmo numeri 100, usque ad logarithmum numeri 1000: jam, si idem logarithmus præcisè occurrat, e regione ipsius in sinistra columna invenies numerum ei congruentem. Ut logarithmi 2.7371926 numerus erit 546, si ductum sequaris characteristicæ, & notarum proximè sequentium.

Casus II.

SIn autem non inveniatur exactè, sed inveniatur dumtaxat in tabulis logarithmus in reliquis æqualis, exceptà tamen characteristica, ut si proponeretur logarithmus 2.6893089, qui non inveniretur in tabulis, sed tantùm inveniretur 3.6893089, ita ut tota differentia sit in characteristica; numerus respondens huic ultimo, est, ut supra, 4890. Certum est autem, numerum respondentem logarithmo dato, cujus characteristica est 2, inveniri inter 100 & 1000; unde abjicienda est numeri inventi 4890 ultima ciphra, & facienda fractio decimalis, hoc modo $489\frac{0}{10}$, hoc est, 489, numerus respondens logarithmo dato 2.6893089.

Similiter in eadem suppositione, si datus fuisset logarithmus 1.6893089, abjiciendæ essent duæ ultimæ ciphrae, hoc modo, $48\frac{90}{100}$; si 0.6893089, numerus

respondens esset $4\frac{890}{1000}$ &c. Quare regula generalis hæc esto: Si characteristica logarithmi dati minor fuerit, quàm characteristica logarithmi in tabulis inventi, in reliquis figuris æqualis, numerus inventus, & huic respondens minuatur tot ad dextram figuris, quot unitatibus illa minor est; & erunt reliquæ ad sinistram figuræ numerus integer quæsitus; figuræ autem abscissæ erunt fractiones decimæ ejusdem. Contra verò, si characteristica logarithmi dati 4.5523031 major fuerit, quàm characteristica logarithmi in tabulis inventi 3.5523031, in reliquis figuris æqualis, numerus inventus, & huic respondens 3567 augeatur tot ad dextram figuris, quot unitatibus illa major est, nimirum, 35670; & sic auctus, erit numerus quæsitus.

Casus III.

206. **Q**Uod si datus logarithmus accuratus in tabulis non occurrat, & tamen habeat characteristicam, quæ in illis continetur, indicio id erit, eundem pertinere ad numerum integrum cum adjecta fractione; quam, si negligere velis, sumi potest numerus proximiori logarithmo respondens.

At si numerum integrum cum adjecta fractione, respondentem logarithmo dato, invenire velis, ita operaberis.

I. Inquirantur in tabulis duo logarithmi, quorum alter sit proximè major dato, & alter proximè minor: utrumque ex tabulis deprome cum numeris sibi respondentibus.

II. Ex logarithmo proximè majori aufer proximè minorem; & notabis primam differentiam.

III. Hunc ipsum proximè minorem logarithmum aufer a dato; & fiet differentia secunda.

IV. Denique numero, qui proximè minori logarithmo respondet, adjice fractionem, cujus denominator est prima illa differentia, numerator verò secunda; & sic habebis quæsitum numerum, respondentem logarithmo dato, qui exactè in tabulis non reperiebatur.

Exemplum. Sit inveniendus numerus, ad quem pertineat logarithmus 2.7375292. Invenies in tabulis 2.7379873 proximè majorem, cui respondet numerus 547, & rursus proximè minorem logarithmum 2.7371926, cui respondet numerus 546. Aufer hunc logarithmum proximè minorem & a proximè majori, & a dato logarithmo; & habebis geminas differentias 7947 & 3366. Ex his fractionem compone, uti regula jubet, adjiciendam numero 546, qui proximè minori logarithmo respondet; & habebis numerum quæ-

$$\text{situm } 546 + \frac{3366}{7947}.$$

Opera-

Operationis ratio est, quia numerorum differentia sunt differentiis logarithmorum quàm proximè proportionales. Itaque,

Ut si habet 7947, differentia logarithmorum in tabulis existentium,

ad 1, differentiam numerorum illis respondentium;

Ita 3366, differentia logarithmi proximè minoris a dato,

ad differentiam, qua numerus dato logarithmo respondens, excedit minorem numerum 546.

Fractio inventa facilè revocatur ad decimales numeros, dividendo numeratorem, quot opus fuerit, ciphris auctum, per denominatorem, contemptis etiam tenuioribus minutiis, si quotus accuratus haberi nequit.

Sic in nostro casu fractio $\frac{3366}{7947}$ evadet $\frac{4236}{10000}$; & numerus logarithmo dato respondens, 546.4236.

PROPOSITIO IV.

PROBLEMA.

207. **D**ato logarithmo excedente 3.00000000, nempe ultimum tabulae, qua uteris, logarithmum, invenire in eodem canone numerum eidem respondentem.

Resolutio. Si dati logarithmi characteristica tabularum canonem excedit, jam primùm constabit ex dictis, quot notas habere debeat quæsitus numerus; totidem nempe, quot characteristica logarithmi dati habet unitates, ac præterea unam; quo posito,

I. A dato logarithmo auferatur logarithmus numeri 10, 100, 1000; ut scilicet residuum sit proximè minus logarithmo 3.00000000; hoc est, ejus characteristica tot unitatibus mulctetur, quot opus fuerit, ut in tabulis inveniri possit.

T. III.

M

II.

II. Logarithmus ita depressus inquiretur in canone; & si accuratus occurrat, numerus ei respondens, erit subdecuplus, subcentuplus, submillecuplus numeri quæsitum. Quandoquidem subducere logarithmum numeri 10, vel 100, vel 1000 a dato logarithmo, est numerum quæsitum dividere per 10, vel 100, vel 1000.

III. Hoc igitur multiplicato per 10, vel 100, vel 1000, eum nempe numerum, cujus logarithmus ablatum fuerit, producet quæsitum numerum. Vel brevius, numerus logarithmo depresso respondens, tot ciphris auctus, quot unitates e characteristica ademptæ fuerint, erit quæsitum quantitas.

Exemplum. Sit inveniendus numerus dati logarithmi 5.6693169. Jam ex characteristica 5 intelligis numerum quæsitum sex notas habiturum. Itaque,

I. A dato logarithmo auferatur logarith. 3.0000000 numeri 1000; hoc est, characteristica 5 mulctetur tribus unitatibus, ut fiat 2.6693169.

II. Logarithmus ita depressus inquiretur in canone; & huic numerum appositum invenies 467; qui erit submillecuplus numeri quæsitum.

III. Inventus numerus multiplicetur per 1000, hoc est, tot ciphris augeatur, quot unitates e characteristica ademptæ fuerint; & habebis 467000, numerum respondentem dato logarithmo 5.6693169.

Operationis ratio perspicua est. Nam, dum dati logarithmi characteristicam aliquot unitatibus immuimus, perinde facimus, ac si numerum ei respondentem divideremus per numerum unitate, & totidem ciphris expressum, quot sunt e characteristica sublatae unitates; quantitas igitur huic depresso logarithmo respondens, in eundem numerum ducenda est, ut illa habeatur, quæ dato logarithmo respondet.

208. Quod si logarithmus ita depressus non exactè inveniatur in tabulis, sumatur proximè major, & minor;

minor; & exinde per Probl. præced., quærantur notæ decimales adjiciendæ numero, qui logarithmo proximè minori respondet; tum ex his decimalibus notis totidem per multiplicationem ad integros redigantur, quot unitates a characteristica dati logarithmi ademptæ fuerint; nam, si tot ejusmodi notæ integro illi numero adjectæ, jam pro integris habeantur, habebitur simul quæsitæ quantitas.

Exemplum. Quæratür numerus dato logarithmo 5.7375292 respondens; neque alias habeas ad manum tabulas, quàm hisce Elementis adjectas. Quoniam dati logarithmi characteristica 5 hunc tabularum canonem excedit, mulctetur characteristica tribus unitatibus; hoc est, a dato logarithmo auferatur logarithmus 3.0000000 numeri 1000, ad quem dumtaxat perductus est canon, ut fiat 2.7375292: hujus logarithmi numerus per præced. Probl. inventus, est 546.4235, quo multiplicato per 1000, tres ex his decimalibus notis ad integros redigantur; eritque quæsitus numerus 546423.5.

Si datus logarithmus fuisset 4.7375292, numerus ei responderet 54642.35; logarithmo autem 3.7375292 responderet 5464.235.

Scholion.

209. **S**I dati logarithmi characteristica fuerit plus, quàm duplò major eà, quæ in tabulis maxima occurrit, inventus numerus in ultimis notis accuratus non prodiret hac methodo, ob rationem alibi adductam in re simili.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

210. **D**ato logarithmo negativo, invenire numerum eidem congruum.

Resolutio. Quærat^r positivⁱ logarithmⁱ numerus; & hic unitati subscriptus, fractionem dabit, quæ illi respondeat. Sic, si detur — 2.7371926, cùm ei respondeat 546, erit quæsita quantitas $\frac{1}{546}$.

Scholion.

Reliquæ operationes ad logarithmorum usum spectantes, quomodo scilicet eorum ope multiplicatio, divisio, & extractiones radicum numerorum vulgarium exerceantur, petendæ sunt ex n. 181. Tantùm exemplis aliquot indicabo usum canonis logarithmici in operationibus arithmeticis.

Multiplicatio. Oporteat multiplicare 65 per 8. Quære in tabulis logarithmum utrique appositum, nimirum, 1.8129134 & 0.9030900: horum summa 2.7160034 dabit logarithmum, cui in iisdem tabulis e regione respondet duorum numerorum factum 520.

Divisio. Quærat^r quotiens numeri 360 divisi per 12. Utriusque logarithmi in tabulis sunt 2.5563025 & 1.0791812; secundus auferatur a primo; & residuum erit 1.4771213, logarithmus quotientis 30; qui statim in propria columna e regione occurret.

Regula trium. Datis tribus numeris 30, 210, 24, quærat^r quartus proportionalis. A summa logarithmorum secundi 210, & tertii 24, subducatur primi 30 logarithmus 1.4771213; residuum dabit logarithmum, cui e regione in propria columna respondebit 168, quartus proportionalis.

Extractio radicum. Extrahenda sit radix quadrata numeri 64. Quærat in tabulis hujus logarithmus 1.8061800, cujus semissis 0.9030900 dabit logarithmum radices 8. Rursum a numero 8 sit extrahenda radix cubica. Triens logarithmi hujus numeri 8, dabit logarithmum 0.3010300 radices cubicæ 2.

Formatio potestatum. Oporteat numerum 8 elevare ad potestatem quadratam, vel cubicam &c. Logarithmus ejusdem numeri 8 duplicatus, vel triplicatus, dabit logarithmum quadrati 64, vel cubi 512.

DEFINITIO.

Logarithmi sinuum, tangentium, & secantium, vocantur sinus, tangentes, & secantes artificiales; ut ab iis fecernantur, qui simpliciter vocantur sinus &c.

PROPOSITIO VI.

PROBLEMA.

211. **D**ati cujuscunque sinus logarithmum invenire. Resolutio consequitur ex præced. Nam datus quilibet sinus exhibeatur tanquam numerus aliquis vulgaris, qualis exponitur in tabulis; cujus logarithmus statim innotescet.

Monitum.

Qui canonem logarithmicum construere velint, illud sedulo animadvertant, logarithmos inveniendos respicere debere ipsos sinus, prout sunt inventi ad sinum totum 100000000.0000, nimirum tribus figuris longiores, quàm scribantur in tabulis, ut diximus. Quamobrem, ut ex quolibet sinu jam in tabulis notato, congruens logarithmus eliciatur, addantur prius oportet eidem sinui tres Zeri, (quod ferme perinde est, ac si tres notæ arithme-

ticæ rursus adjicerentur, quæ sublata fuerant, antequam in tabulas transcriberentur); hujus autem numeri sic aucti tribus ciphris, quærat^r logarithmus.

Exemplum. Invenire oporteat logarithmum sinus grad. 40. Quærat^r in tabula sinus iste, 6427876: huic addantur tres zeri, ac fiat 6427876000; cujus jam logarithmus inveniendus est. Ab hoc numero subducantur statim duæ notæ arithmeticæ dextrorsum; ut octo tantum characteres relinquantur versùs lævam; tum quærat^r logarithmus numeri 64278760, ut alibi docuimus: invenietur esse 78080675; cui addendus est logarithmus numeri 100, nimirum, 200000000; ut restituantur duæ notæ arithmeticæ, quæ prius sublata fuerant; quod ipsissimum fuit, ac si idem numerus divisus fuisset per 100. Horum summa 9.8080675 est quæsitus logarithmus sinus grad. 40; atque ita de reliquis.

Corollarium.

212. **L**ogarithmi tangentium, & secantium obtineri possunt, quemadmodum logarithmi sinuum. Logarithmus secantis facile etiam haberi potest, si logarithmum sinus complementi auferas a logarithmo sinus totius duplicato; cùm enim ita sit sinus complementi ad sinum totum, ut sinus totus ad secantem; erunt logarithmi extremorum æquales duplo logarithmo medii. Quamobrem, cùm logarithmi secantium tanta facilitate ex logarithmis sinuum habeantur, minimè curavi, ut ipsi in tabulis ordinarentur; quod etiam ab aliis factum video.

De Usu constructi Canonis logarithmici.

USus constructi canonis duobus Problematis continetur, quorum altero, ex datis gradibus arcuum, quærentur logarithmi sinus, & tangentis; altero, ex datis logarithmis quærentur gradus arcuum.

PROPOSITIO VII.

PROBLEMA.

213. **D**atis gradibus cujusvis arcus, eruere e tabulis logarithmum sinus ipsis respondentem.

Resolutio. Si arcus datus non sit quadrante major, & solos gradus contineat, invenietur in prima columna paginæ sinistræ, vel dextræ, prout minor, vel major gradibus 45; ac e regione ipsius in eadem pagina occurret in propria columna logarithmus quæsitus; quemadmodum arcui grad. 40, respondet logarithmus 9.808675.

Si præterea arcus datus contineat minuta, idem observandum, quod de sinibus docuimus n. 63. Nimirum, inveniatu logarithmus arcus proximè majoris, & proximè minoris; & capiatur eorum differentia; arcuum autem differentia erit unius gradus, seu 60^I. Fiat igitur: *Ut 60^I ad numerum minutorum, quæ in arcu dato continentur supra numerum graduum; Ita differentia logarithmorum, qui e tabulis eruti sunt, ad quartum proportionalem; qui addatur arcui minori; & habebitur quæsitus logarithmus.*

Eadem methodo operaberis, si arcus datus contineat etiam minuta secunda. Sit arcus datus grad. 16.

43^I. 38^{II}, cujus quæritur logarithmus. Inveniatu, ut

ante, logarithmus arcus proximè majoris, grad. 16. 44^I, & proximè minoris, grad. 16. 43^I; quorum differentia est unius minuti primi, hoc est, 60^{II}. Cùm autem differentia arcus minoris, grad. 16. 43^I ab arcu dato sit 38^{II}, fiat: *Ut 60^I ad 38^{II}; Ita 4204, differentia logarithmorum arcuum grad. 16. 43^I, & 16. 44^I, ad 2663, quartum proportionalem*; qui addatur invento jam logarithmo 9.4588480 arcus proximè minoris, grad. 16. 43^I; & fiet 9.4591143 logarithmus dato arcui conveniens.

Pro logarithmis tangentium eadem est operatio.

PROPOSITIO VIII.

PROBLEMA.

214. **D**ato logarithmo sinus, invenire arcum ipsi respondentem.

Resolutio. Si logarithmus datus inveniatur in tabulis, invenietur etiam arcus ipsi e regione respondens; si verò non inveniatur, eadem utendum analogia, quam alibi docuimus. Nimirum, quærat in tabulis logarithmus proximè major, & proximè minor; subtrahaturque minor a majore, ut habeatur eorum differentia; tum etiam minor a proposito logarithmo auferatur, ut innotescat differentia eorundem; & fiat: *Ut differentia logarithmorum proximè majoris, & proximè minoris, ad differentiam proximè minoris a dato*; Ita 60^I ad numerum minutorum, addendum arcui respondententi logarithmo minori. Arcus ita inventus, erit is, qui habebit logarithmum datum.

Exem-

Exemplum I. Esto logarithmus datus 9.6279472, qui exactè non invenitur in tabulis. Capiatur primò arcus grad. 25.7, respondens logarithmo 9.6278397 proximè minori dato; deinde subtrahatur logarithmus 9.6278397, tam a proximè majore sequenti 9.6281090, ut habeatur differentia prima 2693, quàm a logarithmo dato; & remanebit differentia secunda 1075. Fiat denique: *Ut* 2693 *ad* 1075; *Ita* 60, differentia nempe arcuum, grad. 25.7, & 25.8, *ad* quartum proportionalem 24, qui addendus erit arcui respondenti logarithmo minori. Arcus igitur logarithmo dato 9.6279472 respondens, est grad. 25.7.24.

Exempl. II. Detur logarithmus tangentis, 9.87343, omissis postremis binis notis, quod fieri posse notavimus *Observ.* IV. n. 190.; & quærat arcus. In tabulis logarithmus tangentis proximè major, abjectis pariter ultimis duabus notis, est 9.87711, respondens grad. 37; proximè minor est 9.86126, respondens grad. 36; differentia secundi a primo est 1585; differentia secundi a proposito est 1217. Fiat igitur: *Ut* 1585 *ad* 1217; *Ita* 60 *ad* quartum; & prodit 46, omissis fractionibus. Arcus igitur quæsitus est 36.46.

Ufus autem præcipuus hujus canonis logarithmici est, ut multò expeditiùs, & commodiùs conficiatur analysi trianguli rectilinei, mutata multiplicatione in additionem, & divisione in subtractionem. Qua in re hæc esto regula generalis. I. *Analogiæ termini ordinandi sunt, perinde ac si resolutio trianguli habenda esset ope sinuum, vel tangentium.* II. *Addatur insuper logarithmus secundi termini logarithmo tertii; & a summa subducatur logarithmus primi termini; residuum erit logarithmus quarti.*

Exempla aliquot, quæ paulo ante applicavimus analogiis habitis ope finuum, & tangentium, abunde erunt, ut canonis logarithmici usus, & artificium Tironibus constet.

PROPOSITIO IX.

PROBLEMA.

215. **C**ognitis angulis acutis, & hypotenusa trianguli rectanguli, invenire latera.

Resolutio. Habes n. 101. hanc analogiam:

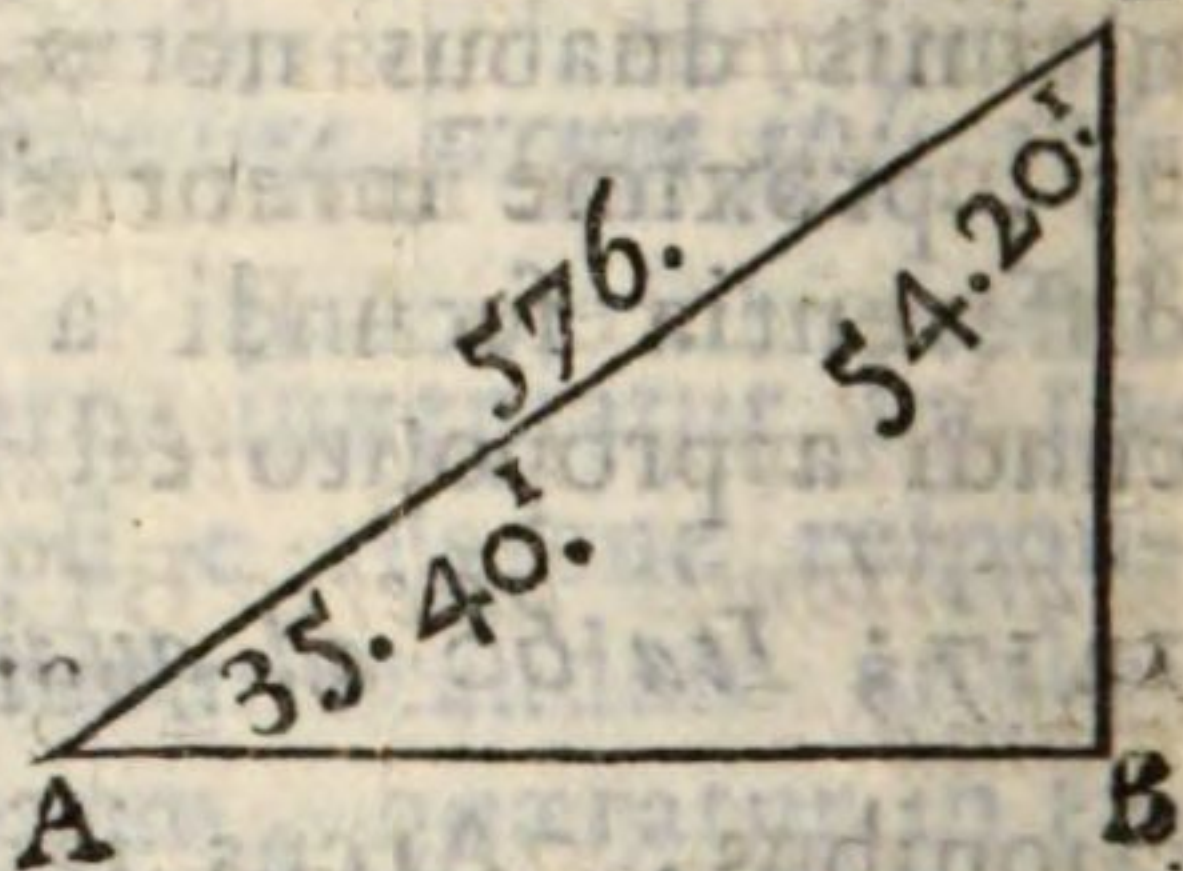
Ut sinus totus	1000000
ad sinum anguli A,	58307
Ita hypotenusa AC	576
ad latus BC, oppositum angulo A.	

Jam verò logarithmum sinus anguli A, secundi termini, adde logarithmo hypotenusæ 576, tertii termini: ab horum summa subducatur logarithmus sinus totius, primi termini; residuum erit logarithmus quarti termini; qui quærendus est in tabula; & invenietur respondere numero 336 pro latere BC.

Logarithmus sinus anguli A,	9.7657197
Logarithmus hypotenusæ AC,	2.7604225
Summa	125261422
a qua subducto logarithmo radii,	1000000000
residuum est logarithmus lateris BC,	25261422

qui respondet numero 336 circiter.

Eodem modo invenietur latus AB, si logarithmus sinus anguli C, substituatur loco logarithmi sinus anguli A.



PROPOSITIO X.

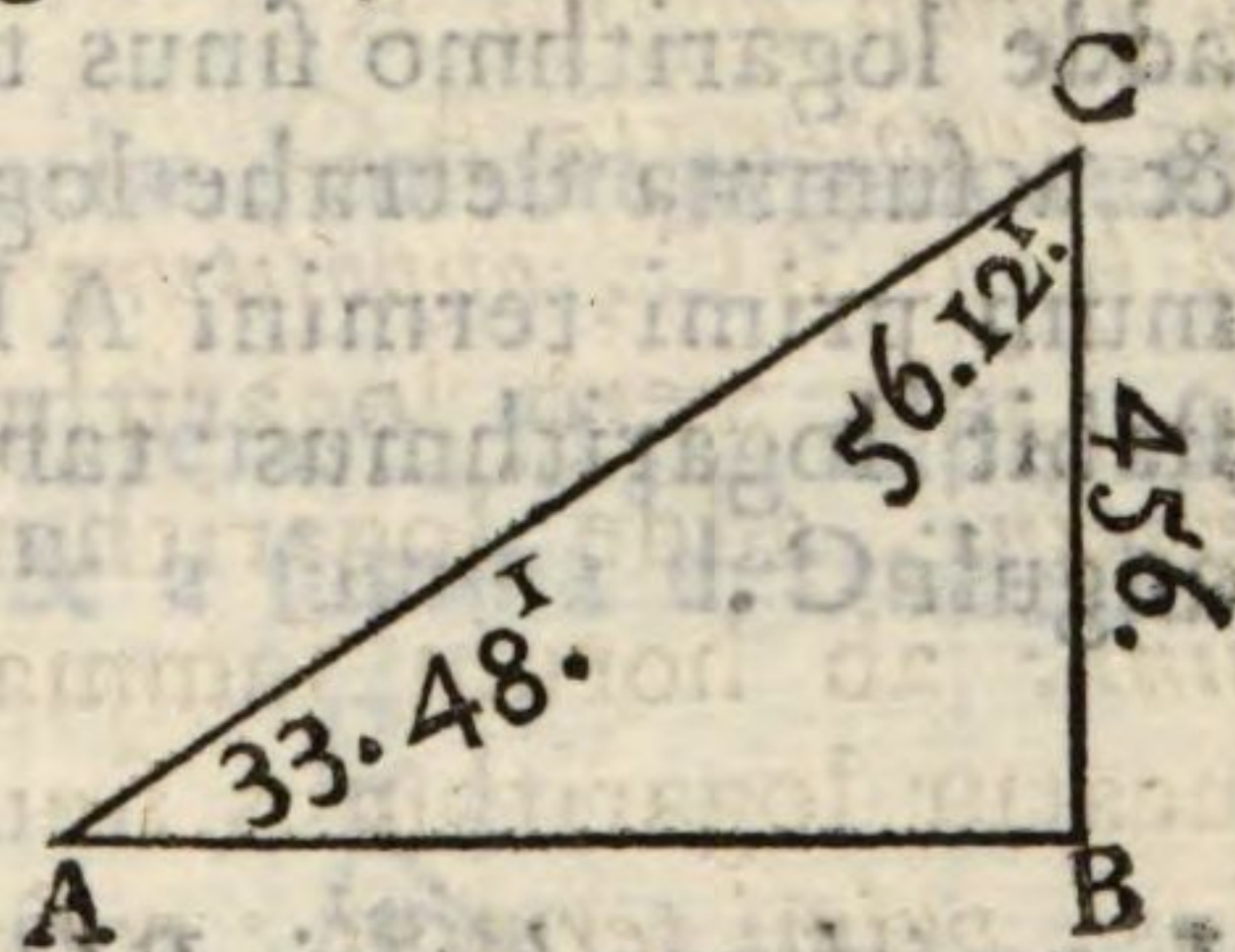
PROBLEMA.

216. **D**atis, uno latere, & angulis trianguli rectan-
guli, invenire aliud latus.

Resolutio. Analogia n. 105. est hujusmodi:

Ut sinus totus	100000
ad tangentem anguli C,	149348
Ita latus BC, adjacens angulo C,	456
ad latus AB.	

Logarithmum tangentis anguli C, secundi termi-
ni, adde logarithmo lateris BC, tertii termini: ab horum
summa subducatur logarith-
mus sinus totius, qui est ter-
minus primus; residuum erit
logarithmus quarti termini;
qui in canone inventus, dabit
681 pro latere AB.



Logarithmus tangentis anguli C,	101742873
Logarithmus lateris BC,	26589648
Summa	128332521
a qua subtracto logarithmo sinus totius,	1000000000
remanet logarithmus lateris AB,	28332521
qui respondet numero 681.	

PROPOSITIO XI.

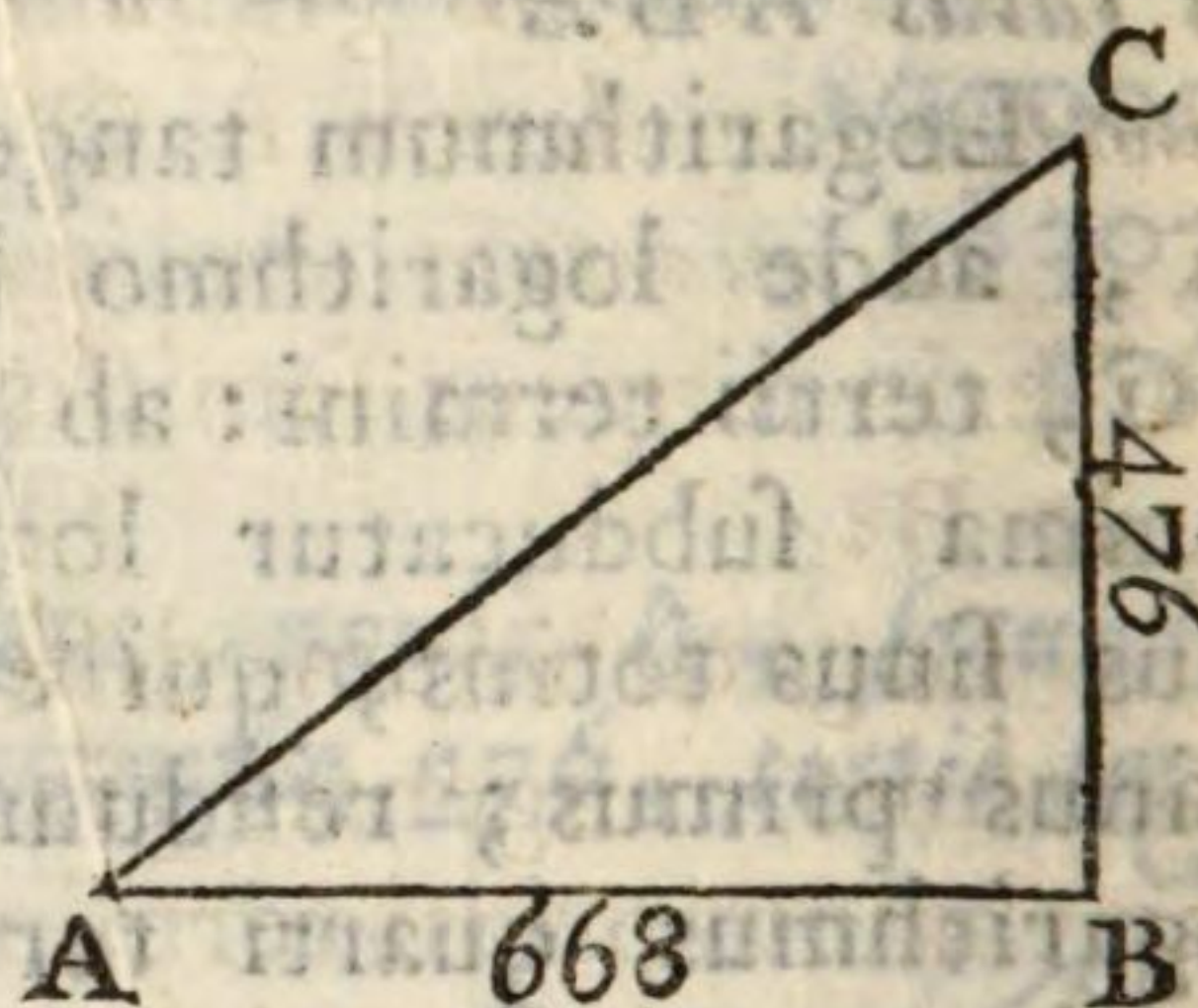
PROBLEMA.

217. **C**ognitis duobus lateribus trianguli rectanguli,
invenire acutos angulos.

Resolutio. Accipe analogiam n. 104 :

Ut latus AB	668
ad latus BC	476
Ita sinus totus	100000
ad tangentem anguli A.	

Logarithmum lateris BC
adde logarithmo sinus totius;
& a summa detrahe logarith-
mum primi termini AB: re-
stabit logarithmus tangentis
anguli C.



Logarithmus lateris BC,	26776070
Logarithmus sinus totalis,	100000000
Summa	126776070
a qua subducto logarithmo lateris AB,	28247765
restat logarithmus tangentis anguli A,	98528305
qui in columna logarithmorum tangentium inventus,	
dabit grad. 35.28.	

PROPOSITIO XII.

PROBLEMA.

218. **C**ognitis duobus lateribus, & angulo intercepto, in triangulo obliquangulo, invenire reliquos angulos.

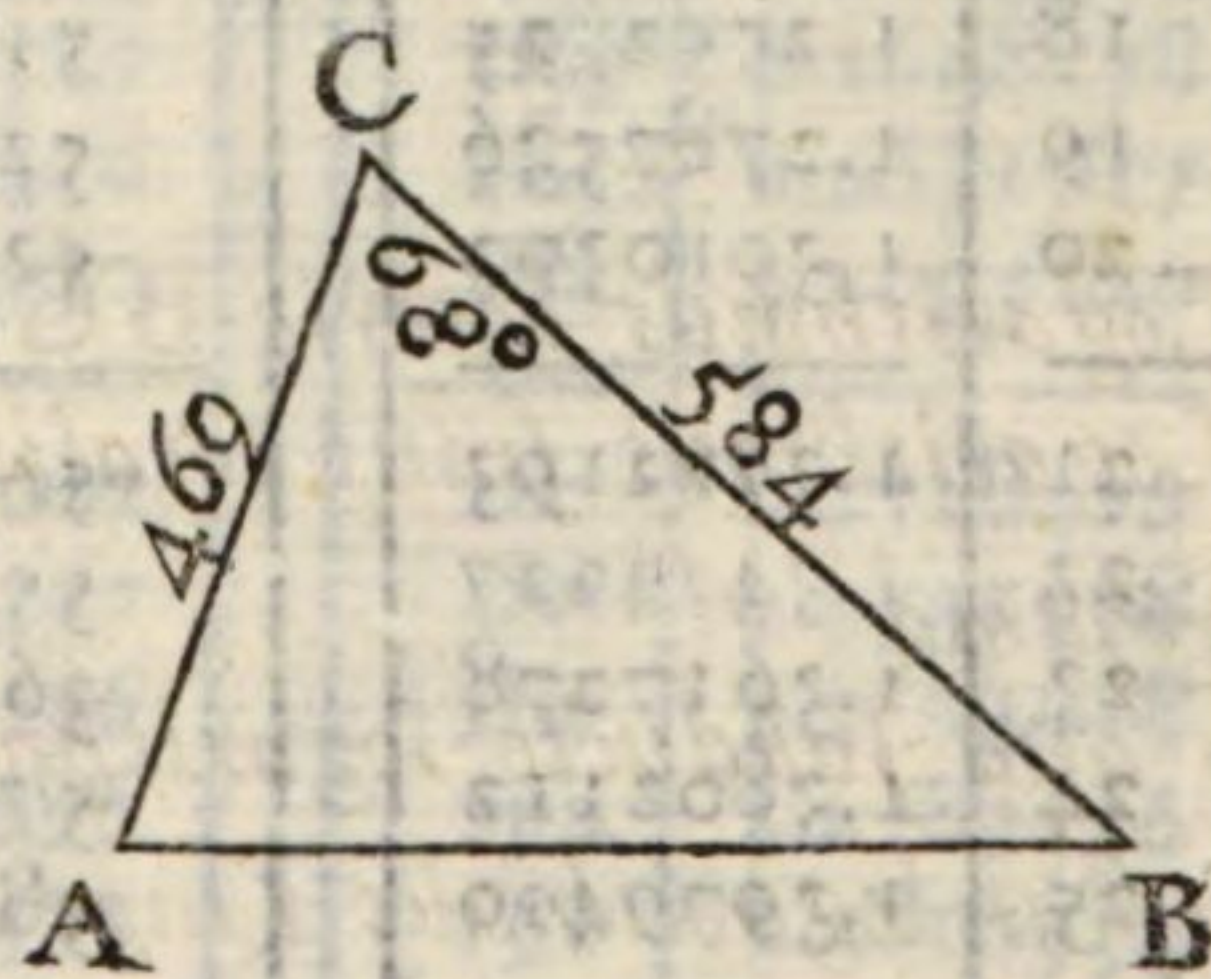
Resolutio. Quære analogiam n. 117:

Ut summa duorum laterum AC, BC, 1053
ad eorum differentiam 115

Ita tangens graduum 56, semissis summæ
duorum angulorum A & B, 148256
ad quartum terminum,
qui erit tangens semissis differentiæ duorum angulorum
A & B.

Logarithmum differentiæ laterum 115, adde logarithmo tangentis grad. 56; & a summa detrahe logarithmum primi termini 1053: residuum erit logarithmus quarti termini, respondens grad.

9.12, qui conficiunt semissem differentiæ angulorum A & B; ac reliqua peragenda, ut alibi præscripsimus.



Logarithmus differentiæ 115,	20606978
Logarithmus tangentis graduum 56,	101710126
Summa	<u>122317104</u>
a qua subducto logarithmo summæ duorum laterum, 1053,	30224284
restat	<u>92092820</u>
logarithmus tangentis semissis differentiæ angulorum A & B, qui respondet grad. 9.12 &c.	

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771213	36	1.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5910646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136
11	1.0413927	44	1.6434527	77	1.8864907
12	1.0791812	45	1.6532125	78	1.8920946
13	1.1139433	46	1.6627578	79	1.8976271
14	1.1461280	47	1.6720979	80	1.9030900
15	1.1760913	48	1.6812412	81	1.9084850
16	1.2041200	49	1.6901961	82	1.9138138
17	1.2304489	50	1.6989700	83	1.9190781
18	1.2552725	51	1.7075702	84	1.9242793
19	1.2787536	52	1.7160033	85	1.9294189
20	1.3010300	53	1.7242759	86	1.9344984
21	1.3222193	54	1.7323938	87	1.9395192
22	1.3424227	55	1.7403627	88	1.9444827
23	1.3617278	56	1.7481880	89	1.9493900
24	1.3802112	57	1.7558749	90	1.9542425
25	1.3979400	58	1.7634280	91	1.9590414
26	1.4149733	59	1.7708520	92	1.9637878
27	1.4313638	60	1.7781512	93	1.9684829
28	1.4471580	61	1.7853298	94	1.9731279
29	1.4623980	62	1.7923917	95	1.9777236
30	1.4771213	63	1.7993405	96	1.9822712
31	1.4913617	64	1.8061800	97	1.9867717
32	1.5051500	65	1.8129134	98	1.9912261
33	1.5185139	66	1.8195439	99	1.9956352
34	1.5314789	67	1.8260748	100	2.0000000

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
101	2.0043214	134	2.1271048	167	2.2227165
102	2.0086002	135	2.1303338	168	2.2253093
103	2.0128372	136	2.1335389	169	2.2278867
104	2.0170333	137	2.1367206	170	2.2304489
105	2.0211893	138	2.1398791	171	2.2329961
106	2.0253059	139	2.1430148	172	2.2355284
107	2.0293838	140	2.1461280	173	2.2380461
108	2.0334238	141	2.1492191	174	2.2405492
109	2.0374265	142	2.1522883	175	2.2430380
110	2.0413927	143	2.1553360	176	2.2455127
111	2.0453230	144	2.1583625	177	2.2479733
112	2.0492180	145	2.1613680	178	2.2504200
113	2.0530784	146	2.1643529	179	2.2528530
114	2.0569049	147	2.1673173	180	2.2552725
115	2.0606978	148	2.1702617	181	2.2576786
116	2.0644580	149	2.1731863	182	2.2600714
117	2.0681859	150	2.1760913	183	2.2624511
118	2.0718820	151	2.1789769	184	2.2648178
119	2.0755470	152	2.1818436	185	2.2671717
120	2.0791812	153	2.1846914	186	2.2695129
121	2.0827854	154	2.1875207	187	2.2718416
122	2.0863598	155	2.1903317	188	2.2741578
123	2.0899051	156	2.1931246	189	2.2764618
124	2.0934217	157	2.1958996	190	2.2787536
125	2.0969100	158	2.1986571	191	2.2810334
126	2.1003705	159	2.2013971	192	2.2833012
127	2.1038037	160	2.2041200	193	2.2855573
128	2.1072100	161	2.2068259	194	2.2878017
129	2.1105897	162	2.2095150	195	2.2900346
130	2.1139433	163	2.2121876	196	2.2922561
131	2.1172713	164	2.2148438	197	2.2944662
132	2.1205739	165	2.2174839	198	2.2966652
133	2.1238516	166	2.2201081	199	2.2988531
134	2.1271048	167	2.2227165	200	2.3010300

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
201	2.3031961	234	2.3692159	267	2.4265113
202	2.3053541	235	2.3710679	268	2.4281348
203	2.3074960	236	2.3729120	269	2.4297523
204	2.3096302	237	2.3747483	270	2.4313638
205	2.3117539	238	2.3765770	271	2.4329693
206	2.3138672	239	2.3783979	272	2.4345685
207	2.3159703	240	2.3802112	273	2.4361626
208	2.3180633	241	2.3820170	274	2.4377506
209	2.3201463	242	2.3838154	275	2.4393327
210	2.3222193	243	2.3856063	276	2.4409091
211	2.3242825	244	2.3873898	277	2.4424795
212	2.3263359	245	2.3891661	278	2.4440442
213	2.3283796	246	2.3909351	279	2.4456047
214	2.3304138	247	2.3926970	280	2.4471580
215	2.3324385	248	2.3944517	281	2.4487063
216	2.3344537	249	2.3961993	282	2.4502493
217	2.3364597	250	2.3979400	283	2.4517861
218	2.3384565	251	2.3996737	284	2.4533183
219	2.3404441	252	2.4014005	285	2.4548449
220	2.3424227	253	2.4031205	286	2.4563660
221	2.3443923	254	2.4048337	287	2.4578819
222	2.3463530	255	2.4065402	288	2.4593925
223	2.3483049	256	2.4082400	289	2.4608978
224	2.3502480	257	2.4099331	290	2.4623980
225	2.3521825	258	2.4116197	291	2.4638930
226	2.3541084	259	2.4132998	292	2.4653828
227	2.3560259	260	2.4149733	293	2.4668676
228	2.3579348	261	2.4166405	294	2.4683473
229	2.3598355	262	2.4183013	295	2.4698220
230	2.3617278	263	2.4199557	296	2.4712917
231	2.3636120	264	2.4216039	297	2.4727564
232	2.3654880	265	2.4232459	298	2.4742163
233	2.3673559	266	2.4248816	299	2.4756712
234	2.3692159	267	2.4265113	300	2.4771213

N.		N.		N.	Logarith.
334	2.52886	334	2.52886	67	2.9854265
335	2.52900	335	2.52900	68	2.9858754
336	2.52914	336	2.52914	69	2.9863238
337	2.52928	337	2.52928	70	2.9867717
338	2.52942	338	2.52942		2.9872192
339	2.52956	339	2.52956		2.9876663
340	2.52970	340	2.52970		2.9881128
341	2.52984	341	2.52984		2.9885590
342	2.52998	342	2.52998		2.9890046
343	2.53012	343	2.53012		2.9894498
344	2.53026	344	2.53026		2.9898946
345	2.53040	345	2.53040		2.9903389
346	2.53054	346	2.53054		2.9907827
347	2.53068	347	2.53068		2.9912261
348	2.53082	348	2.53082		2.9916690
349	2.53096	349	2.53096		2.9921115
350	2.53110	350	2.53110		2.9925535
351	2.53124	351	2.53124		2.9929951
352	2.53138	352	2.53138		2.9934362
353	2.53152	353	2.53152		2.9938769
354	2.53166	354	2.53166		2.9943171
355	2.53180	355	2.53180		2.9947569
356	2.53194	356	2.53194		2.9951963
357	2.53208	357	2.53208		2.9956352
358	2.53222	358	2.53222		2.9960737
359	2.53236	359	2.53236		2.9965117
360	2.53250	360	2.53250		2.9969492
361	2.53264	361	2.53264		2.9973864
362	2.53278	362	2.53278		2.9978231
363	2.53292	363	2.53292		2.9982593
364	2.53306	364	2.53306		2.9986952
365	2.53320	365	2.53320		2.9991305
366	2.53334	366	2.53334		2.9995655
367	2.53348	367	2.53348		2.9999999

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
401	2.6031444	434	2.6374897	467	2.6693169
402	2.6042261	435	2.6384893	468	2.6702459
403	2.6053050	436	2.6394865	469	2.6711728
404	2.6063814	437	2.6404814	470	2.6720979
405	2.6074550	438	2.6414741	471	2.6730209
406	2.6085260	439	2.6424645	472	2.6739420
407	2.6095944	440	2.6434527	473	2.6748611
408	2.6106602	441	2.6444386	474	2.6757783
409	2.6117233	442	2.6454223	475	2.6766936
410	2.6127839	443	2.6464037	476	2.6776069
411	2.6138418	444	2.6473830	477	2.6785184
412	2.6148972	445	2.6483600	478	2.6794279
413	2.6159500	446	2.6493349	479	2.6803355
414	2.6170003	447	2.6503075	480	2.6812412
415	2.6180481	448	2.6512780	481	2.6821451
416	2.6190933	449	2.6522463	482	2.6830470
417	2.6201361	450	2.6532125	483	2.6839471
418	2.6211763	451	2.6541765	484	2.6848454
419	2.6222140	452	2.6551384	485	2.6857417
420	2.6232493	453	2.6560982	486	2.6866363
421	2.6242821	454	2.6570558	487	2.6875290
422	2.6253124	455	2.6580114	488	2.6884198
423	2.6263404	456	2.6589648	489	2.6893089
424	2.6273659	457	2.6599162	490	2.6901961
425	2.6283889	458	2.6608655	491	2.6910815
426	2.6294096	459	2.6618127	492	2.6919651
427	2.6304279	460	2.6627578	493	2.6928469
428	2.6314438	461	2.6637009	494	2.6937269
429	2.6324573	462	2.6646420	495	2.6946052
430	2.6334685	463	2.6655810	496	2.6954817
431	2.6344773	464	2.6665180	497	2.6963564
432	2.6354837	465	2.6674529	498	2.6972293
433	2.6364879	466	2.6683859	499	2.6981005
434	2.6374897	467	2.6693169	500	2.6989700

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
501	2.6998377	534	2.7275413	567	2.7535831
502	2.7007037	535	2.7283538	568	2.7543483
503	2.7015680	536	2.7291648	569	2.7551123
504	2.7024305	537	2.7299743	570	2.7558749
505	2.7032914	538	2.7307823	571	2.7566361
506	2.7041505	539	2.7315888	572	2.7573960
507	2.7050080	540	2.7323938	573	2.7581546
508	2.7058637	541	2.7331973	574	2.7589119
509	2.7067178	542	2.7339993	575	2.7596678
510	2.7075702	543	2.7347998	576	2.7604225
511	2.7084209	544	2.7355989	577	2.7611758
512	2.7092700	545	2.7363965	578	2.7619278
513	2.7101174	546	2.7371926	579	2.7626786
514	2.7109631	547	2.7379873	580	2.7634280
515	2.7118072	548	2.7387806	581	2.7641761
516	2.7126497	549	2.7395723	582	2.7649230
517	2.7134905	550	2.7403627	583	2.7656686
518	2.7143298	551	2.7411516	584	2.7664128
519	2.7151674	552	2.7419391	585	2.7671559
520	2.7160033	553	2.7427251	586	2.7678976
521	2.7168377	554	2.7435098	587	2.7686381
522	2.7176705	555	2.7442930	588	2.7693773
523	2.7185017	556	2.7450748	589	2.7701153
524	2.7193313	557	2.7458552	590	2.7708520
525	2.7201593	558	2.7466342	591	2.7715875
526	2.7209857	559	2.7474118	592	2.7723217
527	2.7218106	560	2.7481880	593	2.7730547
528	2.7226339	561	2.7489629	594	2.7737864
529	2.7234557	562	2.7497363	595	2.7745170
530	2.7242759	563	2.7505084	596	2.7752463
531	2.7250945	564	2.7512791	597	2.7759743
532	2.7259116	565	2.7520484	598	2.7767012
533	2.7267272	566	2.7528164	599	2.7774268
534	2.7275413	567	2.7535831	600	2.7781512
N 2			600		

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
601	2.7788745	634	2.8020893	667	2.8241258
602	2.7795965	635	2.8027737	668	2.8247765
603	2.7803173	636	2.8034571	669	2.8254261
604	2.7810369	637	2.8041394	670	2.8260748
605	2.7817554	638	2.8048207	671	2.8267225
606	2.7824726	639	2.8055009	672	2.8273693
607	2.7831887	640	2.8061800	673	2.8280151
608	2.7839036	641	2.8068580	674	2.8286599
609	2.7846173	642	2.8075350	675	2.8293038
610	2.7853298	643	2.8082110	676	2.8299467
611	2.7860412	644	2.8088859	677	2.8305887
612	2.7867514	645	2.8095597	678	2.8312297
613	2.7874605	646	2.8102325	679	2.8318698
614	2.7881684	647	2.8109043	680	2.8325089
615	2.7888751	648	2.8115750	681	2.8331471
616	2.7895807	649	2.8122447	682	2.8337844
617	2.7902852	650	2.8129134	683	2.8344207
618	2.7909885	651	2.8135810	684	2.8350561
619	2.7916906	652	2.8142476	685	2.8356906
620	2.7923917	653	2.8149132	686	2.8363241
621	2.7930916	654	2.8155777	687	2.8369567
622	2.7937904	655	2.8162413	688	2.8375884
623	2.7944880	656	2.8169038	689	2.8382192
624	2.7951846	657	2.8175654	690	2.8388491
625	2.7958800	658	2.8182259	691	2.8394780
626	2.7965743	659	2.8188854	692	2.8401061
627	2.7972675	660	2.8195439	693	2.8407332
628	2.7979596	661	2.8202015	694	2.8413595
629	2.7986506	662	2.8208580	695	2.8419848
630	2.7993405	663	2.8215135	696	2.8426092
631	2.8000294	664	2.8221681	697	2.8432328
632	2.8007171	665	2.8228216	698	2.8438554
633	2.8014037	666	2.8234742	699	2.8444772
634	2.8020893	667	2.8241258	700	2.8450980

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
701	2.8457180	734	2.8656961	767	2.8847954
702	2.8463371	735	2.8662873	768	2.8853612
703	2.8469553	736	2.8668778	769	2.8859263
704	2.8475727	737	2.8674675	770	2.8864907
705	2.8481891	738	2.8680564	771	2.8870544
706	2.8488047	739	2.8686444	772	2.8876173
707	2.8494194	740	2.8692317	773	2.8881795
708	2.8500333	741	2.8698182	774	2.8887410
709	2.8506462	742	2.8704039	775	2.8893017
710	2.8512583	743	2.8709888	776	2.8898617
711	2.8518696	744	2.8715729	777	2.8904210
712	2.8524800	745	2.8721563	778	2.8909796
713	2.8530895	746	2.8727388	779	2.8915375
714	2.8536982	747	2.8733206	780	2.8920946
715	2.8543060	748	2.8739016	781	2.8926510
716	2.8549130	749	2.8744818	782	2.8932068
717	2.8555192	750	2.8750613	783	2.8937618
718	2.8561244	751	2.8756399	784	2.8943161
719	2.8567289	752	2.8762178	785	2.8948697
720	2.8573325	753	2.8767950	786	2.8954225
721	2.8579353	754	2.8773712	787	2.8959747
722	2.8585372	755	2.8779469	788	2.8965262
723	2.8591383	756	2.8785218	789	2.8970770
724	2.8597386	757	2.8780959	790	2.8976271
725	2.8603380	758	2.8796692	791	2.8981765
726	2.8609366	759	2.8802418	792	2.8987252
727	2.8615344	760	2.8808136	793	2.8992732
728	2.8621314	761	2.8813847	794	2.8998205
729	2.8627275	762	2.8819550	795	2.9003671
730	2.8633229	763	2.8825245	796	2.9009131
731	2.8639174	764	2.8830934	797	2.9014583
732	2.8645111	765	2.8836614	798	2.9020029
733	2.8651040	766	2.8842288	799	2.9025468
734	2.8656961	767	2.8847954	800	2.9030900
N 3			800		

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
801	2.9036325	834	2.9211660	867	2.9380191
802	2.9041744	835	2.9216865	868	2.9385197
803	2.9047155	836	2.9222063	869	2.9390198
804	2.9052560	837	2.9227255	870	2.9395192
805	2.9057959	838	2.9232440	871	2.9400181
806	2.9063350	839	2.9237620	872	2.9405165
807	2.9068735	840	2.9242793	873	2.9410142
808	2.9074114	841	2.9247960	874	2.9415114
809	2.9079485	842	2.9253121	875	2.9420080
810	2.9084850	843	2.9258276	876	2.9425041
811	2.9090209	844	2.9263424	877	2.9429996
812	2.9095560	845	2.9268567	878	2.9434945
813	2.9100905	846	2.9273704	879	2.9439889
814	2.9106244	847	2.9278834	880	2.9444827
815	2.9111576	848	2.9283958	881	2.9449759
816	2.9116902	849	2.9289077	882	2.9454686
817	2.9122221	850	2.9294189	883	2.9459607
818	2.9127533	851	2.9299296	884	2.9464523
819	2.9132839	852	2.9304396	885	2.9469433
820	2.9138138	853	2.9309490	886	2.9474337
821	2.9143432	854	2.9314579	887	2.9479236
822	2.9148718	855	2.9319661	888	2.9484130
823	2.9153998	856	2.9324738	889	2.9489018
824	2.9159272	857	2.9329808	890	2.9493900
825	2.9164539	858	2.9334873	891	2.9498777
826	2.9169800	859	2.9339932	892	2.9503648
827	2.9175055	860	2.9344984	893	2.9508514
828	2.9180303	861	2.9350031	894	2.9513375
829	2.9185545	862	2.9355073	895	2.9518230
830	2.9190781	863	2.9360108	896	2.9523080
831	2.9196010	864	2.9365137	897	2.9527924
832	2.9201233	865	2.9370161	898	2.9532763
833	2.9206450	866	2.9375179	899	2.9537597
834	2.9211660	867	2.9380191	900	2.9542425

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
901	2.9547248	934	2.9703469	967	2.9854265
902	2.9552065	935	2.9708116	968	2.9858754
903	2.9556877	936	2.9712758	969	2.9863238
904	2.9561684	937	2.9717396	970	2.9867717
905	2.9566486	938	2.9722028	971	2.9872192
906	2.9571282	939	2.9726656	972	2.9876663
907	2.9576073	940	2.9731279	973	2.9881128
908	2.9580858	941	2.9735896	974	2.9885590
909	2.9585639	942	2.9740509	975	2.9890046
910	2.9590414	943	2.9745117	976	2.9894498
911	2.9595484	944	2.9749720	977	2.9898946
912	2.9599948	945	2.9754318	978	2.9903389
913	2.9604708	946	2.9758911	979	2.9907827
914	2.9609462	947	2.9763500	980	2.9912261
915	2.9614211	948	2.9768083	981	2.9916690
916	2.9618955	949	2.9772662	982	2.9921115
917	2.9623693	950	2.9777236	983	2.9925535
918	2.9628427	951	2.9781805	984	2.9929951
919	2.9633155	952	2.9786369	985	2.9934362
920	2.9637878	953	2.9790929	986	2.9938769
921	2.9642596	954	2.9795484	987	2.9943171
922	2.9647309	955	2.9800034	988	2.9947569
923	2.9652017	956	2.9804579	989	2.9951963
924	2.9656720	957	2.9809119	990	2.9956352
925	2.9661417	958	2.9813655	991	2.9960737
926	2.9666110	959	2.9818186	992	2.9965117
927	2.9670797	960	2.9822712	993	2.9969492
928	2.9675480	961	2.9827234	994	2.9973864
929	2.9680157	962	2.9831751	995	2.9978231
930	2.9684829	963	2.9836263	996	2.9982593
931	2.9689497	964	2.9840770	997	2.9986952
932	2.9694159	965	2.9845273	998	2.9991305
933	2.9698816	966	2.9849771	999	2.9995655
934	2.9703469	967	2.9854265	1000	3.0000000
N 4			1000		

TRIGONOMETRIÆ
THEORICO-PRACTICÆ
PARS QUARTA.

THEORY OF PRACTICE

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ЛЕНИЗДАТ" ЛЕНИНГРАД



TRIGONOMETRIÆ

THEORICO-PRACTICÆ

PARS QUARTA.

De Triangulis sphæricis.



TRIGONOMETRIA sphærica est ars resolvendi triangula sphærica. In omni quippe triangulo sphærico habentur tria latera, & tres anguli; ex his si tria nota sint, nimirum, vel tres anguli, vel tria latera, vel duo latera, & unus angulus, vel duo anguli, & unum latus,

Trigonometria sphærica docet reliqua invenire; hæc autem inventio dicitur *resolutio* trianguli sphærici.

DE-

DEFINITIONES, ET PRINCIPIA

DEFINITIO I.

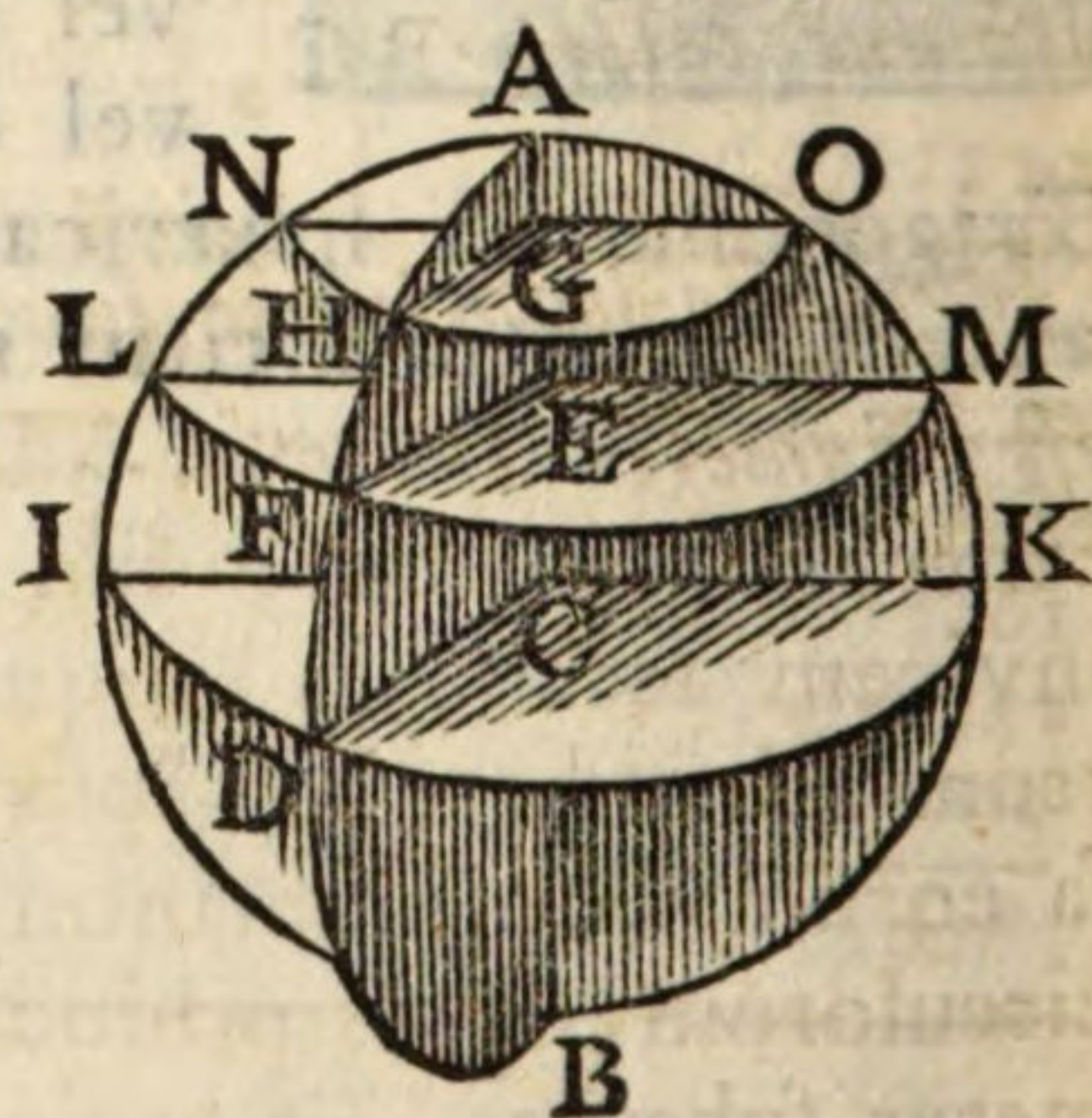
219. **S**I semicirculus ADB circa suam diametrum AB immotam gyret, hac integra circumvolutione generat solidum, quod *sphæra* dicitur; & semicircumferentia $AHFD B$ generat superficiem curvam, quam *superficiem sphaericam* vocamus. Juxta hanc genesim, semicirculus ADB dici solet *semicirculus generator*.

Corollarium I.

220. **H**Oc solidum, seu sphæra commune habet cum semicirculo genitore centrum C ; omnesque radii ab hoc centro ad sphære superficiem ducti, æquales sunt inter se; quippe qui sunt ipsissimi radii semicirculi genitoris ADB , in aliquo suæ revolutionis instanti.

Corollarium II.

221. **S**I concipiantur infinitæ lineæ HG , FE , DC &c., a quovis puncto semicircumferentiæ ADB ductæ perpendiculariter in diametrum AB , omnes hæ lineæ, quæ dicuntur *elementa semicirculi genitoris* ADB , integra revolutione semicirculi describent totidem circulos NHO , LFM , IDK &c., qui considerantur, tanquam *elementa ejusdem sphære*.



Co-

Corollarium III.

222. **A**Tque hinc, si sphaera secetur quocunque plano, communis intersectio ejusdem cum sphaera erit circulus. Nam I. si planum transeat per centrum, omnes lineæ in hoc plano ductæ a centro sphaeræ ad ejus superficiem, sunt æquales (n. 220.). Itaque communis sectio hujus plani cum sphaera, erit circulus, qui idem cum sphaera habebit centrum, eosdemque radios. II. Si planum fecans non transeat per centrum, ejus sectio cum sphaera erit parvus circulus, cujus radii erunt H G, F E &c. Nam pro circulo genitore assumi semper poterit circulus ille, cujus diameter sit diameter ipsa sphaeræ perpendicularis huic plano secanti.

Corollarium IV.

223. **H**inc duo circuli, qui transeunt per centrum sphaeræ, sunt inter se æquales. Habent enim omnes centrum idem cum sphaera, eosdemque radios. Et circuli, quorum plana transeunt per centrum sphaeræ, dicuntur *circuli sphaeræ maximi*, nempe omnium in eadem sphaera descriptorum. Et vicissim, *circuli maximi per sphaeræ centrum transeunt*.

Corollarium V.

224. **C**irculi maximi se omnes mutuo bifariam secant, & communis intersectio planorum eorundem est diameter sphaeræ. Cum enim omnium plana per centrum transeant, sibi occurrunt in centro, & sese invicem secant in aliqua recta, quæ transit per centrum sphaeræ, quod ipsis commune est; ac proinde ipsa eorum planorum intersectio & erit diameter eorum circulorum, quos proinde secabit bifariam, & erit diameter sphaeræ. Et reciprocè, *circuli, qui se mutuo bifariam secant, sunt maximi*.

Corollarium VI.

225. **S**I planum non transeat per centrum sphæræ, sectio erit circulus *major*, *vel minor*, prout planum sectionis magis, vel minùs accedet ad centrum sphæræ.

Corollarium VII.

226. **P**Er duo quævis puncta assumpta in superficie sphæræ, potest duci circulus maximus. Nam per data duo puncta, & centrum, potest duci planum, cujus sectio cum superficie sphæræ, erit circulus maximus (n. 222.), & transibit per data puncta.

Monitum.

227. **C**Um deinceps circumferentias, & arcus nominabimus, id intelligas velim de iis arcubus, qui ad maximos sphæræ circulos spectant; quos unicè considerat Trigonometria sphærica.

DEFINITIO II.

228. **D**iameter sphæræ est quælibet recta linea per centrum extensa, & utrinque in sphæræ superficie terminata.

Axis sphæræ est sola diameter *fixa* AB, circa quam sphæra convertitur, aut semicirculi genitoris ADB motu gignitur.

Poli sphæræ sunt extrema puncta axis; qui poli, sicut axis, immobiles sunt.



Cir-

Circuli sphæræ habent similiter axem suum singuli, suosque polos.

Axis circuli NHO , vel LFM &c., est linea recta AB , quæ transit per ejus centrum G , vel E , & est plano ejusdem circuli perpendicularis.

Poli circuli sunt puncta extrema ejusdem axis AB , posita in superficie sphæræ.

Corollarium I.

229. **P**olus quilibet circuli æquidistat ab omnibus punctis suæ circumferentiæ. Nam circuli cujusvis axis perpendicularis est plano ejusdem, & transit per ipsius centrum; ergo puncta quælibet axis æquidistant ab omnibus punctis circumferentiæ circuli, cujus est axis, perinde ac ipsius circuli centrum. Itaque puncta A & B sunt poli omnium circulorum parallelorum NHO , LFM , IDK &c., quorum plano recta AB perpendicularis est, & per eorum centra transit.

Corollarium II.

230. **S**i maximus circulus transeat per polos alterius maximi circuli, huic erit perpendicularis. Neque enim per polos hujus circuli transire potest, quin transeat per axem eidem perpendicularem (n. 228.); ac proinde necesse est, ut planum, quod per axem alterius circuli transit, sit eidem perpendiculare.

Corollarium III.

231. **E**T reciprocè, si maximus circulus sit alteri maximo circulo perpendicularis, transibit quoque per ejusdem polos. Cùm enim ambo sint maximi circuli, habent commune centrum, per quod transit utriusque axis; quare, si alter alteri perpendicularis est, alter per alterius axem transit, & consequenter per alterius polos.

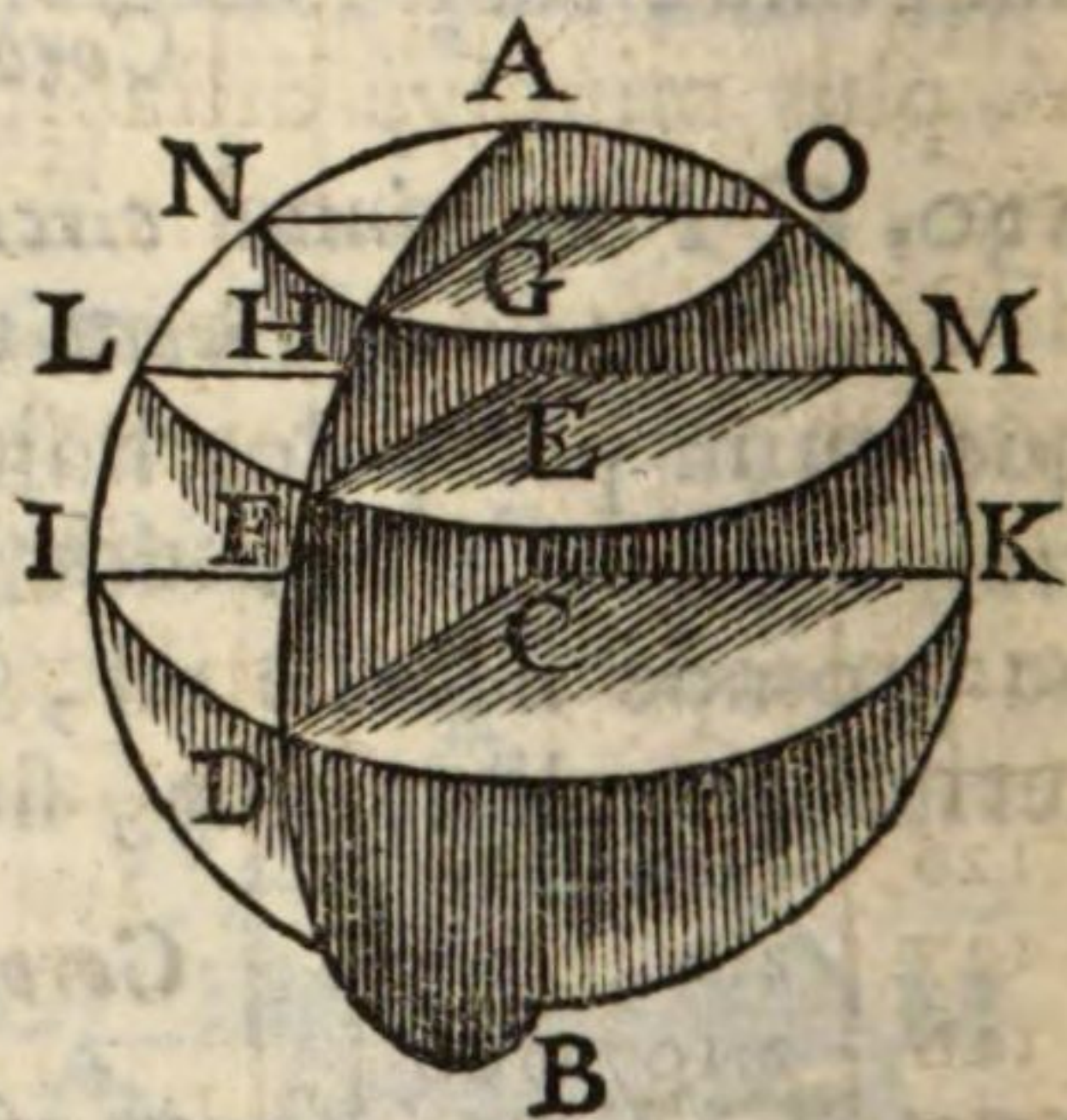
Corollarium IV.

232. I. **S**I maximus circulus transit per polos alterius, hic quoque transibit per polos primi. Nam primus perpendicularis erit secundo, ac proinde secundus perpendicularis primo; itaque transibit per ejusdem polos.

II. Si duo, aut plures arcus maximorum circulorum sese interfecent in polo alterius circuli, erunt omnes eidem perpendiculares; & reciprocè (n. 230. 231.).

III. Quoniam punctum, in quo se mutuò interfecant duo arcus perpendiculares tertio, est polus hujus arcus, hinc sequitur, quòd a puncto, quod non sit polus sui arcus, unicus arcus perpendicularis in eundem duci potest.

IV. Si maximus circulus, puta, AIBK, transeat per polum A alterius pariter maximi circuli IDK, arcus AI primi, interceptus inter polum, & circumferentiam secundi, est quadrans circuli. Nam hi duo maximi circuli se mutuò bifariam secant (n. 224.); ac proinde IAK est semicircumferentia. Præterea polus A æquidistat ab omnibus punctis circumferentiæ circuli, cujus est polus; & consequenter arcus AI æqualis erit arcui AK; & uterque erit quadrans circuli.



Corollarium V.

233. **H**inc omnes arcus circulorum maximorum, intercepti inter eorundem polum, & circumferentiam, æquantur inter se; quippe qui sunt omnes graduum 90; hoc est, polus quilibet distat gradibus 90
ab

ab omnibus punctis sui arcus, vel circumferentiæ. Hanc autem distantiam metimur potiùs in ipsa superficie sphæræ, quàm per lineas rectas.

Illud etiam consequitur ex Coroll. II. III. V., quòd, datis duobus arcubus invicem perpendicularibus, si super alterutro accipiat quadrans circuli a puncto intersectionis, punctum, quod terminabit quadrantem circuli, erit polus alterius arcus.

Corollarium VI.

234. **S***I in circumferentia circuli maximi accipiantur duo puncta, quæ non sint invicem separata per semicircumferentiam, horum quodlibet distare non poterit gradibus 90 ab alio puncto A, quod non sit polus ejusdem circuli. Finge etenim alium maximum circulum I D K, cujus hoc idem punctum A sit polus. Itaque punctum A distabit 90 gradibus a quovis puncto circumferentiæ hujus secundi circuli (n. 233.). Cùm autem hi duo maximi circuli sese invicem necessariò secent, punctum A plus minùsve distabit a punctis primæ circumferentiæ, quàm a punctis secundæ, exceptis duobus intersectionis punctis, quæ ad utramque pertinent, sed invicem separantur per semiperipheriam. Ergo punctum A distare non poterit gradibus 90, a duobus primæ circumferentiæ punctis, quæ non sint invicem separata per semicircumferentiam.*

Corollarium VII.

235. **H***inc, si duo puncta arcus minoris semicircumferentiæ circuli, distent singula gradibus 90 ab alio puncto, hoc punctum erit polus arcus, de quo agitur. Sin autem hæc duo puncta sint extremitates arcus æqualis semicircumferentiæ, poterunt singula distare gradibus 90 ab aliquo puncto, quod non sit polus ejusdem arcus.*

DEFINITIO III.

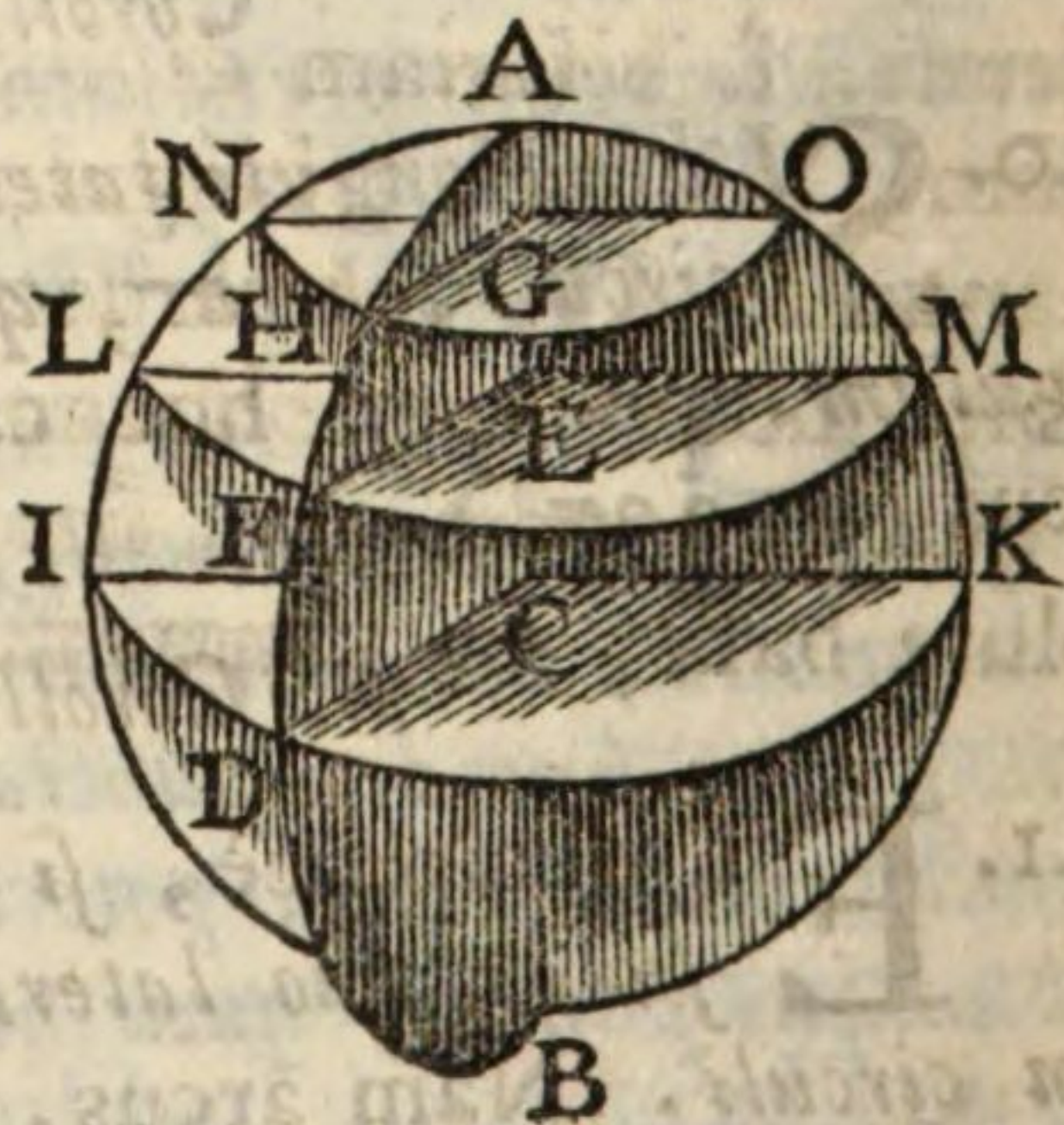
236. **A**ngulus sphaericus NAH dicitur ille, quem in sphaeræ superficie duo maximorum circulorum arcus AN , AH , se mutuò secantes continent.

Vel, ut melius origo, & idæa anguli sphaerici concipiatur, *Angulus sphaericus* NAH ille est, quem efficit inclinatio duorum planorum utriusque maximi circuli ADB , AIB . Ratio est, quia angulus NAH non differt ab angulis NGH , LEF , ICD , quorum quilibet est mensura inclinationis planorum AIB , ADB , in quovis puncto communis intersectionis AB . Quare *angulus sphaericus* NAH eandem habet mensuram, quam habet angulus, quem efficiunt plana circulorum, ad quos pertinent iidem arcus AN , AH .

Cùm autem Trigonometria sphaerica versetur unice circa maximos circulos, hinc *arcus* ID erit *mensura anguli sphaerici* IAD , vel IBD . Ratio est, quia & est *arcus* circuli maximi, & est *mensura* anguli ICD , æqualis angulo sphaerico A , vel B .

Corollarium I.

237. **I**taque, dato angulo sphaerico NAH , si concipiatur tertius circulus IDK , cujus polus sit *summitas* A anguli sphaerici, *arcus* ID circuli, interceptus a duobus lateribus AN , AH , productis, si opus sit, erit *mensura anguli sphaerici*. Nam duo arcus AN , AH , qui sunt latera ejusdem anguli, transeunt per polum A tertii circuli IDK , per hyp.; ergo duo arcus AN , AH perpendiculares sunt circulo IDK .



(n. 230.).

(n. 230.). Et reciprocè, tertius hic circulus IDK perpendicularis est duobus arcibus, & planis suorum circulorum; ac proinde arcus ID , interceptus inter duos arcus, est mensura anguli ICD , quem inter se efficiunt plana duorum arcuum; qui non differt ab angulo NAH (n. 236.).

Corollarium II.

238. **V**ertex anguli sphærici est polus arcus, qui eundem angulum metitur. Hinc mensura anguli sphærici a vertice ejusdem semper distat quadrante circuli.

Corollarium III.

239. **M**ensura anguli sphærici est perpendicularis suis lateribus. Et vicissim, omnis arcus perpendicularis duobus anguli lateribus, est ejusdem mensura. Quod æquè verum esset de arcu, qui pertineret ad minorem circulum; nam etiam hujusmodi arcus, qui perpendicularis esset duobus lateribus, vel, quod eodem recidit, cujus polus esset vertex anguli, jurè assumi posset tanquam mensura ejusdem. Verùm Trigonometria sphærica arcus dumtaxat maximorum circulorum considerat.

Corollarium IV.

240. **S**i bina anguli latera æquent singula quadrantem circuli, arcus, qui basis est, metitur eundem angulum. Nam in hoc casu vertex anguli erit polus arcus (n. 237.).

Corollarium V.

241. **E**T reciprocè, si basis anguli sit ejusdem mensura, duo latera æquabunt singula quadrantem circuli. Nam arcus, qui angulum sphæricum metitur,

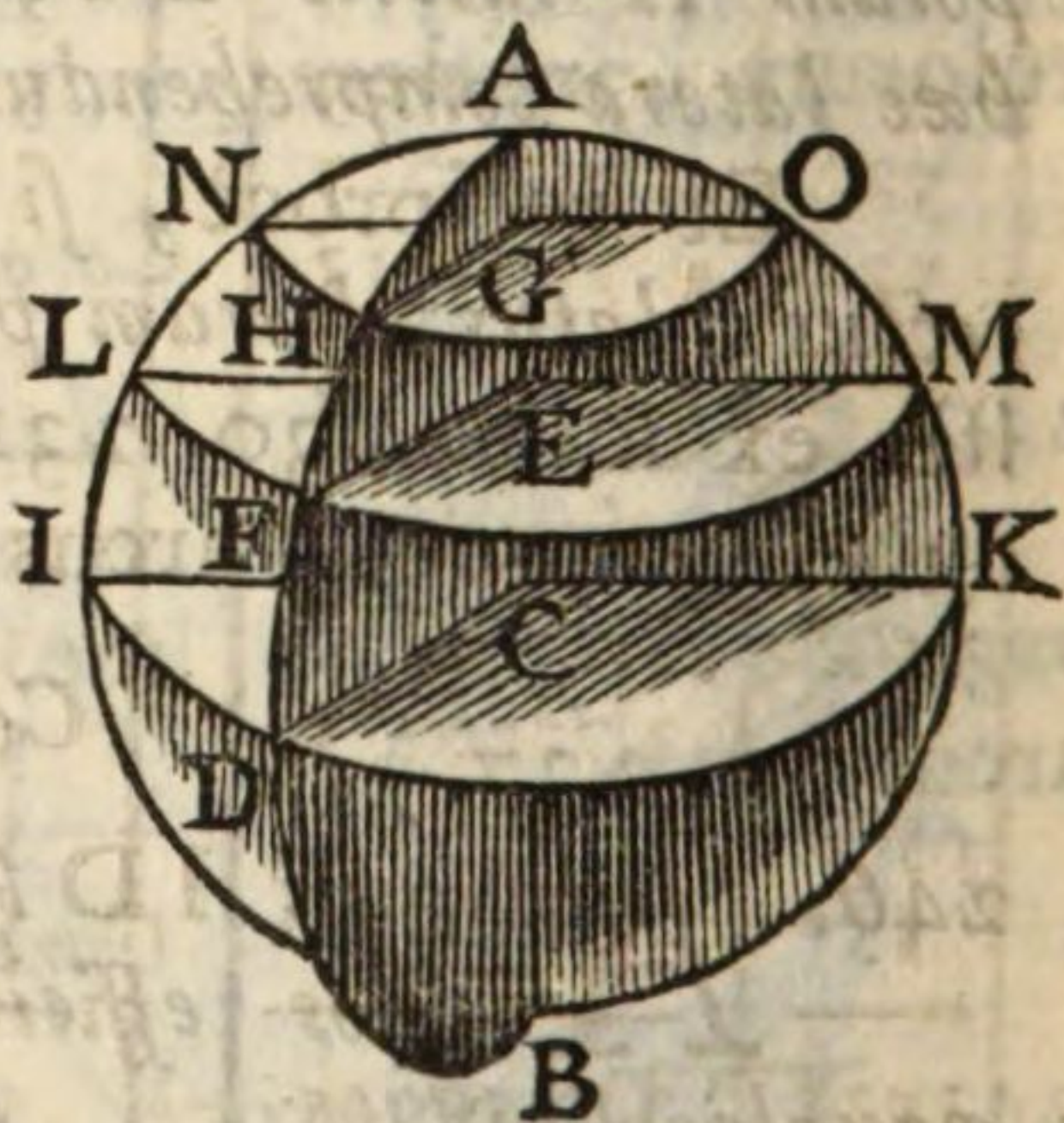
titur, perpendicularis est suis lateribus (n. 239.); ac reciprocè, latera eidem arcui perpendiculariter insistent. Ergo eorum sectio fiet in polo ejusdem arcus; & erunt singula æqualia quadranti circuli (n. 232.).

Monitum.

Notabis maximum discrimen inter angulum sphaericum, de quo agimus, & angulum curvilineum, quem duo arcus circulorum in eodem plano descriptorum efficiunt. Nam angulus sphaericus nihil verè est aliud, quàm angulus, quem efficiunt plana circulorum, quorum circumferentiæ eodem modo sese invicem secant, atque eorum plana. Curvatura harum circumferentiarum, vel convexa, vel concava, non flectitur versùs internam anguli sphaerici partem; contra quàm accidat in angulo curvilineo, cujus latera sunt arcus, quorum curvatura ad internam anguli partem convertitur.

Corollarium VI.

242. **S**I duo arcus AIB, ADB maximorum circulorum occurrant in duobus punctis A & B, anguli oppositi IAD, IBD sunt æquales. Nam singuli æquantur angulo, quem efficiunt plana circulorum (n. 236.). Præterea duo arcus AIB, ADB, intercepti a punctis intersectionis, æquantur singuli semicircumferentiæ (n. 224.).



Corollarium VII.

243. **D**UO maximorum circulorum arcus, quorum unus minor sit semicircumferentiâ circuli, non possunt claudere spatium in superficie sphæræ. Ratio est, quia, ut claudant spatium, opus est, ut occurrant in duobus punctis; quod fieri non potest, si alteruter, vel uterque sit minor semiperipheriâ.

Corollarium VIII.

244. **A**Ngulus sphæricus IDA rectus est, quem metitur quadrans IA ; vel, quem in sphæræ superficie duo arcus maximorum circulorum sese ad angulos rectos secantium, hoc est, quorum alter ad alterum rectus est, continent.

Angulus sphæricus obtusus est, qui recto major est; acutus verò, qui recto est minor.

Corollarium IX.

245. **S**I latera DI , DA anguli sphærici IDA sint ejusmodi, ut latus DI transeat per polum I alterius lateris DA , & vicissim latus DA transeat per polum A lateris DI , angulus sphæricus IDA , quem hæc latera comprehendunt, erit rectus.

Et reciprocè, si angulus sphæricus IDA ponatur rectus, latus alterum per alterius polum transibit. Constat ex num. 230. 231. Nam in utroque casu duo circuli, eorumque arcus sunt invicem perpendiculares.

Corollarium X.

246. **A**Nguli IDA , BDK , ad verticem oppositi, quos efficiunt arcus se invicem secantes, æquales sunt.

Anguli NAH , HAO , deinceps consequentes, quos efficit arcus HA , occurrens arcui NAO , simul sumpti

æquantur duobus rectis, hoc est, gradibus 180. Nam singuli habent pro mensura duos arcus ID, DK, qui semicirculum conficiunt; ac proinde, si eorum unus rectus est, alter erit similiter rectus.

Scholion.

I*N hac consideratione, quæ de angulis rectilineis demonstrantur Theoremata, aptantur eadem angulis sphæricis.*

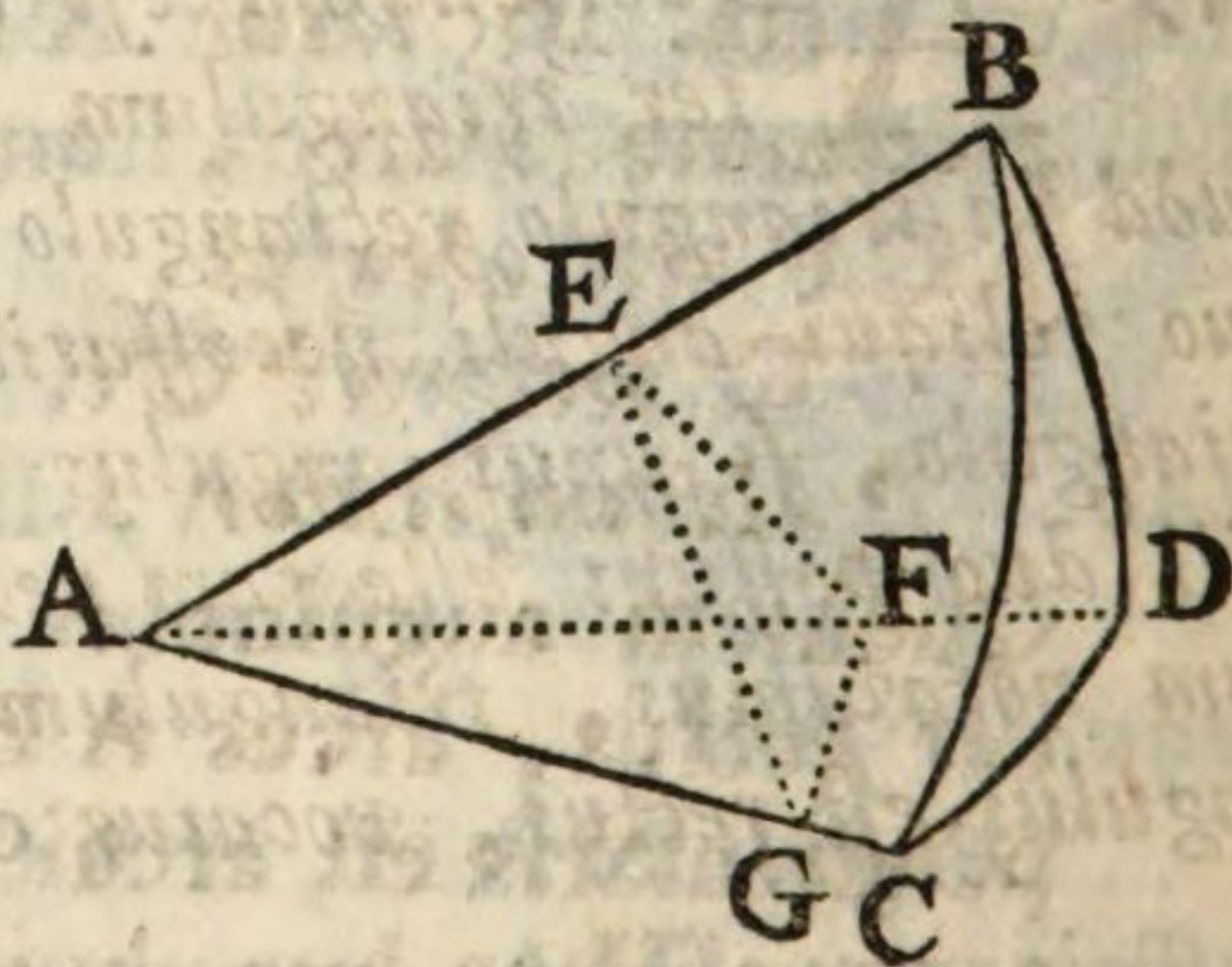
DEFINITIO IV.

247. **T***riangulum sphæricum dicitur illud, quod continetur in superficie sphæræ tribus maximorum circulorum arcubus, qui dicuntur ejus latera.*

Ut autem trianguli sphærici idæa habeatur phantasiæ Tironum, ac metiendis concipiendisque ejusdem angulis accommodatior, consideretur triangulum sphæricum BCD instar pyramidis triangularis ABCD, cujus vertex A sit in centro sphæræ, & basis BCD sit portio superficiiei sphæricæ, terminata tribus arcubus maximorum circulorum.

Itaque tres facies hujus pyramidis sunt totidem maximorum circulorum sectores BAC, BAD, CAD, quorum tres anguli in centro A habent *pro mensura arcus BC, BD, CD, qui sunt latera trianguli sphærici BCD.*

Præterea anguli, quos inter se efficiunt tria sectorum plana, sunt ipsissimi anguli trianguli sphærici; puta, angulus, quem efficiunt sectores BAC, BAD, est angulus ipse sphæricus CBD (n. 236.).



Scho-

Scholion.

ET si arcus circulorum non maximorum, tam angulos, quàm triangula sphærica constituent, nihilominus hujusmodi anguli, atque triangula a Trigonometricis non considerantur; ac tanquam inutilia a Definitionibus excluduntur.

248. In triangulis sphæricis eadem cadit divisio, quæ in rectilineis, nempe in *Æquilaterum*, *Isosceles*, & *Scalenum*. Triangulum sphæricum *æquilaterum* est, quando omnes arcus, quibus continetur, sunt æquales: est *isosceles*, si duo arcus tantum æquales extiterint; *scalenum* denique est, si omnes arcus inæquales inter se fuerint.

Insuper dividitur etiam triangulum sphæricum, sicuti rectilineum, in *Rectangulum*, *Ambligonium*, seu *obtusiangulum*, & *Oxigonium*, seu *acutiangulum*. Est porro triangulum sphæricum *rectangulum*, si aliquem angulum habuerit rectum; *obtusiangulum*, si aliquem angulum habuerit obtusum; ac denique *acutiangulum*, si omnes ejus anguli acuti fuerint.

Scholion.

249. **A**Dvertendum est tamen, hoc esse discrimen inter triangulum rectilineum, & sphæricum, quòd in triangulo rectangulo, & obtusiangulo rectilineo duo reliqui anguli necessariò sunt acuti; at in sphærico triangulo, si unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, alii duo possunt esse tam recti, quàm obtusi. Ut autem jam notavimus, triangulum sphæricum, in quo nullus angulus est rectus, vocatur *obliquangulum*.

Corollarium I.

250. **H**Abes hinc aliquot de triangulis sphæricis Propositiones, quæ eodem modo demonstrantur, quo similes Propositiones de triangulis rectilineis in Elementis Geom. planæ.

I. *Si duorum triangulorum sphæricorum latus unum uni æquale fuerit, angulique illis lateribus adjacentes fuerint quoque respectivè æquales, omnia reliqua, & triangula ipsa æqualia erunt.*

II. *Si duorum triangulorum sphæricorum latus unum uni, & alterum alteri sit æquale, angulique ab illis lateribus facti etiam sint æquales, reliqua omnia, & triangula ipsa æqualia erunt.*

III. *Si duo triangula sphærica habuerint omnia latera sibi mutuò æqualia, etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppositos, habebunt æquales.*

Harum trium Propositionum veritas, perinde ac de triangulis rectilineis, demonstratur per superimpositionem.

Scholion.

251. **T**riangula sphærica, quæ hoc loco comparantur, confici supponuntur super eadem sphæra, vel æqualibus sphæris. Si enim sphæræ, ex quarum sectione oriuntur, essent inæquales, tria latera unius essent dumtaxat similia tribus lateribus alterius, non autem æqualia. Idemque dici deberet de spatio ab iisdem arcubus, seu lateribus intercepto.

Demonstrabimus deinceps n. 257., si tres anguli unius trianguli sint respectivè æquales tribus alterius, latera primi fore æqualia lateribus secundi.

Corollarium II.

252. **D**uo quævis trianguli sphærici latera simul sumpta, majora sunt reliquo. Nimirum, arcus BC in triangulo sphærico BCD minor est summâ duorum DB, DC. Ratio est, quia arcus BC circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

THEOREMA I.

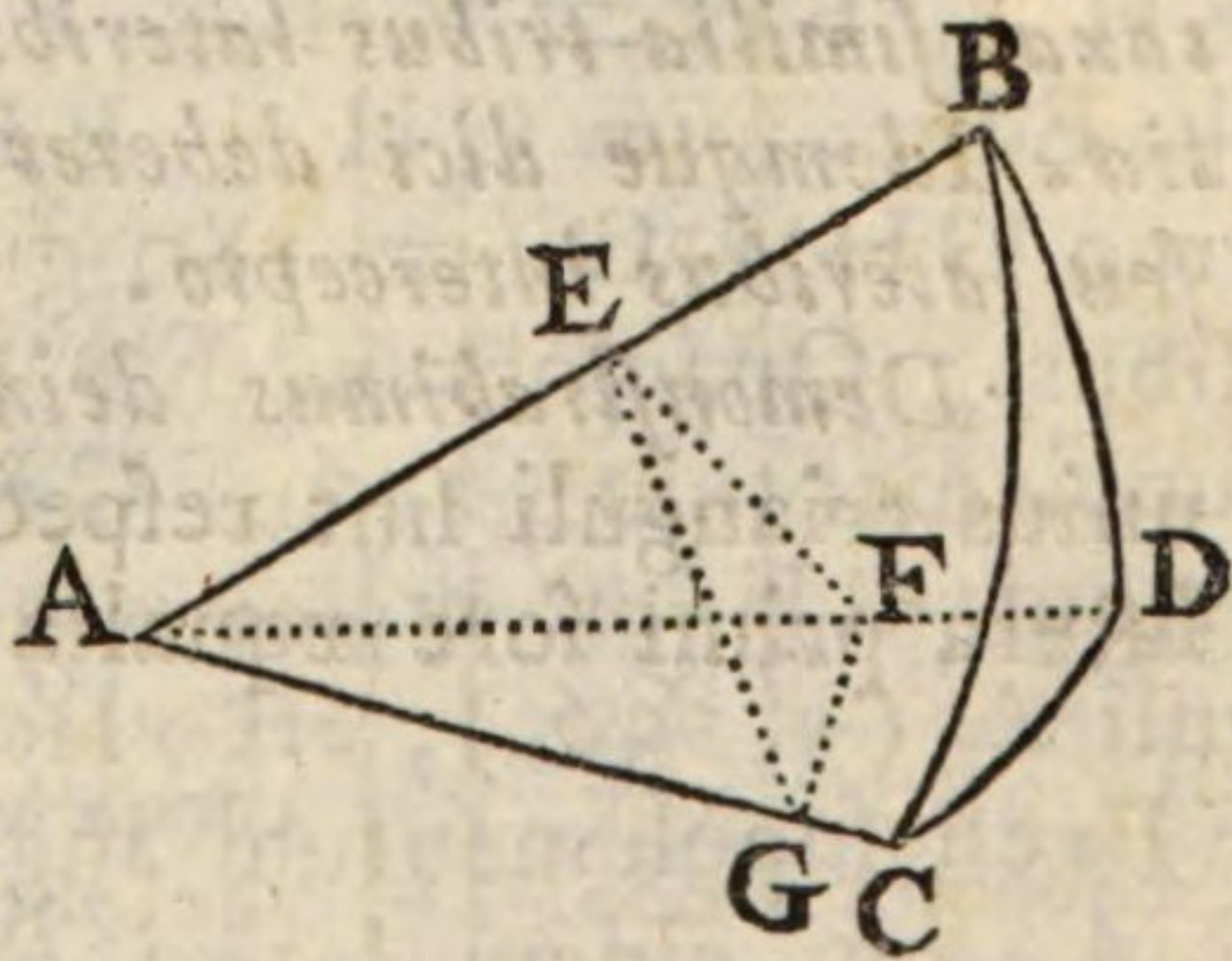
253. **I**n quovis triangulo sphærico tria latera simul sumpta, minora sunt circumferentiâ circuli, hoc est, gradibus 360.

Demonstratio. Nam omnes anguli plani, ex quibus constat angulus solidus, simul sumpti, minores sunt quatuor rectis (Tom. II. Geom. n. 39.); quamobrem, si concipiatur pyramis triangularis BACD, tria latera trianguli sphærici metientur tres angulos planos, ex quibus constat angulus solidus A; & consequenter minora erunt gradibus 360, qui mensuram quatuor rectorum efficiunt.

THEOREMA II.

254. **L**atus quodvis trianguli sphærici minus est semicircumferentiâ circuli, hoc est, gradibus 180.

Demonstratio. Nam latus quodvis trianguli sphærici est mensura anguli plani, qui est ad verticem pyramidis BACD; at quivis angulus planus semper minor est duobus rectis; ergo latus quodvis trianguli minus est semiperipheriâ, quæ est mensura duorum rectorum.



THEO-

THEOREMA III.

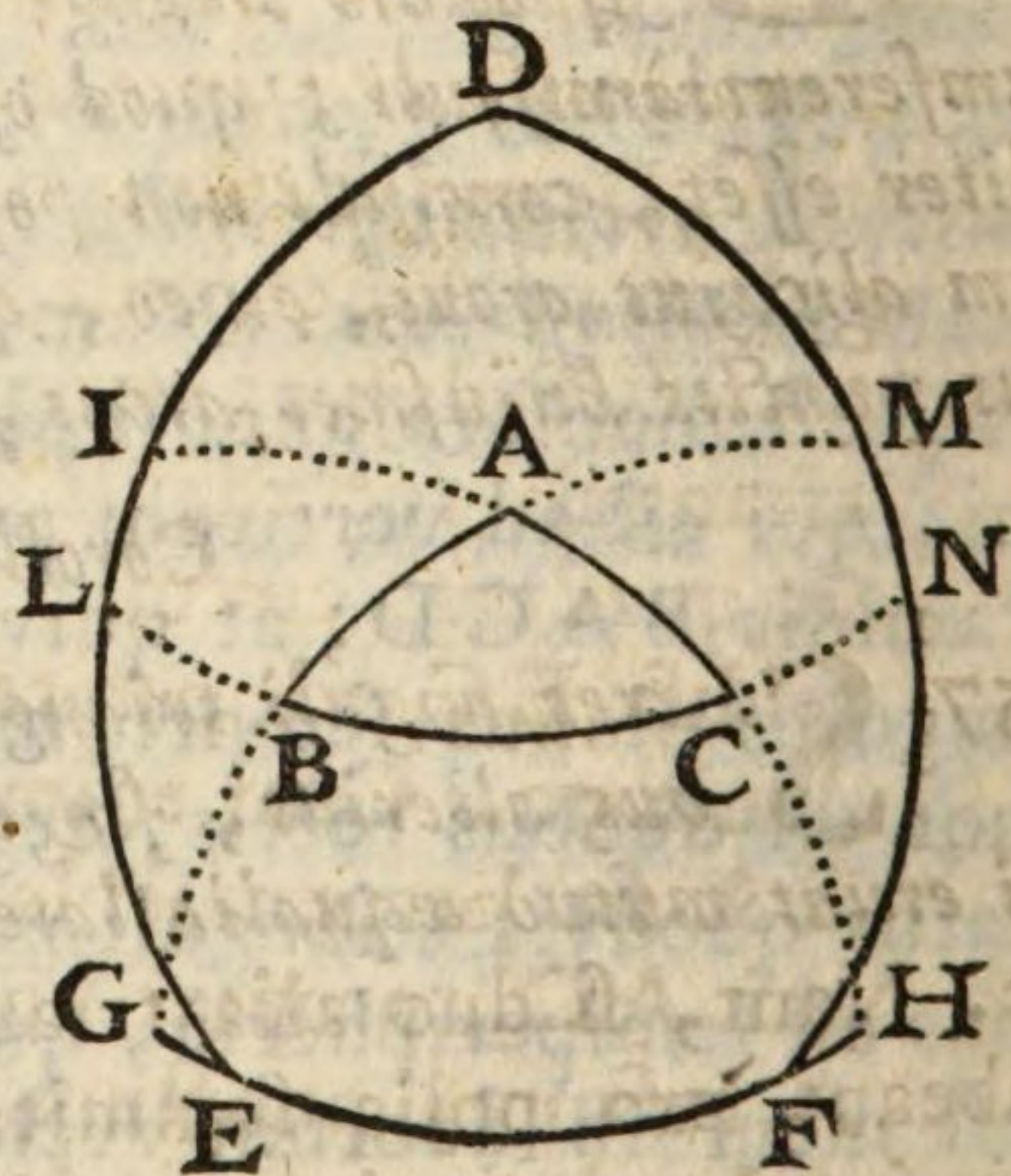
255. **S**I tres vertices trianguli sphaerici ABC sint poli trium arcuum, ex quibus triangulum aliud sphaericum constet DEF , erit quodvis trium laterum secundi, supplementum angulorum oppositorum primi.

Et reciprocè, latera primi singula, erunt supplementa angulorum oppositorum secundi.

Demonstratur I. pars. Quoniam punctum A est polus arcus EF , & punctum B similiter est polus arcus FD , punctum F hisce duobus arcibus commune, distabit gradibus 90 a quolibet puncto A & B (n. 233.); ac proinde punctum F erit polus arcus AB (n. 235.).

Pariter, quia punctum A est polus arcus EF , & punctum C polus arcus DE , punctum E utrique arcui EF , DE commune, distabit gradibus 90 a punctis singulis A & C ; & consequenter punctum E erit polus arcus AC . Eodem modo demonstrabitur, punctum D esse polum arcus BC .

Producantur utrinque tres arcus trianguli ABC , donec occurrant lateribus alterius trianguli. Arcus singuli EH , FG erunt graduum 90 . Nam polus arcus cujusvis distat 90 gradibus a quolibet puncto sui arcus (n. 233.); quare $EH + FG = 180$ grad. Atqui $EH + FG = EH + EG + EF$, sive $GH + EF$; ergo $GH + EF = 180$ gradibus. Quamobrem EF est supplementum arcus GH . Atqui GH est mensura anguli A (n. 236.); ergo latus EF est supplementum anguli A , qui eidem lateri opponitur.



Eodem modo demonstrabitur, DF supplementum esse anguli B , & DE supplementum anguli C . Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Trianguli ABC latera singula AB , AC , BC supplementa sunt angulorum oppositorum F , E , D . Nam angulus F habet pro mensura arcum MG . Atqui latus AB est supplementum arcus MG ; siquidem propter constructionem summitas A est polus arcus oppositi EF , seu potius GH ; & consequenter AG est quadrans circuli; eademque de causa arcus BM est pariter quadrans circuli; quare $AG + BM = 180$ gradibus. Atqui $AG + BM = AG + AM + AB$, seu $MG + AB$; ergo $MG + AB = 180$ gradibus. Constat itaque, AB supplementum esse arcus MG , sive anguli F .

Eodem modo demonstrabitur, arcum AC supplementum esse anguli E , & arcum BC supplementum anguli D . Quod erat alterum.

Scholion.

256. **D**emonstratio hujus Theorematis supponit, latus quodvis trianguli sphaerici minus esse semicircumferentiâ circuli; quod ostensum est n. 254. Nam, si aliter esset, concludi non posset, punctum aliquod esse polum alicujus arcus, ex eo, quod distet 90 gradibus a duobus punctis hujusmet arcus, seu lateris (n. 235.).

Corollarium.

257. **S**i tres anguli trianguli sphaerici æquales sint tribus alterius, singuli singulis, etiam latera primi erunt mutuo æqualia lateribus secundi, singula singulis. Nam, si duo alia triangula fiant, quorum latera habeant pro polis summitates angulorum ex duobus primis, latera unius æqualia erunt lateribus alterius; hinc (n. 250.) anguli unius æquales erunt angulis alterius.

terius. Atqui anguli horum triangulorum sunt supplementa laterum ex duobus primis triangulis; ergo hæc duo prima triangula habebunt latera mutuò æqualia.

Scholion.

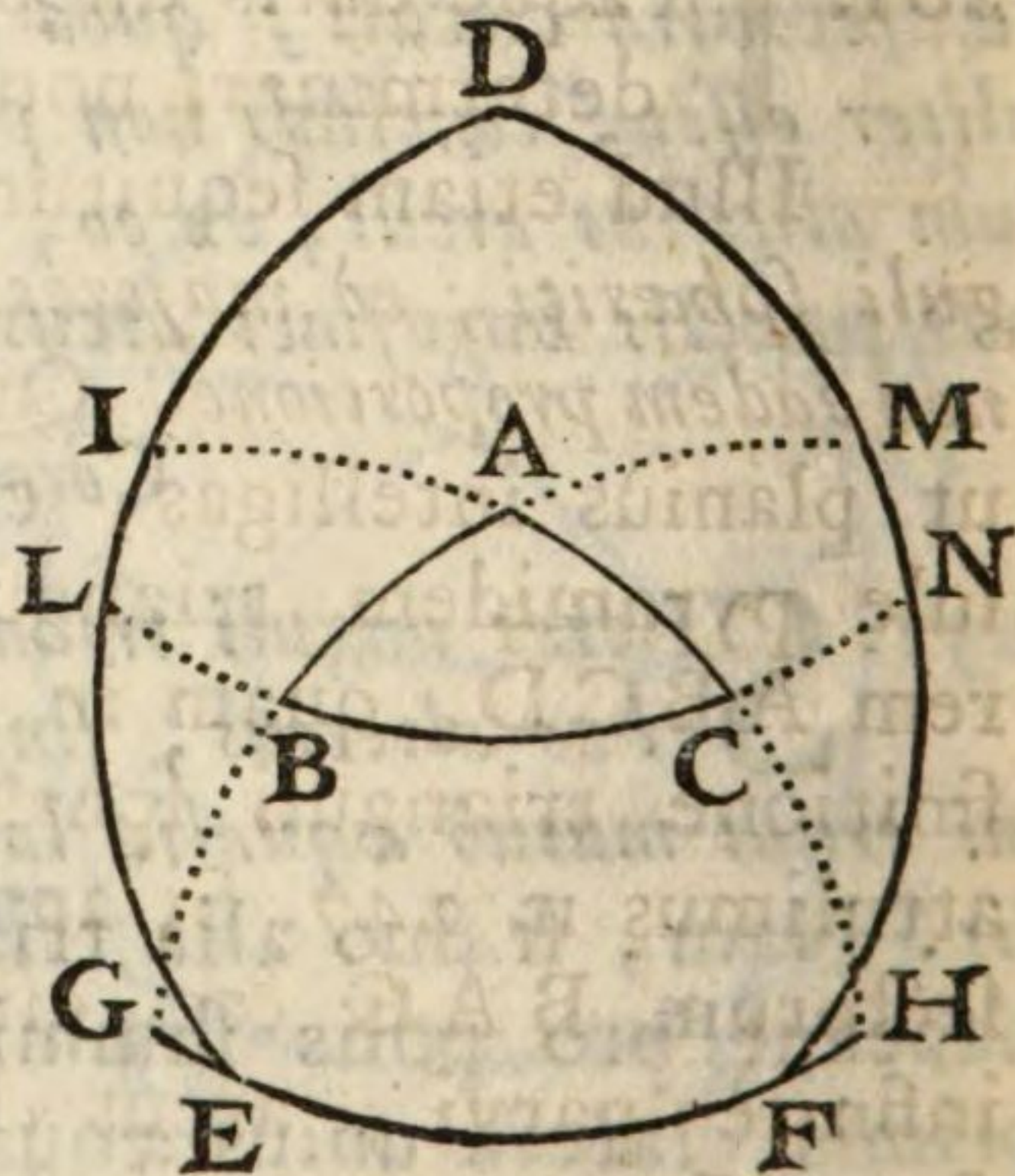
258. **H**oc Corollarium applicari non potest triangulis rectilineis. Quamvis enim in triangulis rectilineis anguli unius æquales sint angulis alterius, singuli singulis; deduci inde non potest, etiam latera mutuò esse æqualia; duo quippe triangula rectilinea possunt esse similia, quin eorum latera sint æqualia.

THEOREMA IV.

259. **I**n omni triangulo sphærico summa angulorum major est duobus angulis rectis, seu gradibus 180; & minor est sex angulis rectis, seu gradibus 540.

Demonstratur I. pars. Angulus quivis trianguli ABC, conjunctus lateri opposito trianguli DEF, conficit duos rectos; quippe alter alterius est supplementum (n. 255.). Ergo tres anguli primi trianguli ABC, adjuncti tribus lateribus alterius DEF, conficiunt valorem sex rectorum. Jam verò, quoniam tria latera trianguli sphærici simul sumpta, non æquant circumferentiam circuli (n. 253.), ac proinde minora sunt quatuor angulis rectis; hinc summa trium angulorum primi trianguli ABC, major erit duobus angulis rectis. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Angulus quivis sphæricus minor est duobus rectis. Nam, si arcus quivis occurrat alte-



ri ulteriùs producto a puncto concursus, efficit duos angulos deinceps positos; quorum summa dumtaxat æquatur duobus rectis. Ergo summa trium angulorum trianguli sphærici, minor est sex angulis rectis, seu gradibus 540. Quod erat alterum.

Corollarium I.

260. **H**Abes limites, intra quos continetur valor trium angulorum trianguli sphærici: hi limites sunt, *binc duo anguli recti, inde sex anguli recti*. Valor autem trium angulorum in triangulis sphæricis quàm maximè variatur, sed intra hosce limites.

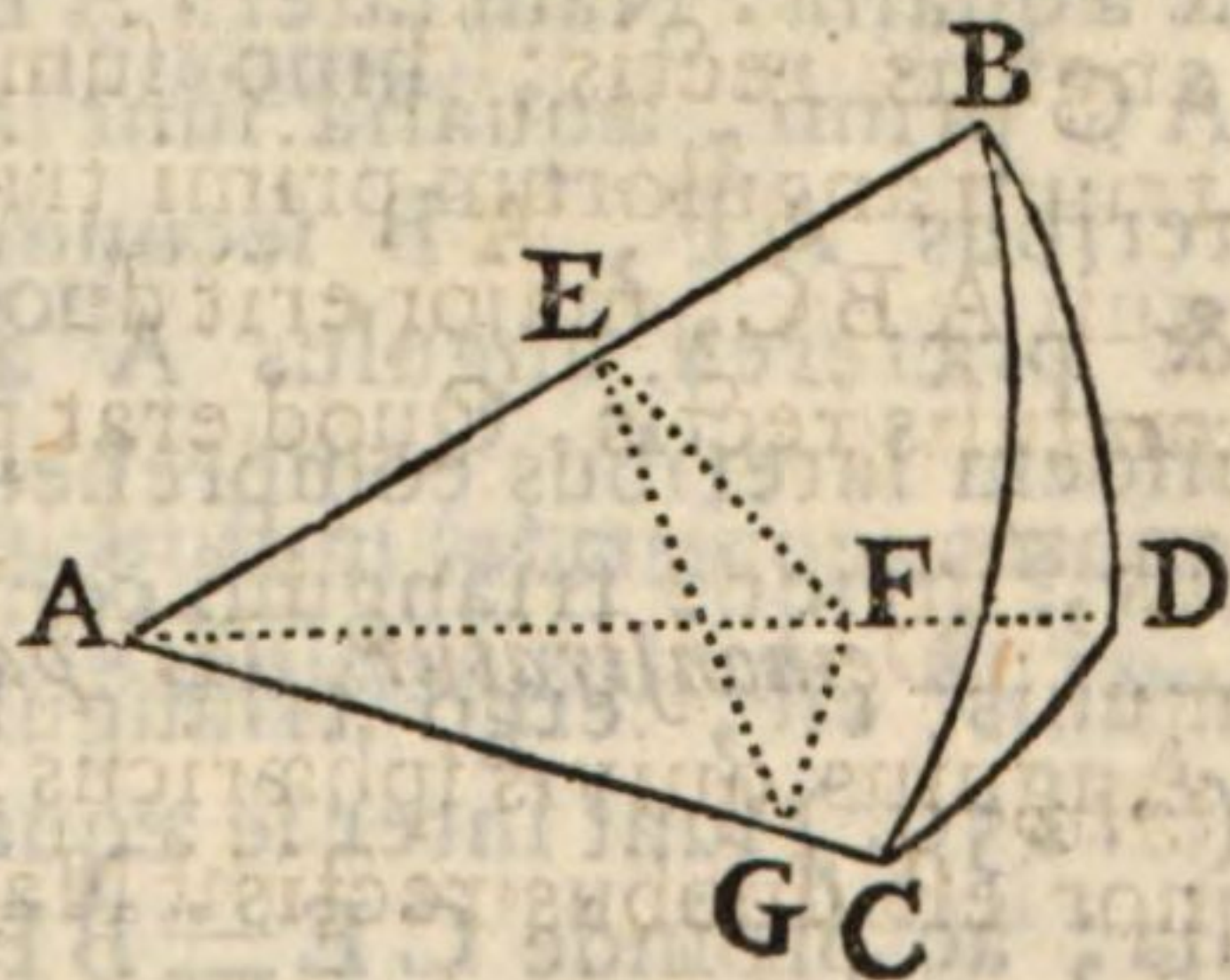
Nam I. tres anguli possunt singuli esse obtusi; quoniam eorum summa minor erit sex angulis rectis. II. Eadem de causa nihil impedit, quo minùs omnes tres anguli sint recti. III. Similiter poterunt esse omnes acuti, dummodo trium acutorum summa major sit duobus rectis. IV. Denique trium angulorum species variare potest in eodem triangulo, intra constitutos limites.

Corollarium II.

261. **I**Taque datis duobus angulis trianguli sphærici, determinari non potest valor tertii.

Illud etiam sequitur, *quòd majora sunt latera trianguli sphærici, eò majores quoque fieri angulos, quamvis non eadem proportionem*. Quod

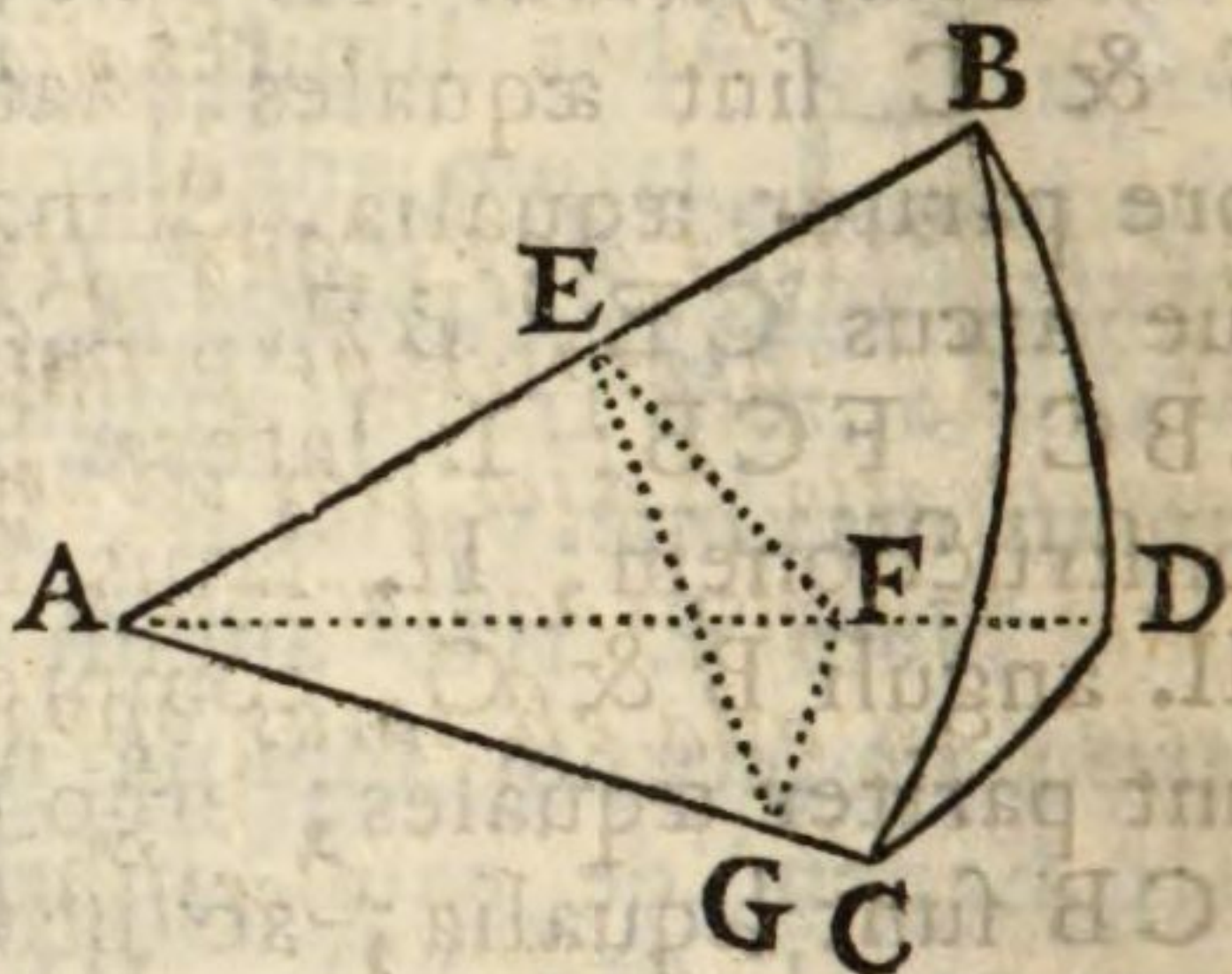
ut planiùs intelligas, consule pyramidem triangularem $ABCD$, quam in definitione trianguli sphærici attulimus n. 247. Si anguli sectorum BAC &c. essent infinitè parvi, arcus BC &c. essent quoque infinitè



par-

parvi, & instar linearum rectarum; ac proinde triangulum sphæricum infinitè accederet ad triangulum rectilineum; in quo casu, trium angulorum summa considerari posset tanquam æqualis duobus angulis rectis.

Contra verò, si summa angulorum planorum in vertice pyramidis proximè accedat ad valorem quatuor rectorum, hujusmodi sectores BAC &c. conficerent inter se angulos valde obtusos, quorum singuli proximè accederent ad duos rectos. Nam in hoc casu arcus, qui metiuntur angulos planos, definerent proximè in eandem circuli circumferentiam. Constat itaque propositum.

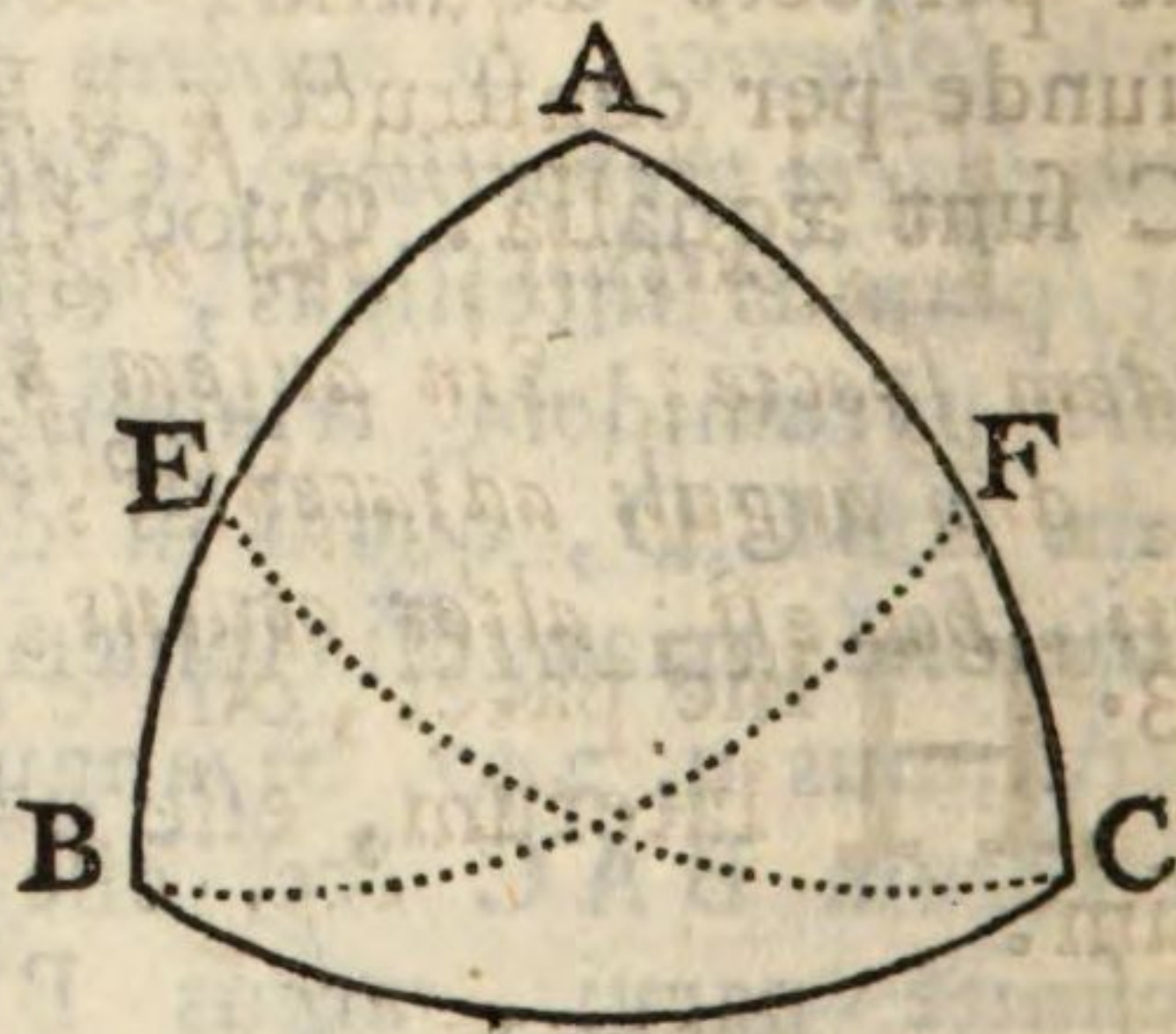


THEOREMA V.

262. **S**I trianguli sphærici ABC duo latera AB , AC æqualia inter se fuerint, anguli C & B , quibus æqualia latera subtenduntur, æquales erunt.

Et reciprocè, Si duo anguli C & B sint æquales, etiam latera iis opposita, æqualia erunt.

Demonstratur I. pars. Sumantur partes AE , AF æquales; ducanturque arcus CE & BF . Triangula AEC & AFB erunt inter se æqualia. Nam latera AE , AC primi, æqualia sunt lateribus AF , AB secundi; & præterea angulus A ab iisdem lateribus comprehensus, utrique triangulo communis est; ergo triangula (n. 250.) sunt inter se æqualia; ac proinde $CE = BF$.



Con-

Considerentur jam duo triangula EBC , FBC :
 I. $CE = BF$; II. $EB = FC$; III. BC latus utrique commune; itaque tria latera unius æqualia sunt tribus alterius, singula singulis; & consequenter (*n. 250.*) triangula erunt inter se æqualia; & angulus B æqualis angulo C . Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nimirum, si duo anguli B & C sint æquales, latera iis opposita AC , AB fore pariter æqualia. Sumatur $BE = CF$; ducanturque arcus CE , BF . Considerentur duo triangula EBC , FCB : I. latera BE , CF sunt æqualia per constructionem; II. latus BC est utrique commune; III. anguli B & C , comprehensi ab iisdem lateribus, sunt pariter æquales; ergo (*n. 250.*) triangula EBC , FCB sunt æqualia; ac proinde anguli BEC , CFB sunt æquales; atque hinc æquantur etiam eorum supplementa AEC , AFB . Similiter anguli ECB , FBC sunt æquales; ergo duæ reliquæ partes ABF , ACE , angulorum integrorum in B & in C , erunt quoque æquales; denique latera CE , BF horum angulorum sunt etiam æqualia. Ergo in hisce duobus triangulis AEC , AFB , bases CE , & BF sunt æquales; & anguli adjacentes basibus, sunt mutuò æquales, singuli singulis; ergo (*n. 250.*) duo hæc triangula AEC , AFB sunt perfectè æqualia; & consequenter $AE = AF$. Aliunde per construct., $BE = CF$; ergo latera AB , AC sunt æqualia. Quod erat alterum.

Corollarium.

263. **H**inc patet, omne triangulum sphæricum æquilaterum, esse quoque æquiangulum; & vicissim.

THEOREMA VI.

264. **S**I ab angulo verticali A , intercepto a lateribus æqualibus trianguli isoscelis ABC , demittatur arcus, qui basim BC bifariam secet in puncto D ; Dico I. triangulum ABC divisum iri in duo æqualia triangula, II. arcum AD fore perpendicularem basi BC .

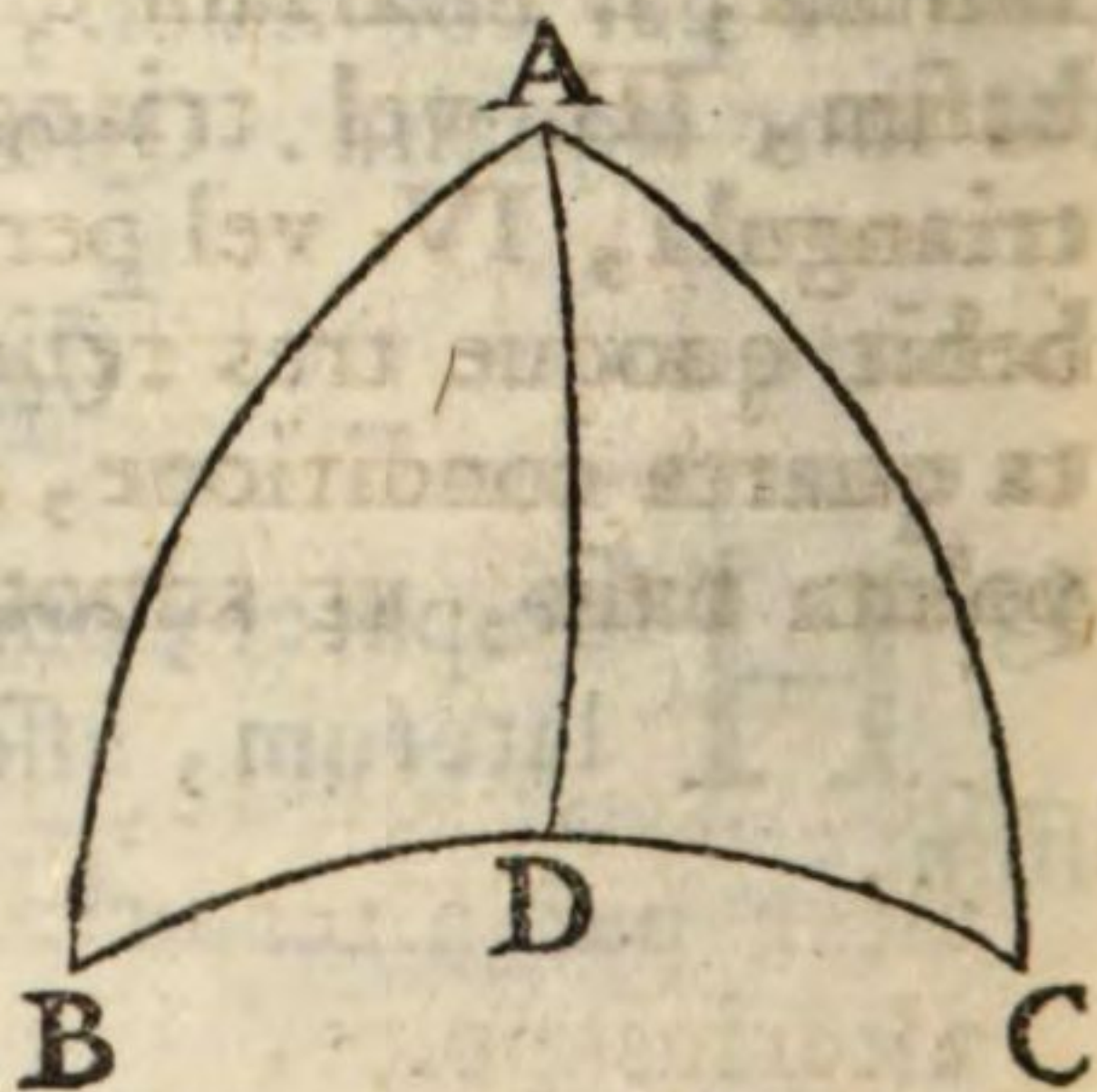
Demonstratur I. pars. Duo latera BA , BD , & angulus B interceptus, in primo triangulo ABD , æqualia sunt lateribus CA , CD , & angulo C intercepto, in secundo triangulo ACD (n. 262.). Ergo duo triangula ADB , ADC sunt in reliquis omnibus æqualia (n. 250.). Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quoniam duo triangula partialia, sunt in omnibus æqualia, erit angulus ADB æqualis angulo ADC ; aliunde horum angulorum quilibet est supplementum ad duos rectos respectu alterius. Ergo uterque erit angulus rectus, & consequenter arcus AD perpendicularis basi BC . Quod erat reliquum.

Corollarium I.

265. **S**I ab angulo verticali A , intercepto ab æqualibus lateribus trianguli isoscelis ABC , demittatur arcus AD , in basim perpendicularis, hic dividet I. triangulum BAC in duo triangula perfectè æqualia; II. bifariam quoque secabit & angulum A , & basim BC .

Ratio est, quia istiusmodi arcus AD non differt ab arcu, qui a vertice A ductus, secaret basim bifariam; nam arcus, qui basim ita secaret, esset eidem basi perpendicularis.



Scho-

Scholion.

266. **I**N hoc Corollario supponitur, verticem A non esse polum basis BC; nam si polus esset, omnes arcus a puncto A in basim, essent eidem perpendiculares, perinde ac duo latera AB, AC.

Corollarium II.

267. **S**I arcus AD bifariam secet angulum A, bifariam quoque secabit triangulum isosceles BAC; & arcus AD erit basi perpendicularis.

Nam duo latera AB, AD, & angulus interceptus BAD in uno triangulo, æquantur duobus lateribus AC, AD, & angulo intercepto CAD in altero triangulo. Præterea, cum duo anguli deinceps positi ADB, ADC sint æquales, uterque erit rectus, & arcus AD basi perpendicularis.

Corollarium III.

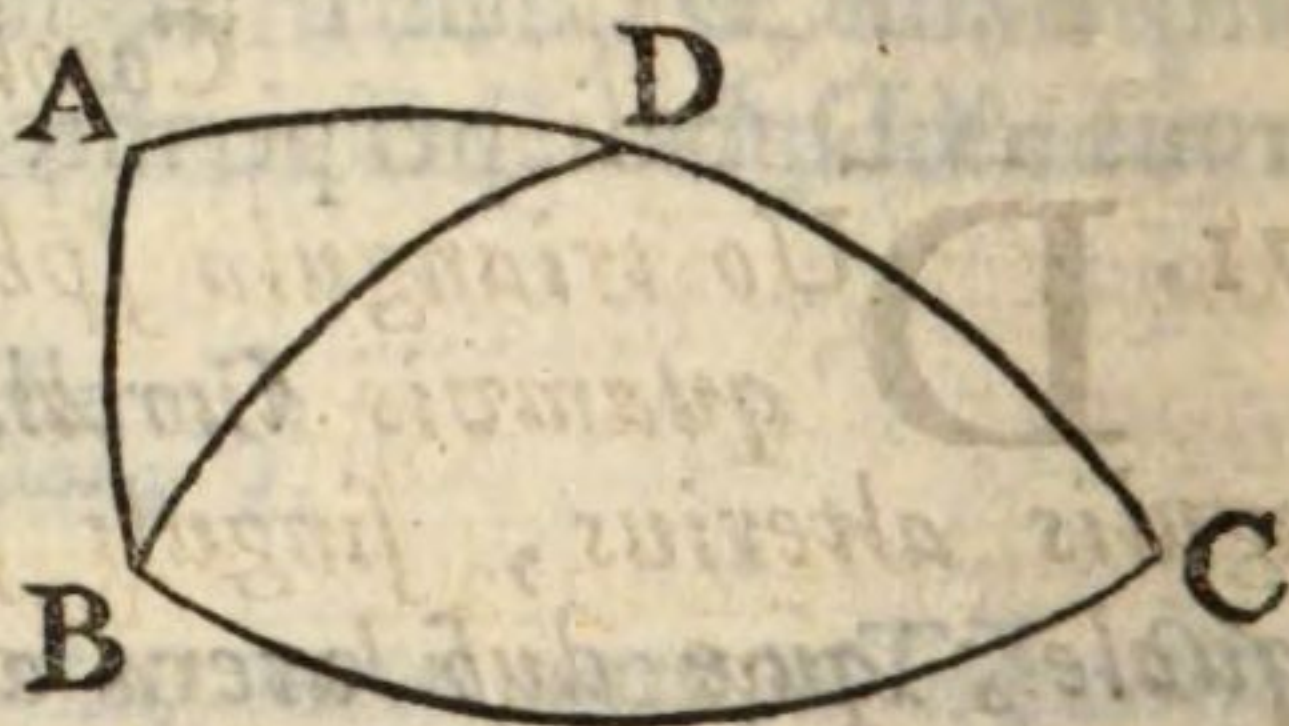
268. **I**Taque, si arcus ab angulo verticali ductus, & interceptus a lateribus æqualibus trianguli isoscelis, unam habeat ex his quatuor conditionibus, nimirum, I. bifariam dividat eundem angulum, II. vel basim, III. vel triangulum in duo perfectè æqualia triangula, IV. vel perpendiculariter basi occurrat, habebit quoque tres reliquas conditiones; dummodo data quarta conditione, supponatur, verticem A non esse polum basis, ut adnotavimus n. 266.

THEOREMA VII.

269. **O**mnis trianguli sphaerici BAC , major angulus B majori lateri AC subtenditur; & vicissim, majus latus majorem angulum subtendit.

Demonstratur I. pars. Ducatur arcus BD , qui angulum CBD æqualem efficiat angulo C . Duo latera BD , CD trianguli BDC erunt inter se æqualia; quippe quæ, per construct., æqualibus angulis subtenduntur (*n.* 262.). Jam verò in triangulo BAD duo latera AD & BD simul sumpta, majora sunt reliquo AB (*n.* 252.). Ergo pariter $AD + CD$, sive latus AC , majus est latere AB . Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Nimirum, si latus AC ponatur esse majus latere AB , Dico angulum B majorem fore angulo C . Nam I. si hi duo anguli essent æquales, latera AC , AB essent pariter æqualia (*n.* 262.), contra hypothesein. II. Nequit præterea angulus C esse major angulo B ; alioquin latus AB majus esset latere AC ; quod est pariter contra hypothesein. Ergo angulus B major est angulo C . Quod &c.



THEOREMA VIII.

270. **I**n omni triangulo sphaerico ABC , ut in Fig. sequenti, si summa duorum laterum $AB + BC$ sit æqualis, vel major, aut minor semicircumferentiâ circuli, angulus internus A , oppositus lateri BC , erit æqualis, vel major, aut minor angulo externo BCD , adjacente eidem lateri.

Demonstratur I. pars. Producantur arcus AB , AC , donec occurrant in D ; erunt arcus ABD , ACD singuli æquales semicircumferentiæ (*n.* 243.). Ergo, si
summa

summa arcuum $AB + BC$ æquatur semicircumferentiæ, similiter atque ABD , five $AB + BD$, habebitur $BC = BD$; quare in triangulo CBD , anguli C & D æqualibus lateribus BC , BD oppositi, erunt æquales. Atqui (*n.* 243.) angulus $A =$ angulo D ; Ergo angulus internus $A =$ angulo externo BCD . Quod &c.

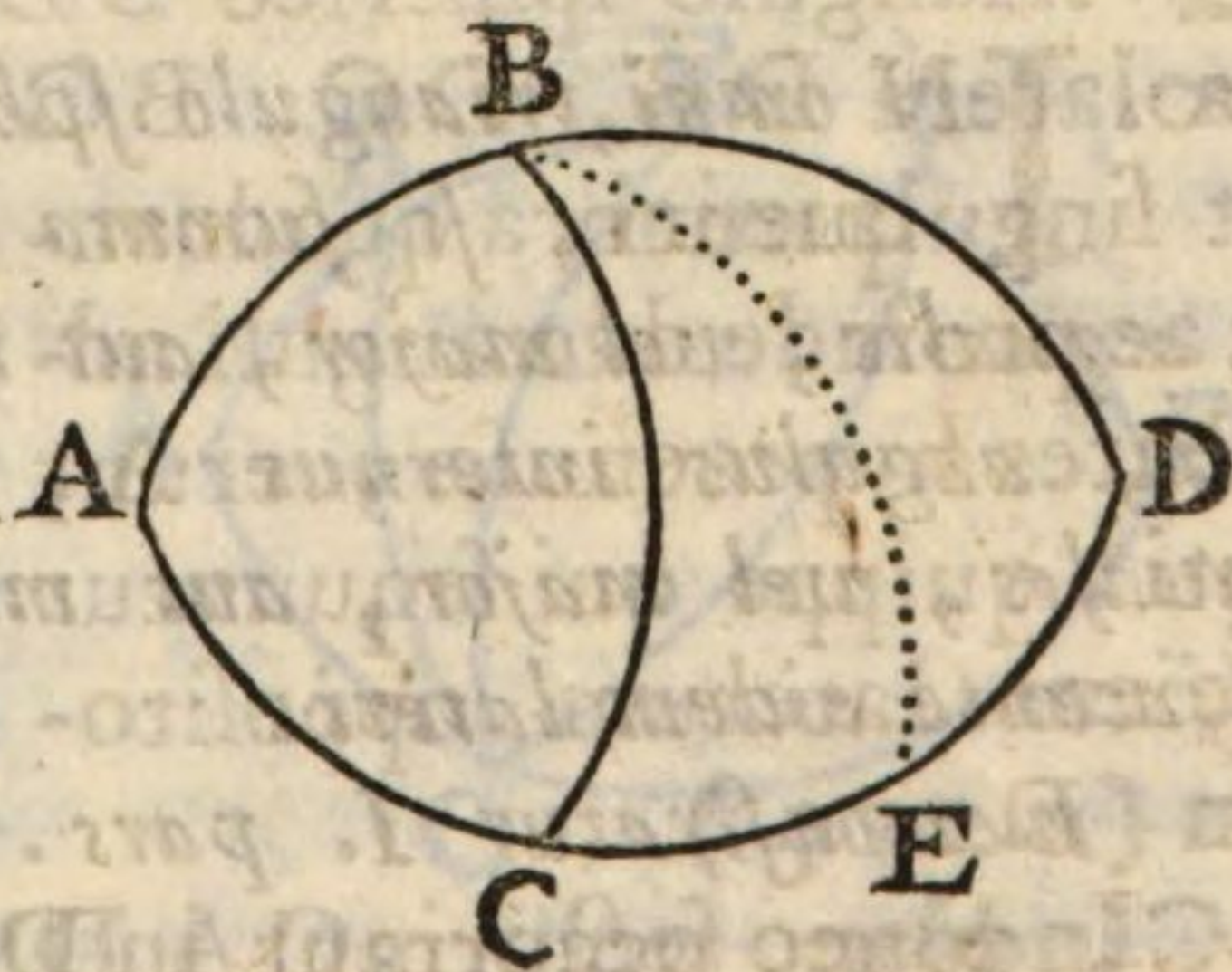
Demonstratur II. pars. Si $AB + BC$ excedit semicircumferentiam ABD , erit BC major arcu BD ; & consequenter in triangulo CBD , angulus D erit major angulo BCD . Atqui $A = D$; Ergo A erit quoque major angulo BCD . Quod &c.

Demonstratur III. pars. Si summa $AB + BC$ minor est semicircumferentiâ ABD , erit BC minor arcu BD ; & consequenter angulus D minor angulo BCD . Atqui $A = D$; Ergo A erit quoque minor angulo BCD . Quod erat reliquum.

Corollarium.

271. **D**uo triangula sphærica possunt esse inæqualia, quamvis duo anguli unius sint æquales duobus angulis alterius, singuli singulis, & latus unum uni æquale; quæ duo latera æqualibus angulis opponantur.

Esto triangulum ABC , in quo summa laterum $AB + BC$ sit æqualis semicircumferentiæ. Ducatur BE ; & comparentur inter se duo triangula ABE & CBE : angulus A primi æquatur angulo BCE secundi; angulus E utrique communis; quemadmodum commune quoque est latus BE , oppositum angulo A in primo, & angulo BCE in secundo triangulo. Constat itaque propositum.



Scholion.

Hoc Corollarium locum non habet in triangulis rectilineis.

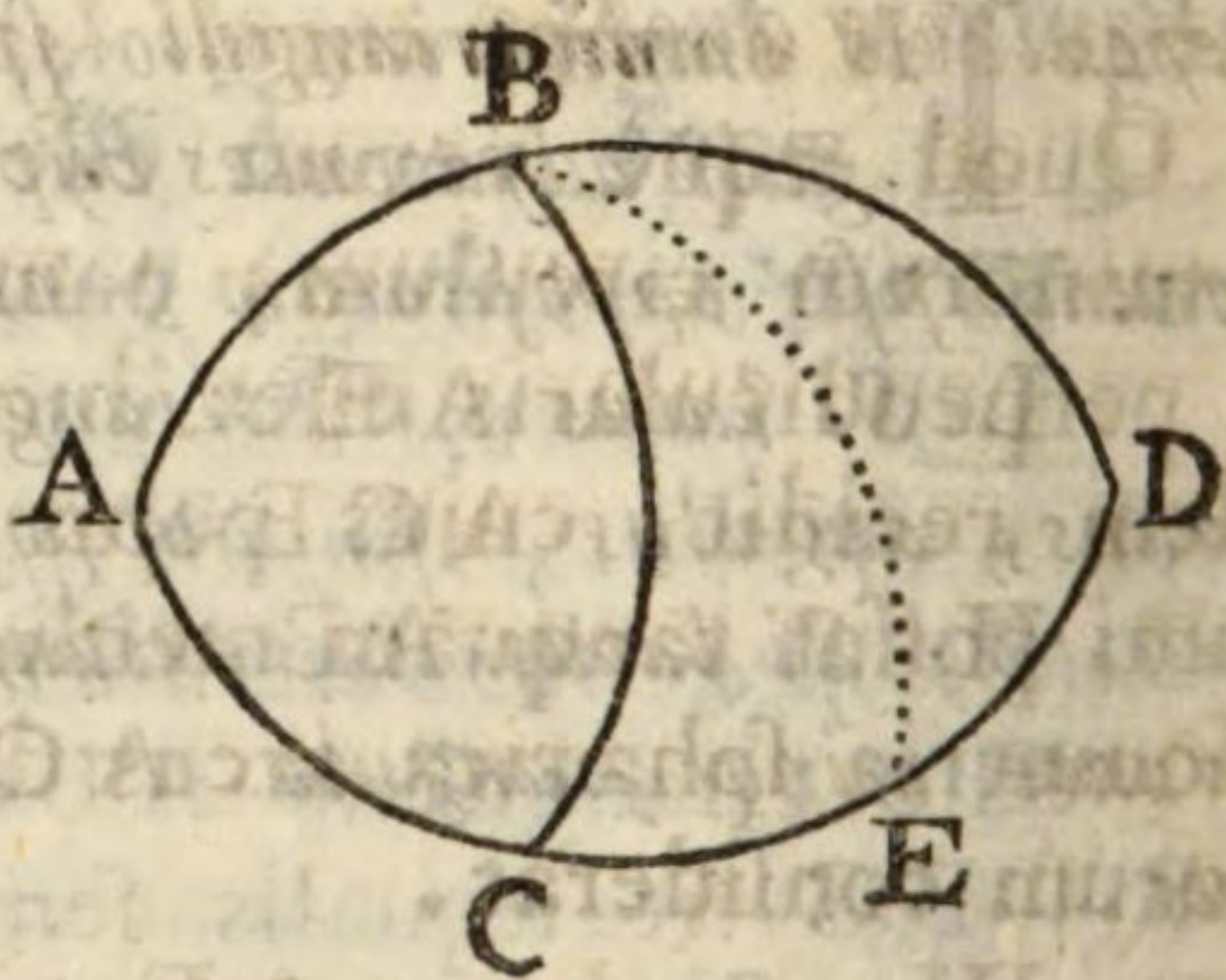
THEOREMA IX.

272. **I**n omni triangulo sphaerico ABC , si angulus internus A , oppositus lateri BC , sit æqualis, aut major, vel minor angulo externo BCD , adjacenti eidem lateri, erit summa laterum $AB + BC$ æqualis, aut major, vel minor semicircumferentiâ circuli.

Hæc Propositio est conversa præcedentis.

Demonstratur. Si angulus $A = BCD$, erit quoque $D = BCD$; ergo latera opposita hisce duobus angulis in triangulo BCD , nimirum, BC , BD , erunt æqualia. Atqui summa $AB + BD$ æquatur semicircumferentiâ; Ergo summa $AB + BC$ est pariter æqualis eidem semicircumferentiâ. Quod erat primum.

Duo reliqui casus eodem modo demonstrantur.



De Triangulis sphæricis rectangulis.

273. **D**iximus, triangulum sphæricum *rectangulum* illud esse, quod aliquem habuerit angulum rectum, nempe unum, vel etiam plures; & advertimus n. 260., hanc esse prærogativam trianguli sphærici, ut, si unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, alii duo possint esse tam recti, quàm obtusi; quod triangulis rectilineis minimè convenire constat. Superest igitur, ut agamus de triangulis, in quibus unus saltem angulus sit rectus, quæ dicuntur *rectangula*; & quamvis hypotenusa sit unum ex tribus lateribus, nihilo tamen minus *latera dumtaxat appellabimus duos arcus, qui angulum rectum comprehendunt*; nisi forte expresse fermo sit de tribus lateribus.

THEOREMA X.

274. **I**n omni triangulo sphærico *rectangulo* in A, anguli adjacentes hypotenusæ, sequuntur speciem laterum ipsis oppositorum; nimirum,

I. Si latus AE trianguli *rectanguli* EAC, sit quadrans, angulus ACE oppositus, erit rectus.

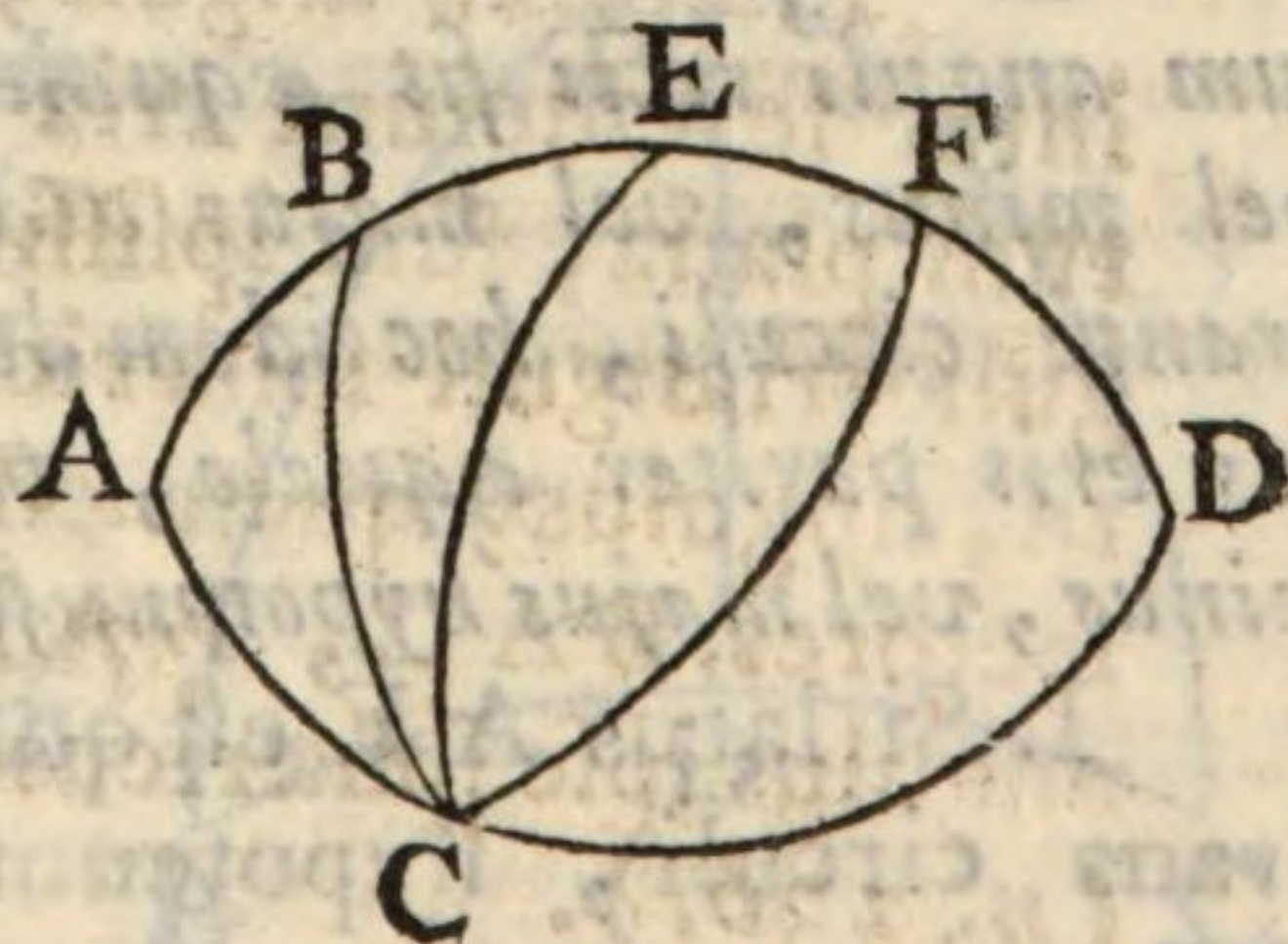
II. Si latus AB trianguli *rectanguli* BAC sit quadrante minor, angulus ACB eidem oppositus, erit acutus.

III. Si latus AF trianguli *rectanguli* FAC sit quadrante major, angulus ACF erit obtusus.

Et reciprocè &c.

Demonstratur I. pars.

Quoniam angulus A ponitur rectus, arcus AE perpendicularis est arcui AC; ergo, si per hyp. hujusmodi arcus AE est quadrans



circuli, punctum E erit polus alterius arcus AC (n. 233.); & consequenter CE transibit per hunc polum; ergo (n. 230.) arcus EC perpendicularis erit eidem arcui AC. Quare angulus ACE, oppositus lateri AE, erit rectus. Quod erat primum.

Demonstratur II. pars. Quia arcus BC cadit intra angulum rectum ACE, erit proinde angulus ACB pars anguli recti, & consequenter acutus. Quod erat secundum.

Demonstratur III. pars. Quia latus, five arcus CF cadit extra angulum rectum ACE, angulus ACF erit major recto. Quod erat tertium.

Et reciprocè, si angulus ACE sit rectus, latus oppositum AE est quadrans circuli. Nam, si latus idem esset majus, minusve quadrante, angulus ACE esset acutus, vel obtusus, uti antea demonstravimus.

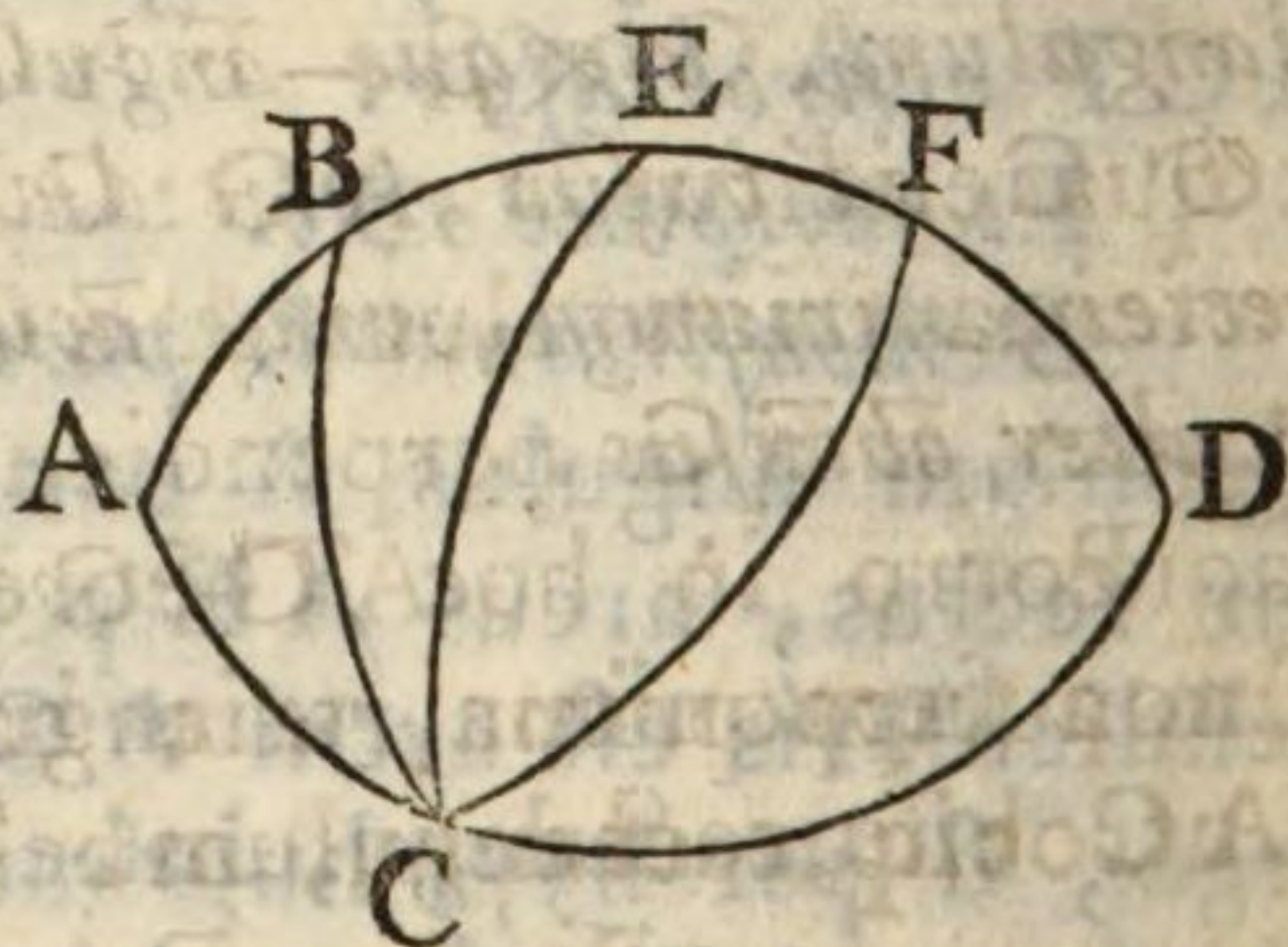
Similiter, si angulus ACB esset acutus, latus oppositum AB minus esset quadrante. Nam, si quadrans esset, aut major quadrante, angulus ACB esset rectus, vel obtusus.

Eodem discursu, si angulus ACF sit obtusus, latus oppositum AF quadrantem circuli excedet. Quæ quidem erant demonstranda.

Corollarium.

275. **I**N omni triangulo sphærico rectangulo, si alterutrum duorum laterum anguli recti sit æquale, vel minus, vel majus quadrante circuli, hoc idem latus erit pariter æquale, vel minus, vel majus hypotenuſa.

I. Si latus AE est quadrans circuli, hypotenuſa EC erit quoque quadrans



cir-

circuli. Cùm enim arcus $A E$ perpendicularis sit arcui $A C$, propter angulum rectum in A , ac præterea sit quadrans circuli, punctum E erit polus arcus $A C$ (*n.* 233.); & consequenter arcus $E C$, ab hoc polo ductus, erit grad. 90 (*n.* 232.).

II. Si latus $A B$ minus sit quadrante circuli, minus quoque erit hypotenusà $B C$. Nam in hoc casu, per præced., angulus oppositus $B C A$ erit acutus; aliunde angulus A est rectus per hyp.; Ergo latus $A B$, oppositum angulo acuto, minus est latere $B C$, quod angulo recto opponitur (*n.* 269.).

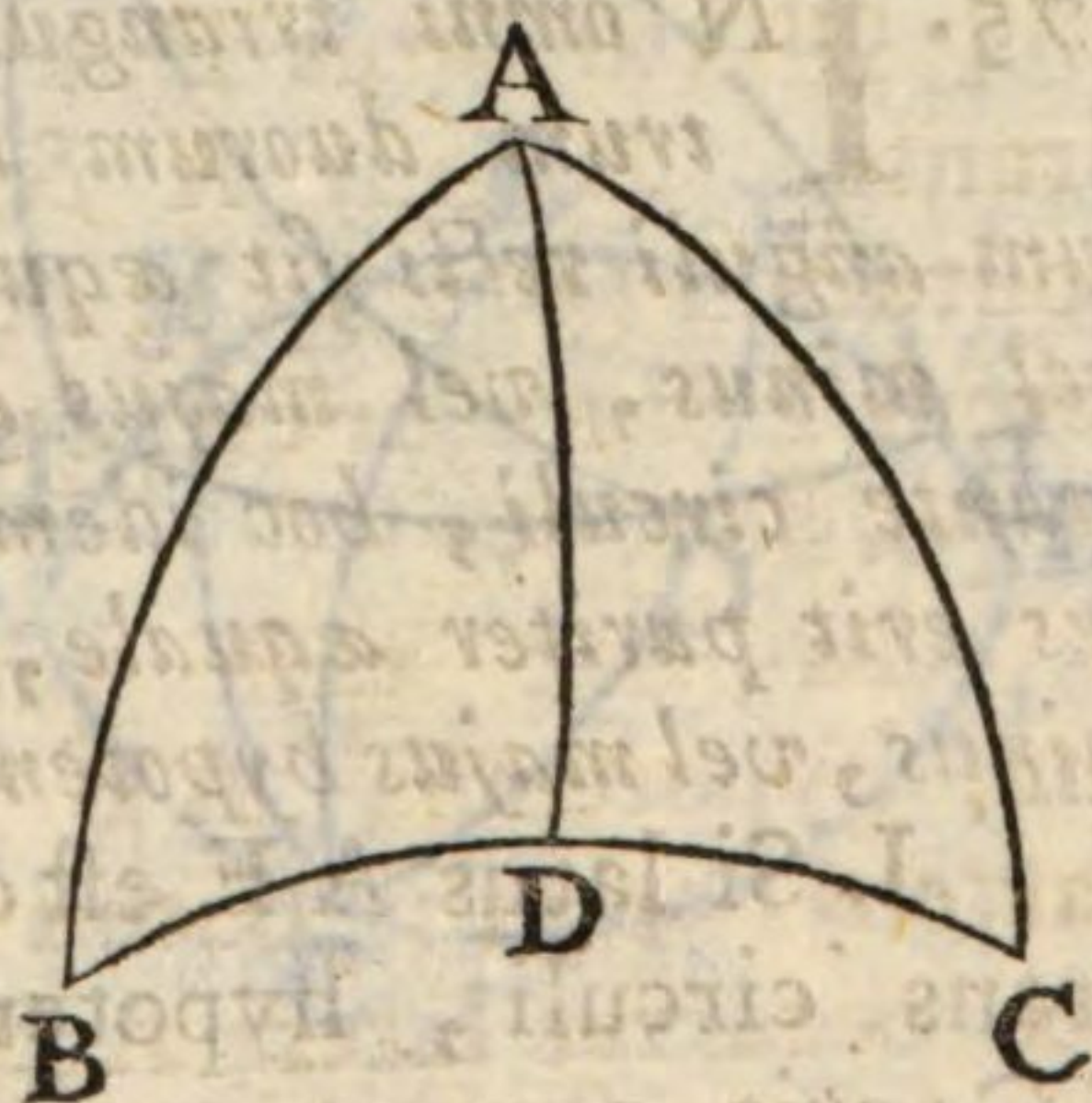
III. Si latus $A F$ excedat quadrantem circuli, majus erit, quàm hypotenusà $F C$. Nam in hoc casu angulus eidem oppositus $A C F$ est obtusus; aliunde, per hyp., angulus A est rectus; & consequenter latus $A F$, oppositum angulo obtuso, majus erit, quàm $F C$, oppositum angulo recto (*n.* 269.).

THEOREMA XI.

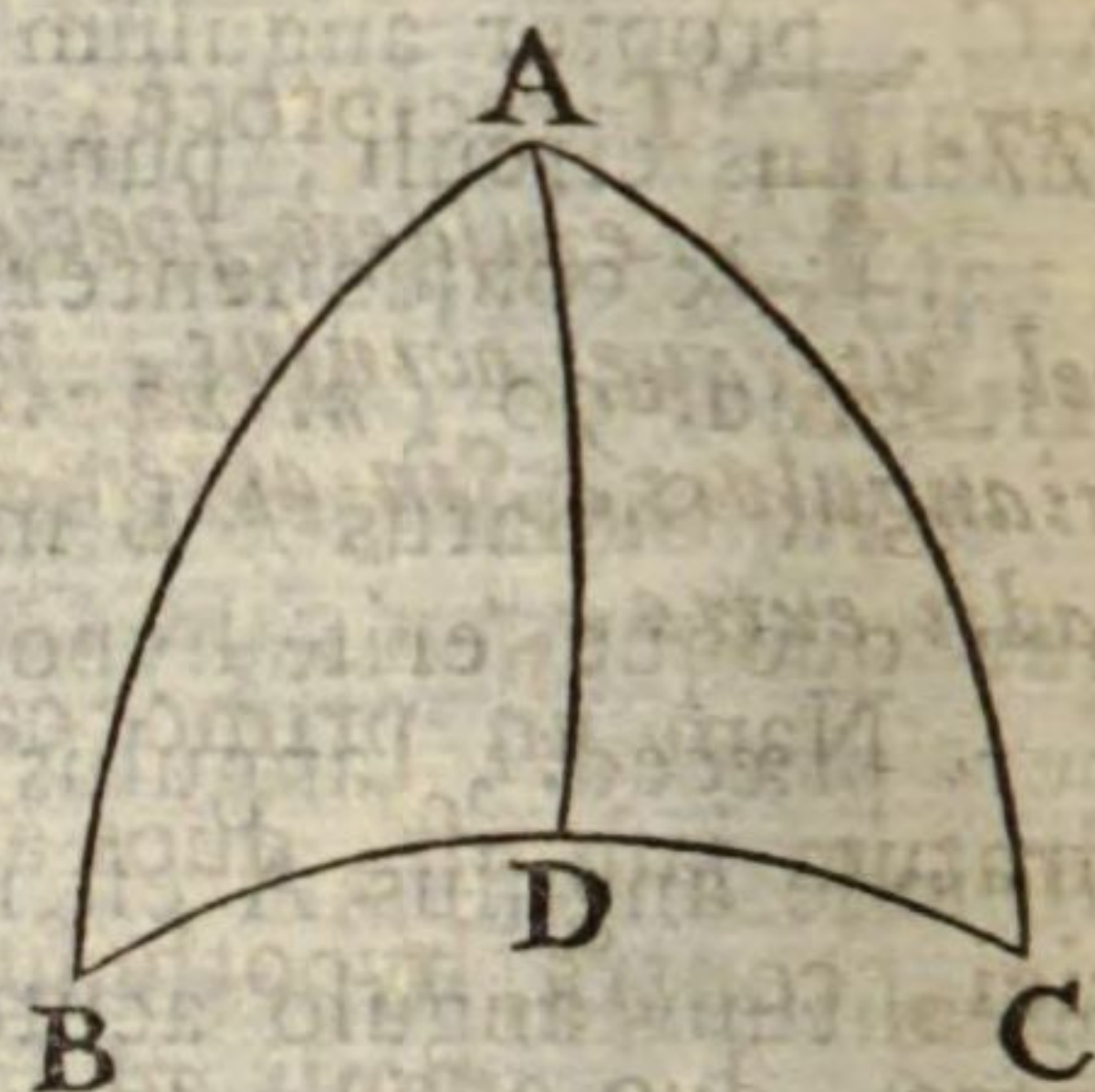
276. **I**N omni triangulo sphærico $B A C$, si ab angulo verticali A in basim $B C$ perpendicularis arcus demissus $A D$ cadat intra triangulum, uterque angulorum B & C ad basim, erit ejusdem speciei, nimirum, vel uterque acutus, vel uterque obtusus.

Sin autem arcus idem perpendicularis $A D$ cadat extra triangulum, uterque angulorum B & C ad basim, erit diversæ speciei, nimirum, unus acutus, & alter obtusus.

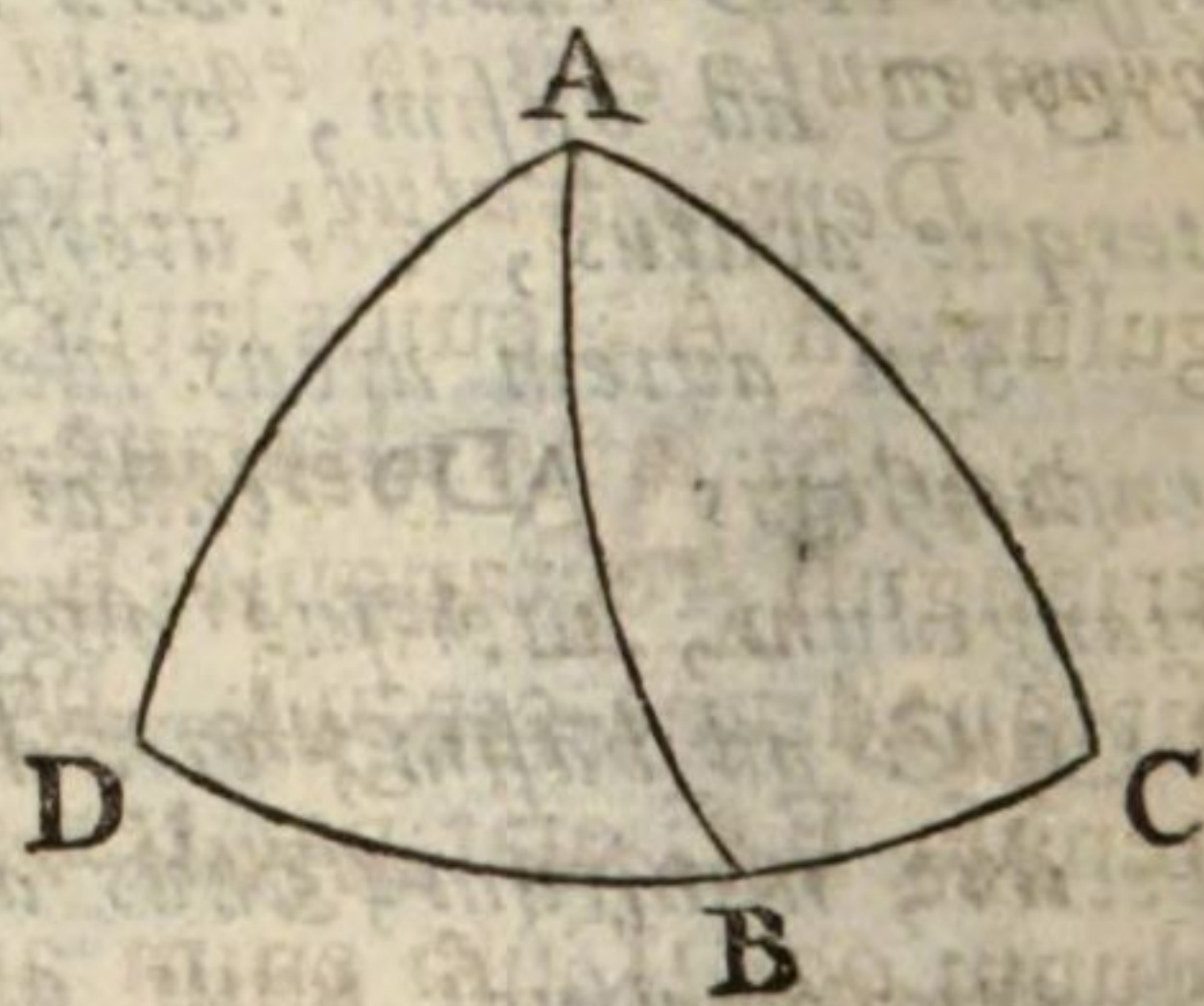
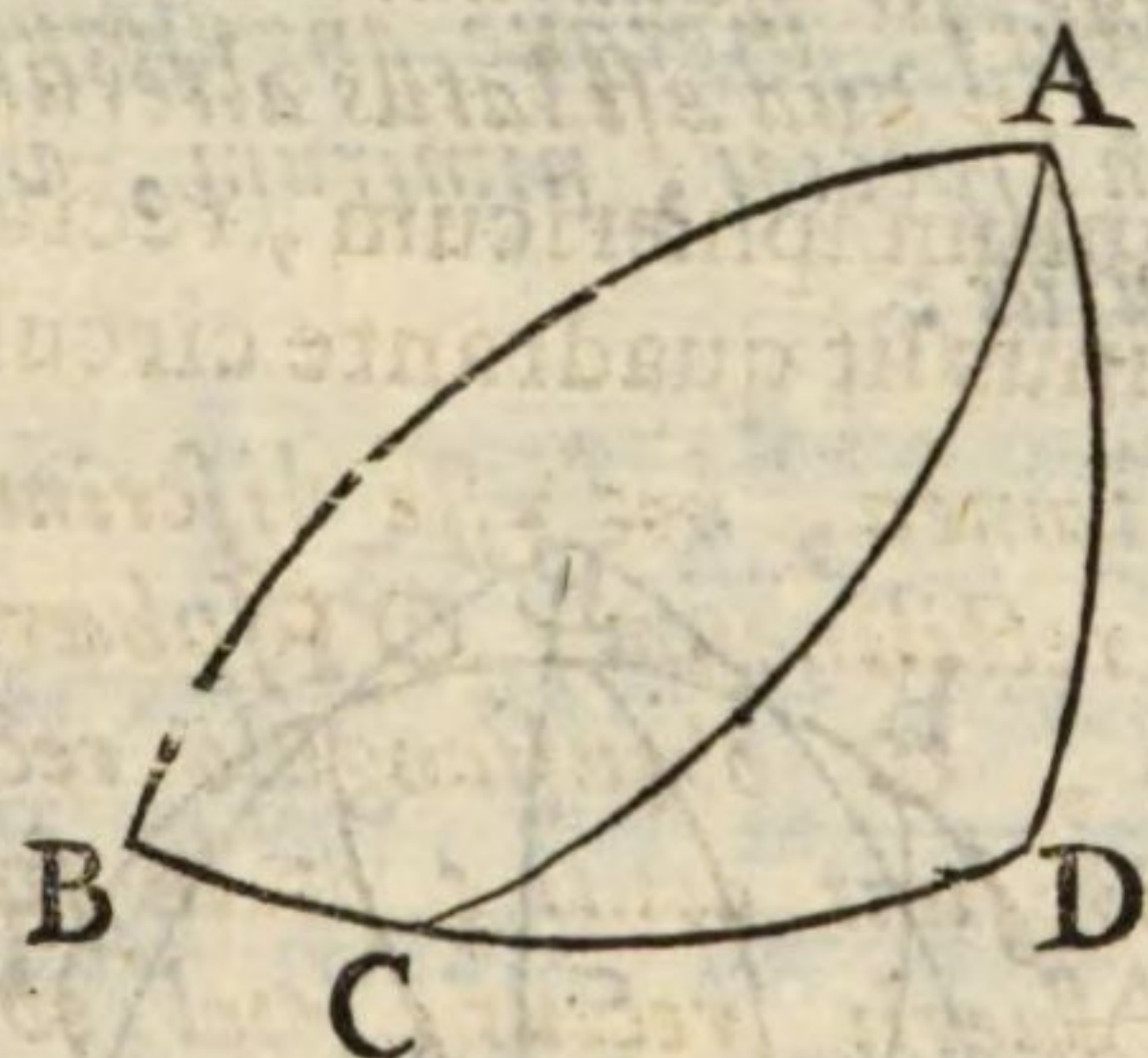
Porro in hoc Theoremate non supponitur, triangulum $B A C$ esse rectangulum.



Demonstratur I. pars. Arcus perpendicularis AD duo triangula efficit ADB , ADC , rectangula in D ; Ergo angulus B primi, & angulus C secundi, uterque sequitur speciem lateris oppositi AD (*n.* 274.); ac proinde duo anguli B & C sunt ejusdem speciei. Quod erat primum.



Demonstratur II. pars. Duo triangula ADB , ADC sunt rectangula in D ; quare angulus ABC , five ABD primi, & angulus ACD secundi, uterque sequitur speciem lateris oppositi AD ; Ergo duo anguli ABC , ACD sunt ejusdem speciei. Atqui angulus ACB non est ejusdem speciei respectu anguli ACD , quoniam unus est supplementum alterius; & consequenter anguli ABC , ACB non erunt ejusdem speciei. Itaque, quando arcus perpendicularis in basim demissus a vertice, cadit extra triangulum, anguli ad basim sunt diversæ speciei. Quod erat alterum.



Corollarium.

277. **E**T reciprocè, si uterque angulorum ad basim sit ejusdem speciei, hoc est, vel uterque acutus, vel uterque obtusus, perpendicularis arcus cadet intra triangulum. Sin autem unus sit acutus, & alter obtusus, cadit extra.

Nam in primo casu, si caderet extra, demonstratum jam est, duos angulos ad basim fore diversæ speciei, contra hypothèsim. In secundo casu, si caderet intra, duo anguli ad basim forent ejusdem speciei, pariter contra hypothèsim.

Scholion.

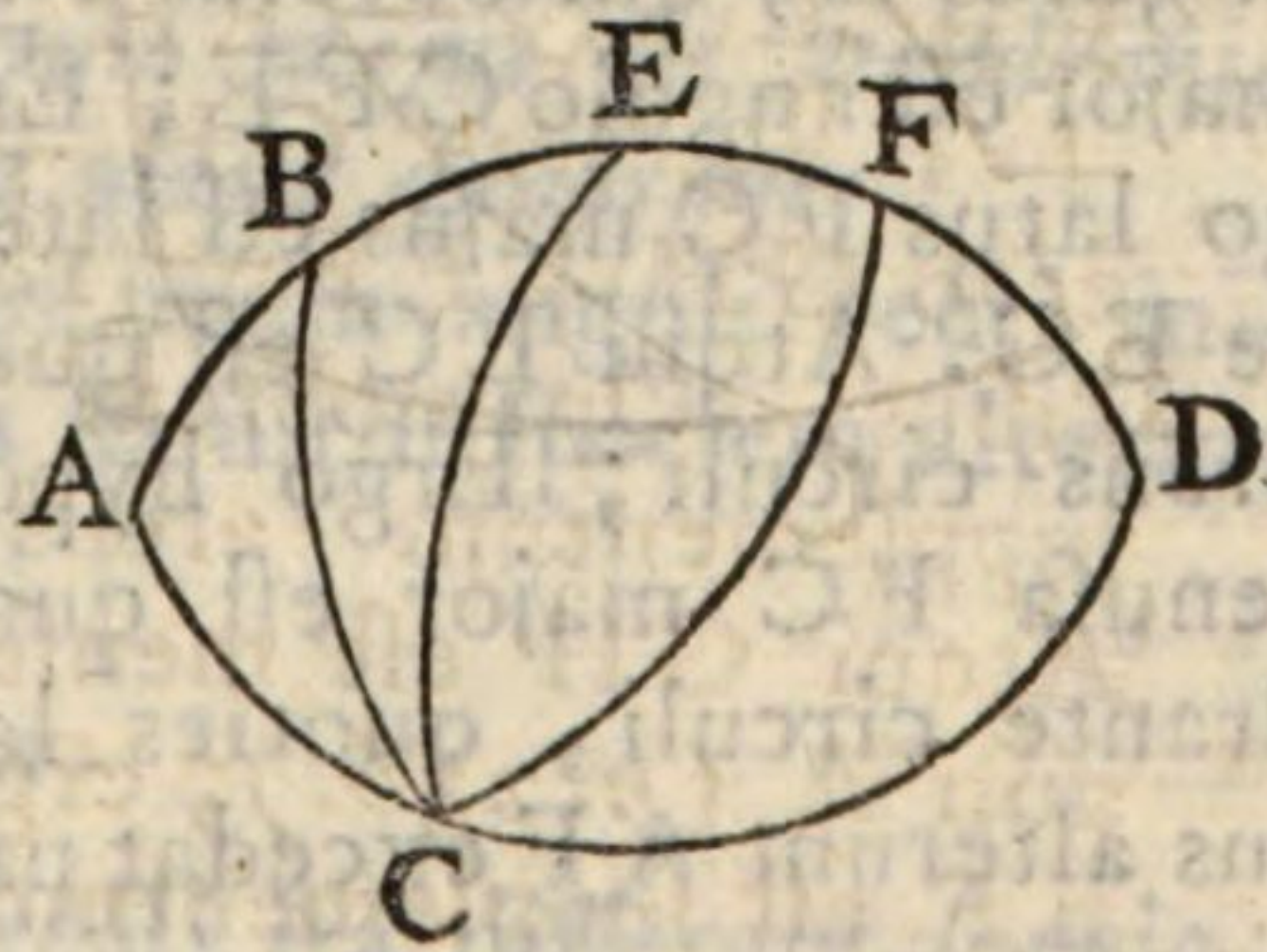
IN hoc Theoremate, ejusque Corollario supponitur, punctum A non esse polum arcus BC. Nam, si polus esset, duo arcus AB, AC, atque omnes reliqui arcus à puncto A demissi in basim BC, essent perpendiculares eidem arcui (n. 232.).

THEOREMA XII.

278. **I**N omni triangulo sphærico rectangulo, si latus unum anguli recti minus sit quadrante circuli, hypotenusa erit in eadem specie, in qua est latus alterum.

Demonstratur. Estò triangulum sphæricum, rectangulum in A, cujus latus AC minus sit quadrante circuli.

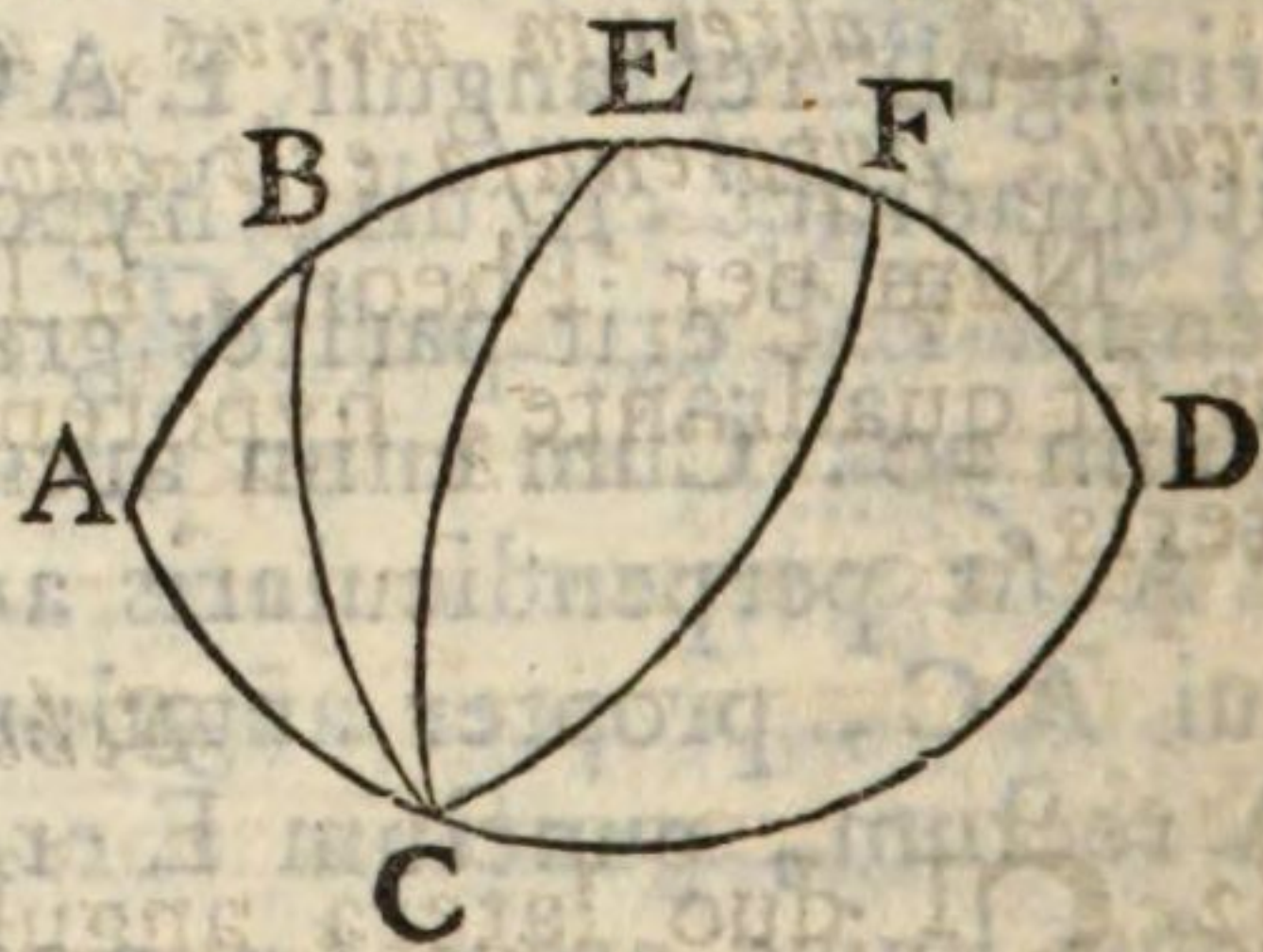
I. Si latus alterum AE trianguli rectanguli EAC fit quadrans circuli, hypotenusa EC erit pariter graduum 90. Cùm enim arcus EA sit perpendicularis arcui AC, propter angulum A rectum, punctum E erit polus hujus arcus (n. 231.



233.); & consequenter arcus EC ab hoc polo demissus, erit graduum 90.

II. Si latus alterum AB trianguli rectanguli BAC minus sit quadrante circuli, etiam hypotenusa BC minor erit quadrante. Ut autem planior via demonstrationi aperiatur, accipiatur arcus AE æqualis quadranti circuli; ducaturque arcus CE . Punctum E erit polus arcus AC ; & arcus EC erit quadrans circuli; uti jam ostensum est; quare angulus AEC erit acutus; quippe quem metitur arcus AC , minor quadrante per hyp. (*n.* 236.). Atqui angulus ABC est pariter acutus; nam latus oppositum AC supponitur esse minus gradibus 90 (*n.* 275.). Ergo ipsius supplementum CBE est angulus obtusus; & consequenter in triangulo BEC , angulus CBE major erit angulo AEC . Ergo latus EC oppositum primo, majus est latere BC , quod opponitur secundo angulo (*n.* 269.). Jam verò EC est quadrans circuli, perinde ac latus AE ; Ergo latus BC minus est quadrante circuli.

III. Si latus AF trianguli FAC excedat gradus 90, hypotenusa FC pariter excedet quadrantem circuli. Nam ex dictis jam constat, arcum EC esse quadrantem circuli, & angulum AEC esse acutum, cujus supplementum erit angulus obtusus. Aliunde angulus AFC est acutus; latus enim oppositum AC minus est quadrante (*n.* 269.); ac proinde in triangulo ECF , angulus E , qui obtusus est, major est angulo CFE ; Ergo latus FC majus est latere EC . Atqui EC est quadrans circuli; Ergo hypotenusa FC major est quadrante circuli, quoties latus alterum AF excedat pariter quadrantem circuli.



Corollarium I.

279. **S**I duo latera trianguli rectanguli sint ejusdem speciei, hoc est, si utrumque vel deficiat a quadrante, vel eundem excedat, hypotenusa minor erit quadrante circuli.

Nam I. si utrumque a quadrante deficiat, ut in triangulo BAC , rectangulo in A , hypotenusa per hoc Theorema, erit ejusdem speciei, in qua est alterutrum latus; & consequenter minor erit quadrante circuli.

II. Si duorum laterum utrumque excedat quadrantem circuli, quemadmodum in triangulo BDC , rectangulo in D , hypotenusa erit adhuc minor quadrante circuli. Nam hoc triangulum eandem habet hypotenusam, quam habet triangulum BAC , cujus latera sunt supplementa laterum trianguli BDC ; constat autem hypotenusam trianguli BAC minorem esse quadrante circuli, ut jam ostensum est.

Scholion.

280. **S**I duo latera anguli recti sint quadrantes circuli, hypotenusa erit pariter quadrans circuli. Nam hæc basis erit mensura anguli recti (n. 236.).

Corollarium II.

281. **S**I duo latera anguli recti differant specie, hoc est, alterum minus, alterum majus sit quadrante circuli, hypotenusa erit quoque major quadrante.

Nam per Theor., si latus unum anguli recti minus sit quadrante, hypotenusa sequitur speciem alterius lateris.

Scholion.

282. **S**I duo latera anguli recti ita differant specie, ut alterum sit quadranti æquale, & alterum qua-

quadrante majus, vel minus, hypotenusa erit pariter quadrans; uti demonstratum est in prima parte Theorematis. Itaque in quovis triangulo sphaerico rectangulo, ut decernatur, utrum hypotenusa sit quadrans circuli, satis erit, si alterutrum duorum laterum sit quadrans, quin ulla habeatur ratio alterius lateris.

Corollarium III.

283. **S**I hypotenusa sit quadrante minor, duo latera erunt ejusdem speciei; si quadrante major, duo latera specie different.

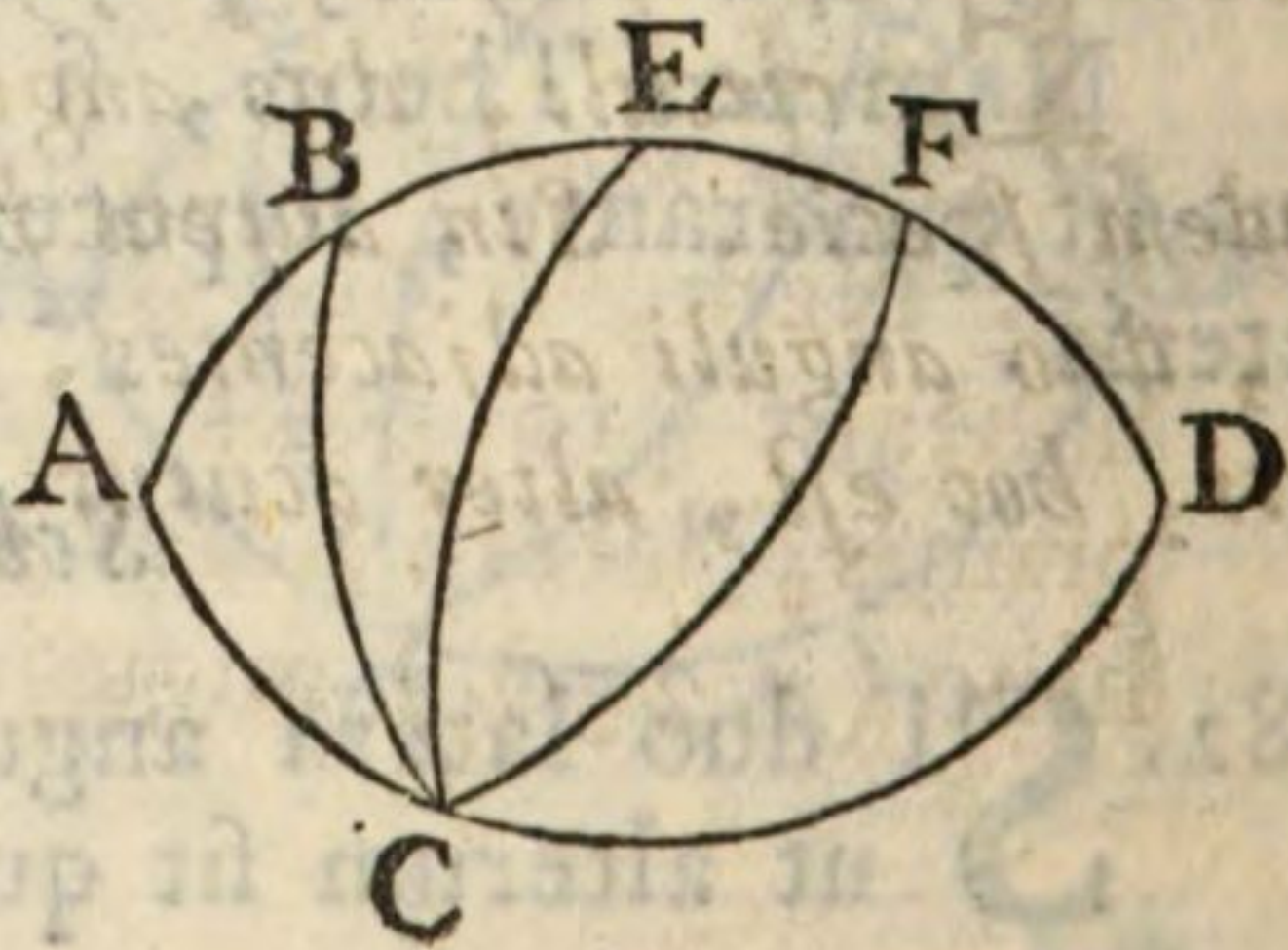
Hæc duo Corollaria sunt Propositiones conversæ præcedentium. Nam in primo casu, si duo latera different specie, hypotenusa esset vel major, vel æqualis quadranti circuli (n. 281. 282.). In secundo casu, si duo latera essent ejusdem speciei, hypotenusa esset vel minor, vel præcisè æqualis quadranti (n. 279. 282.).

Scholion I.

284. **S**I hypotenusa sit quadrans circuli, necesse est, saltem alterutrum duorum laterum esse quadrantem circuli.

Nam, si duo latera essent vel ambo minora, vel utraque majora, vel alterum minus, & alterum majus quadrante circuli, hypotenusa quoque esset vel minor, vel major quadrante circuli (n. 279. 281.).

Itaque in eo casu, in quo hypotenusa æquat arcum 90 graduum, contingere potest, quòd vel duo latera æquent interdum singula quadrantem circuli, vel alterum horum sit quadranti æquale, & alterum majus, minusve. Nam latus, puta, A E, cùm sit quadrans circuli, ipsius extremitas E, opposita angu-



lo recto, est polus alterius lateris (n. 233.); itaque arcus quivis a puncto E ductus in aliud latus, productum, si opus sit, erit quadrans circuli (n. 233.).

Quare ex hoc Scholio, & ex n. 282. constat, ex tribus lateribus trianguli sphærici rectanguli fieri non posse, ut latus unicum sit quadrans circuli; ac necesse esse, ut vel duo saltem sint singula quadranti æqualia, vel eorum nullum.

Scholion II.

285. **T**Ria hæc, quæ sequuntur Corollaria, respondent tribus primis n. 279. 281. 283. Horum demonstratio statim tibi occurret, si modò memineris, angulum quemvis adjacentem hypotenusæ, esse in eadem specie, in qua est latus oppositum.

Corollarium IV.

286. **S**I anguli adjacentes hypotenusæ, sint in eadem specie, hoc est, uterque vel acutus, vel obtusus, hypotenusa minor erit quadrante circuli.

Corollarium V.

287. **S**I anguli adjacentes hypotenusæ, sint in diversa specie, hoc est, alter acutus, & alter obtusus, hypotenusa major erit quadrante circuli.

Corollarium VI.

288. **E**T vicissim, si hypotenusa sit minor quadrante circuli, duo anguli adjacentes, sunt ambo in eadem specie. Sin autem hypotenusa major sit quadrante, duo anguli adjacentes, erunt in diversa specie constituti, hoc est, alter acutus, & alter obtusus.

Scholion.

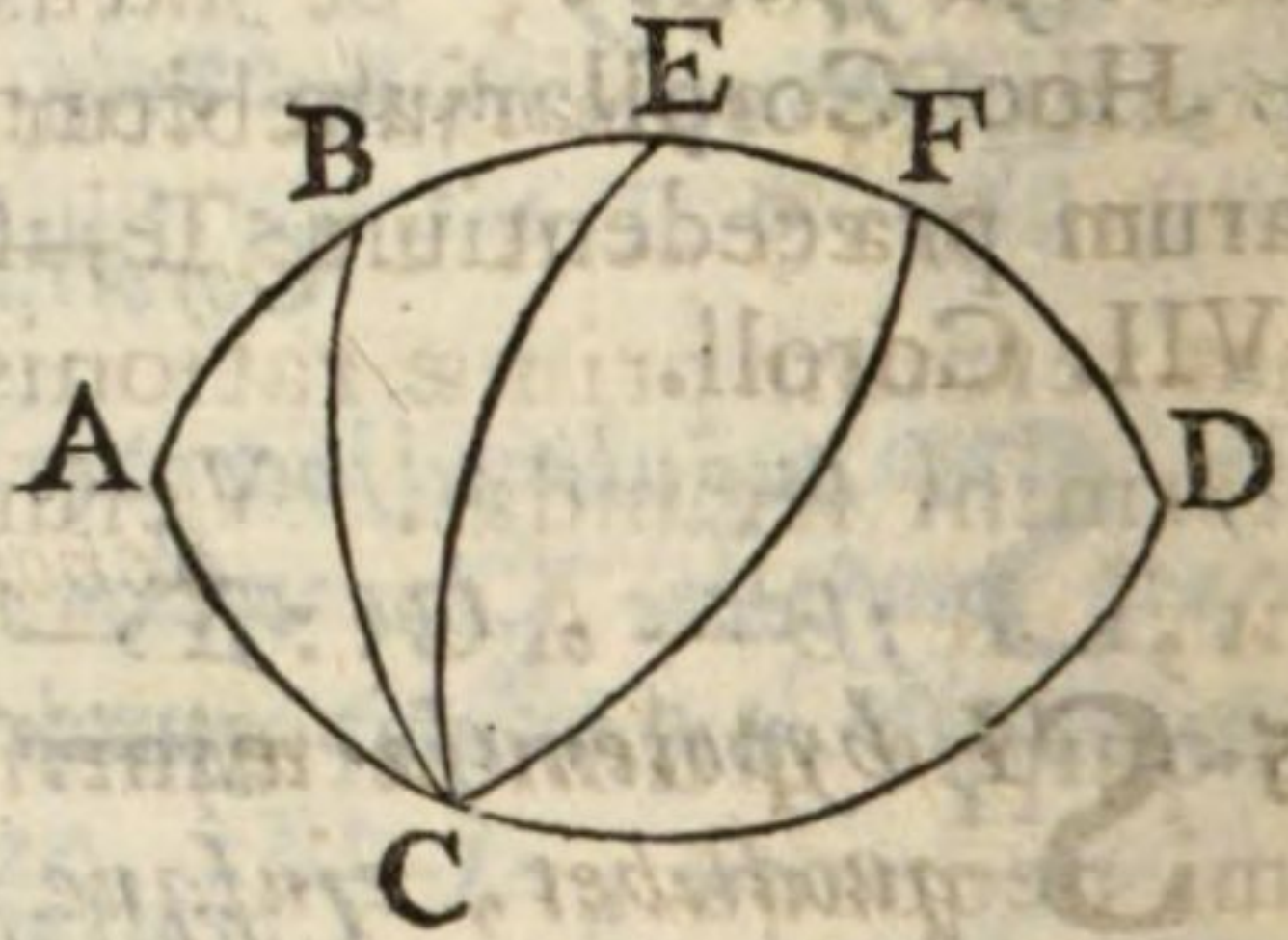
289. **S**I duo anguli adjacentes hypotenusæ, sint ambo recti, vel rectus alter, & alter obliquus, hypotenusa erit quadrans circuli. Nam in primo casu latus utrumque erit quadrans circuli; & in secundo, latus angulo recto oppositum, pariter erit quadrans circuli (n. 274.).

Et reciprocè, si hypotenusa sit quadrans circuli, duo anguli adjacentes hypotenusæ, aut saltem alteruter rectus erit. Nam duo latera, aut saltem alterutrum erit quadrans circuli (n. 284.).

Corollarium VII.

290. **I**N triangulo rectangulo BAC, si latus AC, & angulus C, adjacens eidem lateri, & hypotenusæ, sint in eadem specie, hoc est, vel utrumque majus, vel utrumque minus quadrante circuli, hypotenusa minor erit quadrante.

Nam latus AB, oppositum angulo C, est in eadem specie, in qua est idem angulus (n. 274.); & consequenter erit pariter in eadem specie lateris AC; quamobrem hypotenusa minor erit quadrante circuli.

*Scholion.*

291. **I**N triangulo rectangulo, si latus, & angulus eidem adjacens, sint ambo graduum 90, hypotenusa erit pariter graduum 90. Nam in hoc casu latus alterum trianguli erit pariter quadrans circuli; & consequenter, cum duo latera anguli recti sint singula 90 graduum, hypotenusa erit mensura anguli recti (n. 236. 240.); ac proinde erit quadrans circuli.

Corollarium VIII.

292. **S**I latus, & angulus adjacens sint in diversa specie, hoc est, alterum minus, & alterum majus gradibus 90, hypotenusa major erit quadrante circuli. Quod constat eadem demonstratione Coroll. VII.

Scholion.

293. **S**I latus esset quadrans circuli, & angulus adjacens obliquus foret, hypotenusa esset quadrans circuli. Quod constat eadem demonstratione primæ partis hujus Theorematis.

Corollarium IX.

294. **S**I hypotenusa sit minor quadrante circuli, latus quodlibet, ejusque angulus adjacens sunt in eadem specie. Et rursus, si hypotenusa sit major quadrante circuli, latus quodlibet, ejusque angulus adjacens sunt in diversa specie.

Hoc Corollarium continet Propositiones inversas duarum præcedentium; ejusque veritas constat ex III. & VII. Coroll.

Scholion.

295. **S**I hypotenusa æquet quadrantem circuli, latus quodlibet, ejusque angulus adjacens, esse possunt singula 90 graduum. Fieri etiam potest, ut latus quodlibet, ejusque angulus adjacens sint in diversa specie (n. 284.).

Corollarium X.

296. **S**I angulus adjacens lateri, minor sit gradibus 90, erit hoc latus ejusdem speciei, in qua est hypotenusa.

Nam I. Si hypotenusa sit minor quadrante circuli, latus erit quoque minus; necesse est enim in hoc casu,

casu, quòd latus, & angulus adjacens sint ejusdem speciei (n. 294.).

II. Si hypotenusa sit major quadrante circuli, latus erit quoque majus; nam in hoc casu oportet, ut latus, & angulus adjacens sint in diversa specie.

III. Denique, si hypotenusa sit quadrans circuli, latus erit quoque quadrans circuli; uti constabit ex sequenti Scholio.

Propter eandem rationem, si latus sit minus quadrante circuli, angulus adjacens erit in eadem specie, in qua est hypotenusa (n. 294.).

Scholion.

297. **Q**Uando angulus adjacens lateri, excedit 90 gradus, vel ab iisdem deficit, si hypotenusa sit quadrans circuli, latus erit quoque quadrans circuli (n. 284.).

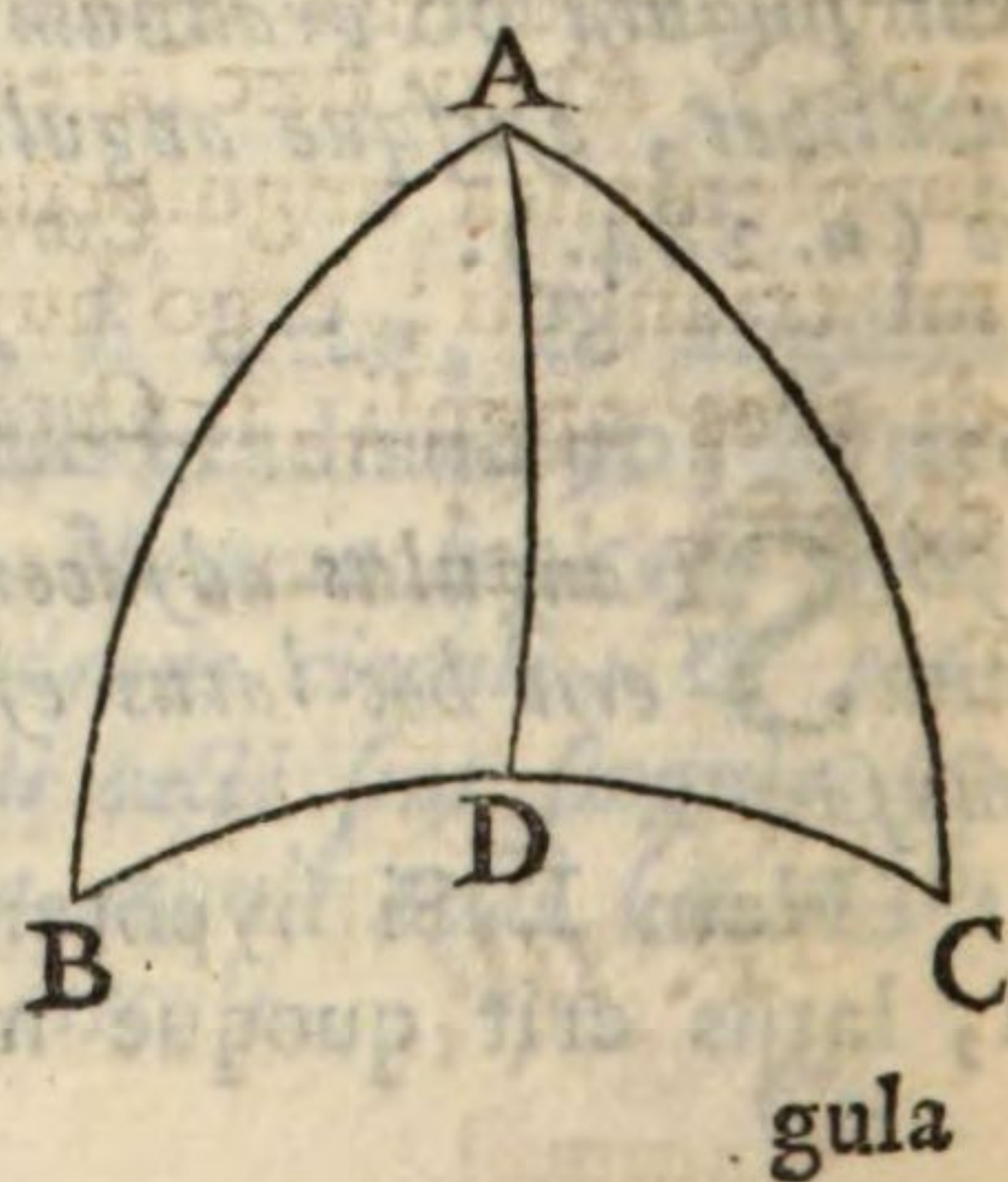
Nam latus alterum eidem angulo oppositum, est in eadem specie, in qua est hujusmodi angulus (n. 274.).

Similiter, quando latus majus est, vel minus gradibus 90, si hypotenusa sit quadrans circuli, angulus adjacens huic lateri, erit rectus; quippe qui est in eadem specie lateris oppositi; quod pariter quadrans circuli est (n. 274.).

Corollarium XI.

298. **S**I tres anguli trianguli BAC sint acuti, tria latera erunt singula minora quadrante circuli.

Ducatur a vertice anguli A arcus perpendicularis AD , qui cadit intra triangulum (n. 277.); nam duo anguli ad basim sunt in eadem specie. Habebimus ergo trian-



gula rectangula ADB , ADC , quorum hypotenusæ AB , AC erunt minores singulæ quadrante circuli (n. 286.); nam anguli adjacentes cuilibet earum, sunt in eadem specie, idest, ambo acuti. Si a vertice B demittatur perpendicularis in AC , eodem modo demonstrabitur, latus BC minus esse quadrante circuli.

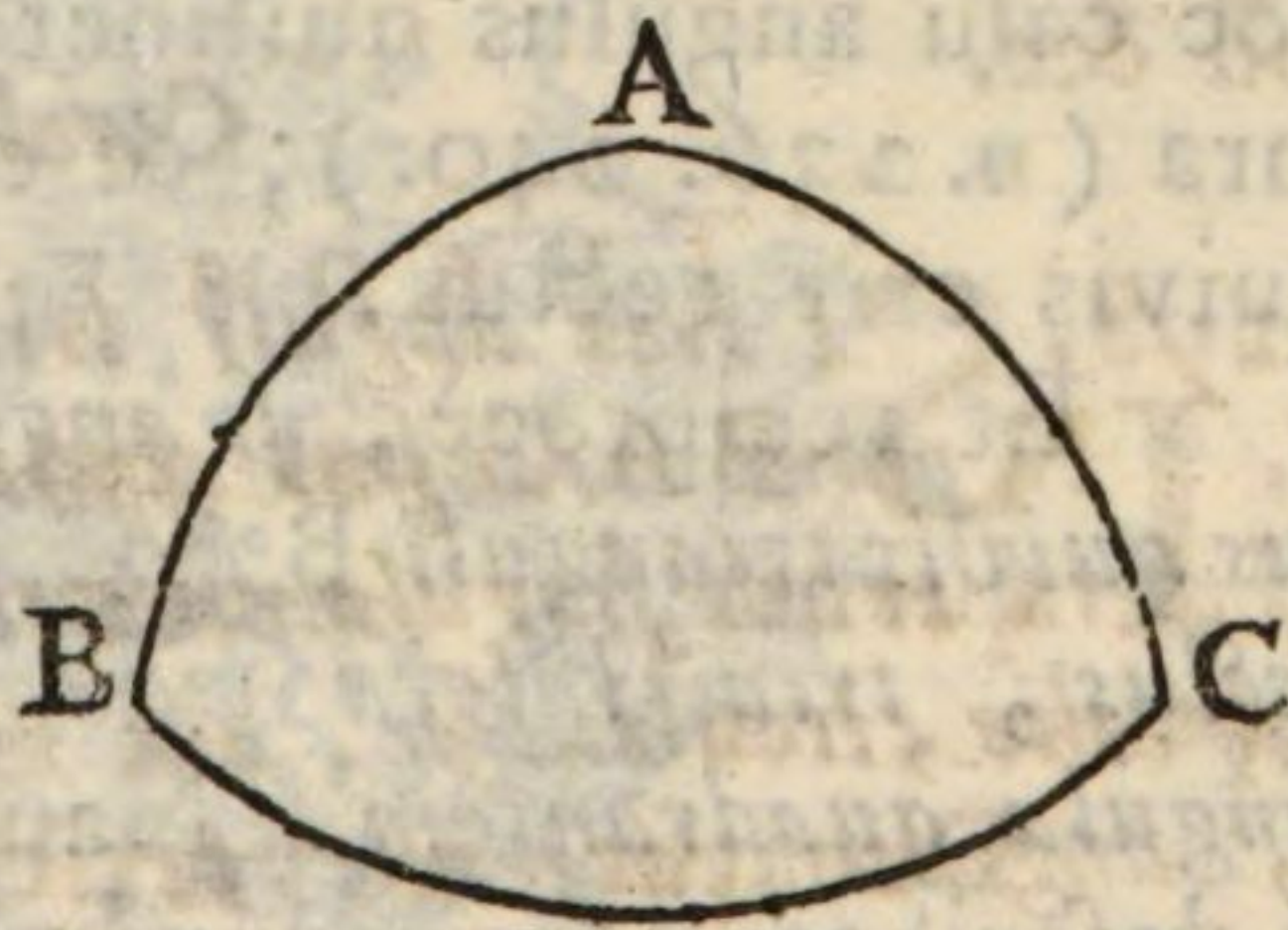
Scholion.

299. **P**ropositio conversa hujus Corollarii non est in omni casu vera. Nam, quamvis tria latera trianguli sint singula minora quadrante circuli, non hinc sequitur, tres angulos fore acutos; fieri enim potest, quod in triangulo rectangulo latera singula sint minora quadrante circuli; & in hoc casu hypotenusa minor quoque erit gradibus 90 (n. 279.).

Corollarium XII.

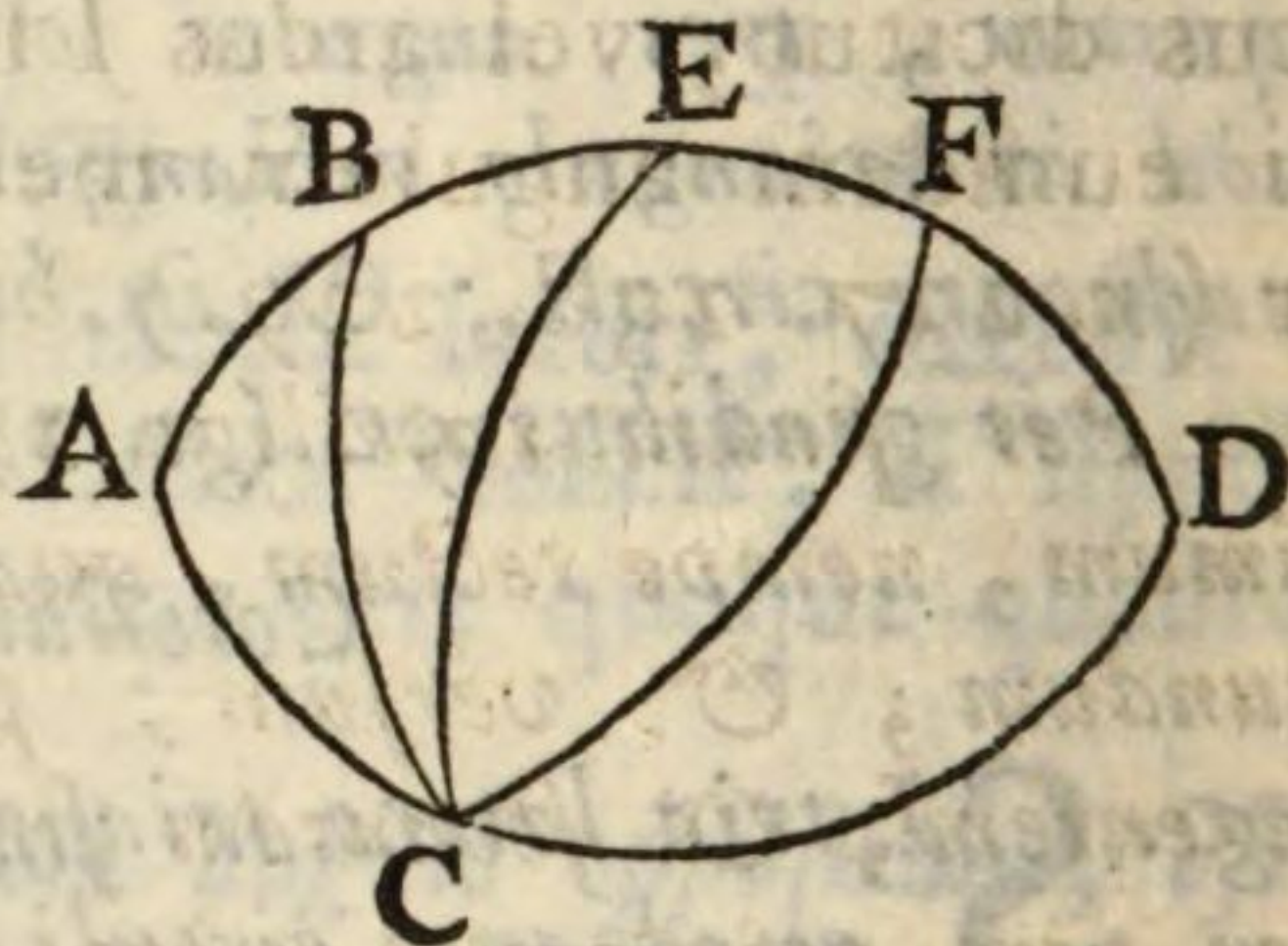
300. **S**i tria latera trianguli BAC sint singula majora quadrante circuli, tres anguli erunt obtusi.

Supponatur describi triangulum alterum, cujus latus quodlibet habeat pro polo aliquem verticem dati trianguli. Hoc posito, tres anguli secundi trianguli sunt supplementa laterum primi (n. 255.); & consequenter horum angulorum singuli erunt acuti; ergo latera singula hujus secundi trianguli erunt pariter minora quadrante circuli (n. 298.). Atqui hæc latera sunt supplementa angulorum primi trianguli; ergo hujusmodi tres anguli sunt omnes obtusi.



Scholion.

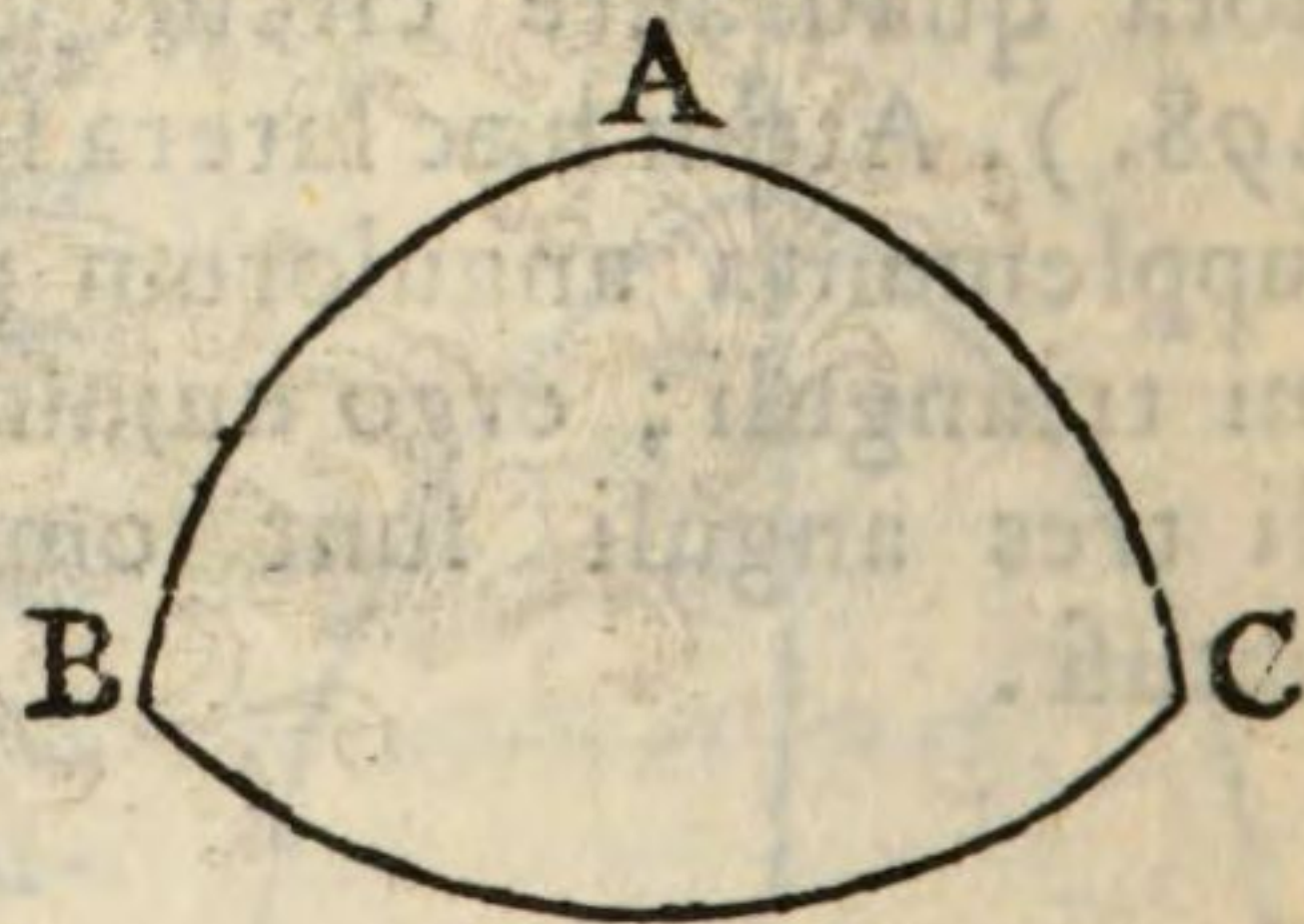
301. **P**ropositio conversa hujus Corollarii non est vera in omni casu; nimirum, quamvis tres anguli trianguli sint obtusi, non inde sequitur, tria latera fore singula majora arcu graduum 90. Nam, si imaginemur triangulum isosceles, aut saltem proximè, quale est BDC , rectangulum in D , cujus hypotenusæ sit valde proxima puncto A , & consequenter multò minor quadrante circuli; ac præterea concipiamus, angulum D paulo magis aperiri, ut evadat obtusus; in hoc casu, cum aliunde anguli B & C , adjacentes hypotenusæ, sint obtusi, quippe qui sunt in eadem specie laterum oppositorum; hinc inferri poterit, tres angulos hujus trianguli fore obtusos, quamvis latus BC minus sit quadrante circuli.



Corollarium XIII.

302. **S**i tria latera trianguli singula æquent quadrantem circuli, tres anguli erunt recti. Nam in hoc casu angulus quilibet habebit basim suam pro mensura (n. 236. 240.); & consequenter trium angulorum quivis erit rectus.

Et reciprocè, si angulus quivis trianguli BAC sit rectus, tria latera æquant singula quadrantem. Nam, si describatur secundum triangulum, cujus latera singula habeant pro polo aliquem verticem trianguli BAC , hæc latera secundi



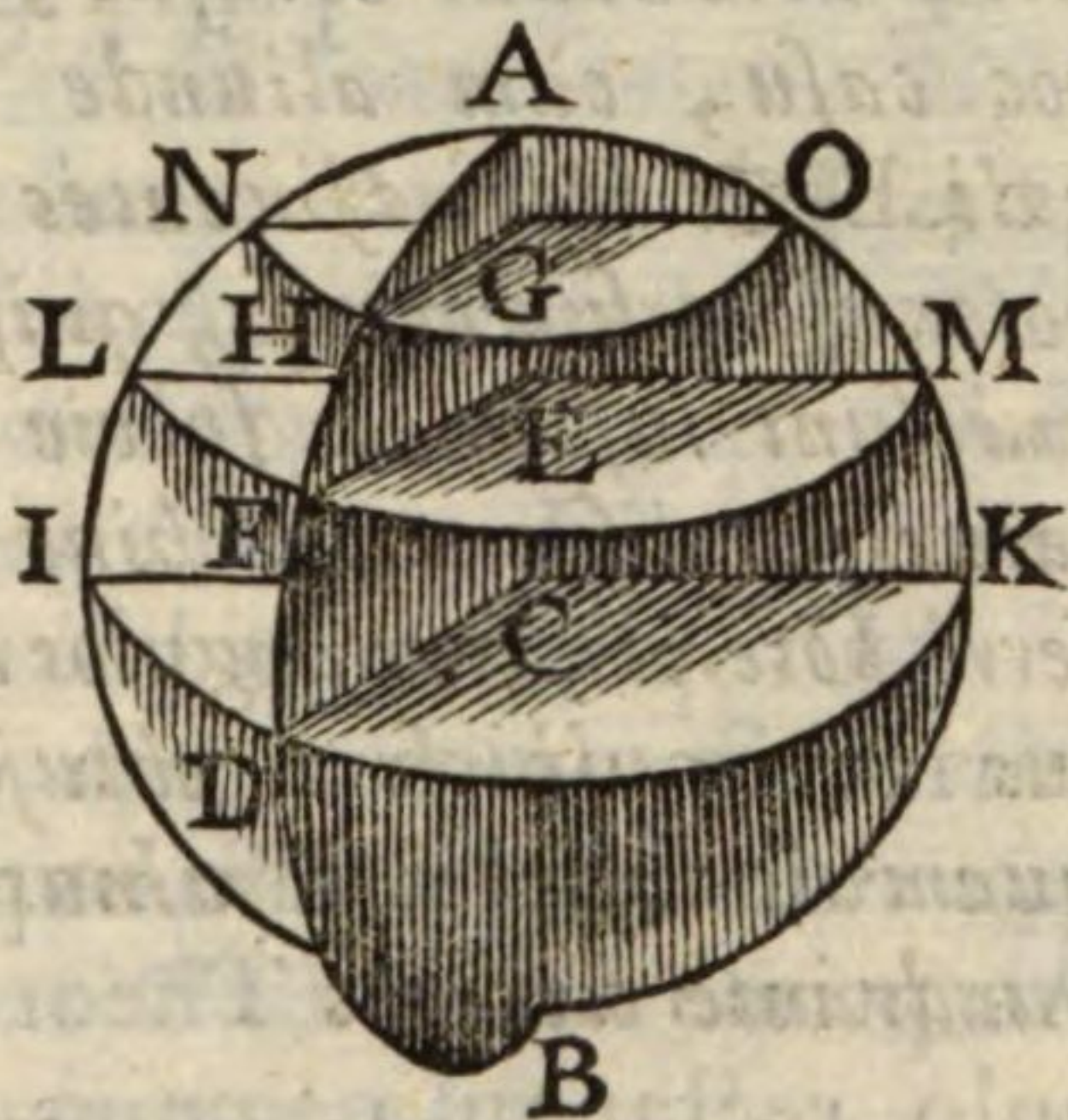
trian-

trianguli erunt singula supplementum angulorum oppositorum primi (n. 255.); & consequenter eadem latera omnia erunt quadrantes circulatorum; ergo anguli secundi trianguli erunt recti (n. 301.); ac proinde latera primi, quæ sunt supplementa angulorum secundi (n. 255.), erunt totidem quadrantes circuli.

DEFINITIO V.

303. **S**inus, Tangens, & Secans alicujus anguli sphærici $LA F$, est sinus, tangens, & secans illius arcus LF , qui anguli arcus dicitur, vel arcus ID , qui eundem angulum metitur (n. 237. 238. 239.).

Per sinum intellige tam primum, nempe rectum, quàm secundum, & versum; per tangentem, & secantem similiter tam primam, quàm secundam.



T H E O R I A

*Sinuum, Tangentium, & Secantium in Triangulo
sphærico rectangulo.*

A Triangulo sphærico rectangulo ordimur the-
oriam; quippe quæ viam aperiet resolutioni trian-
guli sphærici acutianguli, & obtusianguli; uti deinceps
constabit.

T H E O R E M A I.

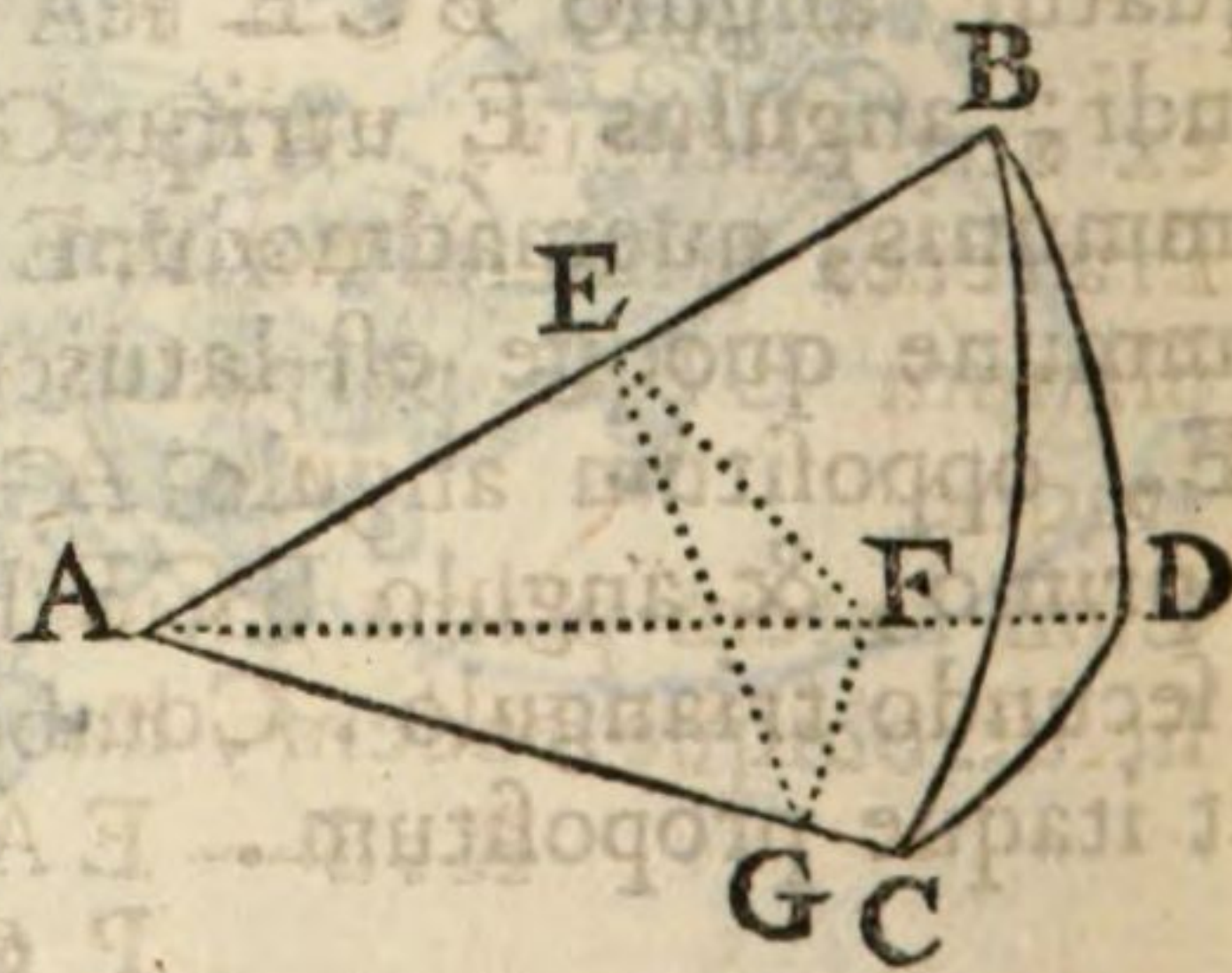
304. **I**N omni triangulo sphærico rectangulo sinus totus,
seu radius se habet ad sinum hypotenusæ, ut est
sinus utriusvis angulorum adjacentium hypotenusæ, ad
latus prædicto angulo oppositum.

Ut planior reddatur demonstratio, quæ propter
varias in unica figura circulorum sectiones, diversos-
que casus, solet esse implexa, partitione erit utendum.
Ac primò veritas Theorematis demonstrabitur in trian-
gulo rectangulo, cujus tria latera sint singula minora
quadrante circuli; dein ad reliqua triangula rectangu-
la demonstratio eadem faciliè transferri poterit.

Casus I.

ESto pyramis triangularis $ABCD$, terminata a
triangulo sphærico BDC , rectangulo in D , cujus
tria latera DB , DC , BC
sint singula minora quadran-
te; ac proinde duo anguli ad-
jacentes hypotenusæ, erunt
acuti; quippe qui sequuntur
speciem laterum opposito-
rum (n. 274.).

In plano sectoris CAD
ducatur recta GF , perpendi-



cula-

cularis sectori BAD , qui facit angulum rectum BDC cum primo sectori per hyp.; hæc linea GF erit quoque perpendicularis rectæ AD , quæ est communis intersectio horum duorum sectorum.

His positis, concipiatur planum, quod transeat per puncta F & G , quodque sit perpendiculare ipsi AB : habebitur triangulum EFG , cujus latera sunt intersectiones hujus plani cum tribus sectoribus pyramidis. Reliquum jam est, ut demonstretur, *radius spheræ, seu sinum totum esse ad sinum hypotenusæ BC , uti sinus anguli B est ad sinum lateris DC , eidem angulo oppositi; vel etiam, uti sinus anguli C est ad sinum lateris DB ; quod compendiosius sic exprimimus:*

$$R : S - BC :: S - B : S - DC, \text{ vel, } :: S - C : S - DB.$$

Demonstratio. Triangulum AFG , rectangulum in F , dabit,

$$AG : R :: FG : S - FAG.$$

Rursum angulus EFG rectus est; quia FG perpendicularis est plano BAD , ac proinde etiam rectæ EF , quæ est in eodem plano; Quare in triangulo rectangulo EFG habebitur, $GE : R :: FG : S - GEF$.

Prima proportio dabit hanc æquationem:

$$AG \times S - FAG = R \times FG.$$

Secunda proportio hanc aliam:

$$GE \times S - GEF = R \times FG.$$

Cùm autem duo postrema harum æquationum membra exhibeant idem productum $R \times FG$, erunt duo prima inter se æqualia, nimirum,

$$AG \times S - FAG = GE \times S - GEF;$$

ex qua elicitur, $AG : GE :: S - GEF : S - FAG$.

Præterea triangulum AGE est rectangulum in E ; nam planum EFG perpendiculare est rectæ AB per hyp.

Itaque $AG : GE :: R : S - EAG$.

Cùm autem prima ratio harum duarum proportionum sit utrobique eadem, habebitur,

$$R : S - EAG :: S - GEF : S - FAG.$$

Atqui $S - EAG$ idem prorsus est, ac $S - BC$; nam arcus BC est mensura anguli A ; aliunde $S - GEF$ est pariter idem, ac $S - DBC$; nam angulus GEF est mensura anguli sectorum BAC , BAD ; cum planum $EF G$ supponatur perpendiculare communi sectioni AB horum duorum sectorum; denique quartus terminus $S - FAG$ æqualis est $S - DC$; Quare ultima proportio ad hanc reducitur:

$$S - BDC, \text{ seu } R : S - BC :: S - DBC : S - DC.$$

Quod erat primum.

Eodem modo demonstrabitur pars altera Theor., nimirum, $R : S - BC :: S - DCB : S - DB$; si supponatur EF perpendicularis sectori CAD , & proinde intersectioni AD , ac præterea planum $EF G$ perpendiculare intersectioni AC . In hoc casu, a triangulo $A F E$, rectangulo in F , deducetur hæc proportio:

$$AE : R :: EF : S - EAF;$$

& a triangulo $EF G$ hæc altera proportio:

$$GE : R :: EF : S - EGF.$$

Prima dabit hanc æquationem:

$$AE \times S - EAF = R \times EF;$$

Secunda dabit hanc aliam:

$$GE \times S - EGF = R \times EF.$$

$$\text{Ergo } AE \times S - EAF = GE \times S - EGF;$$

$$\text{atque hinc } AE : GE :: S - EGF : S - EAF.$$

Jam verò propter triangulum AGE , rectangulum in G , habebitur, $AE : GE :: R : S - EAG$;

$$\text{Ergo } R : S - EAG :: S - EGF : S - EAF;$$

$$\text{hoc est, } R : S - BC :: S - DCB : S - DB.$$

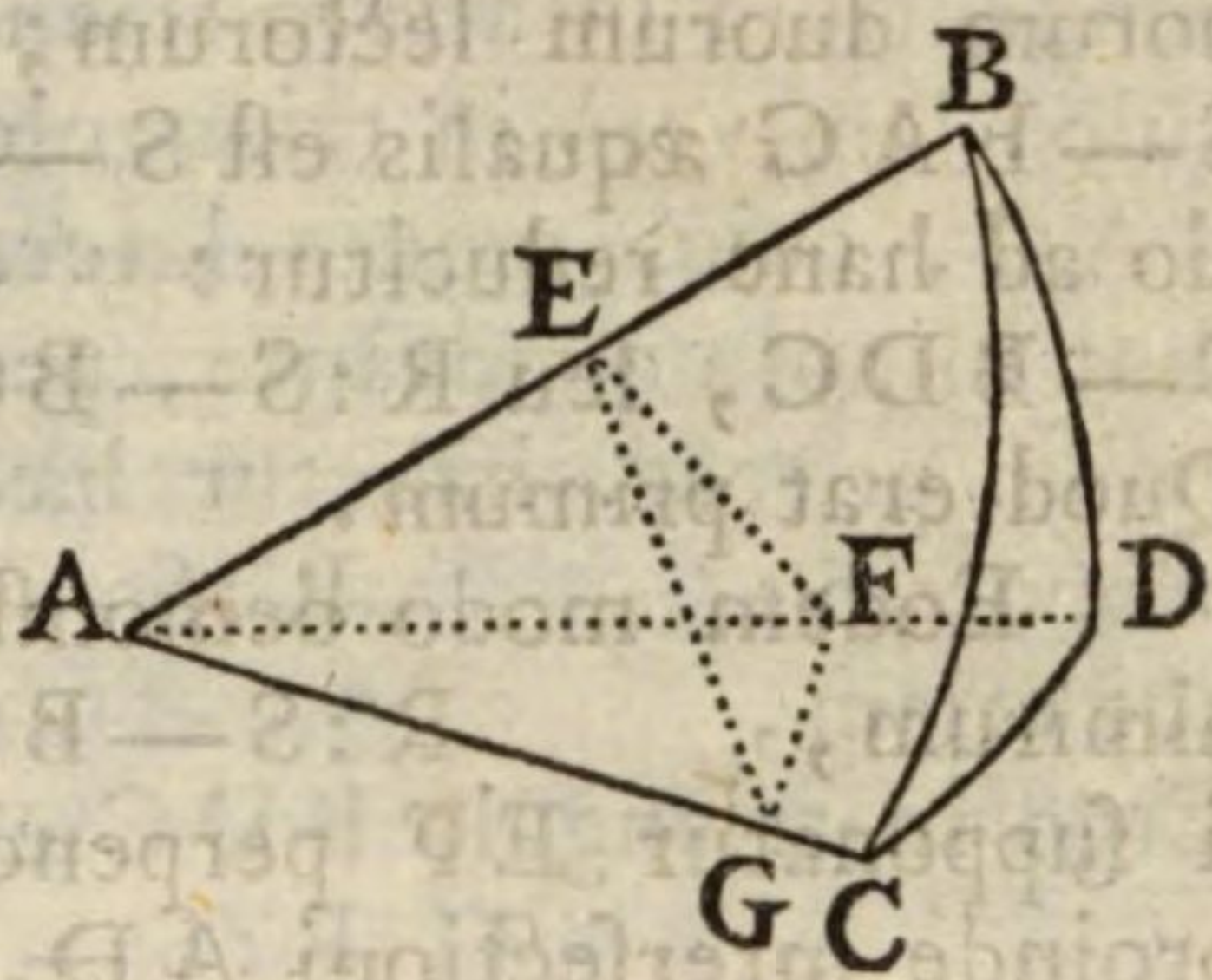
Quod erat alterum.

Scholion.

305. **H**æc demonstratio supponit, tria latera trianguli sphaerici BDC , singula minora esse quadrante. Nam, si latus BC esset aut æquale, aut majus quadrante, angulus A esset rectus, aut obtusus; & consequen-

quenter triangulum EAG esse non posset rectangulum neque in E , neque in G . Similiter, si latus DB esset 90 graduum, aut etiam major, angulus BAD esset rectus, aut obtusus; quare triangulum AEF non posset esse rectangulum in E . Denique, si angulus B , aut C esset rectus, vel obtusus, angulus in E , aut in G , esset ejusdem magnitudinis; & consequenter angulus EFG non posset esse rectus.

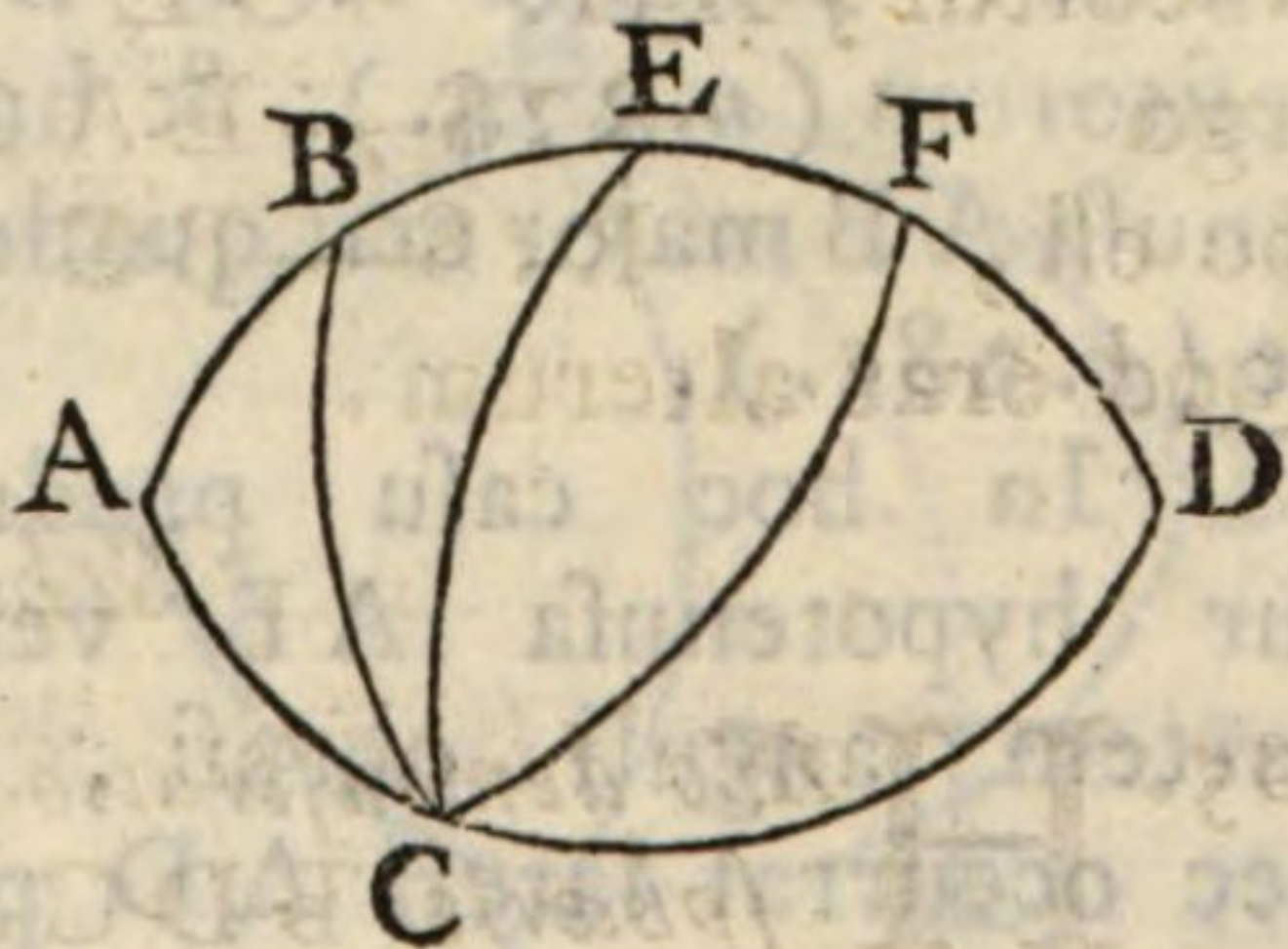
Itaque, ut veritas Theorematis universalis sit, reliqui etiam casus recensendi, ac demonstrandi.



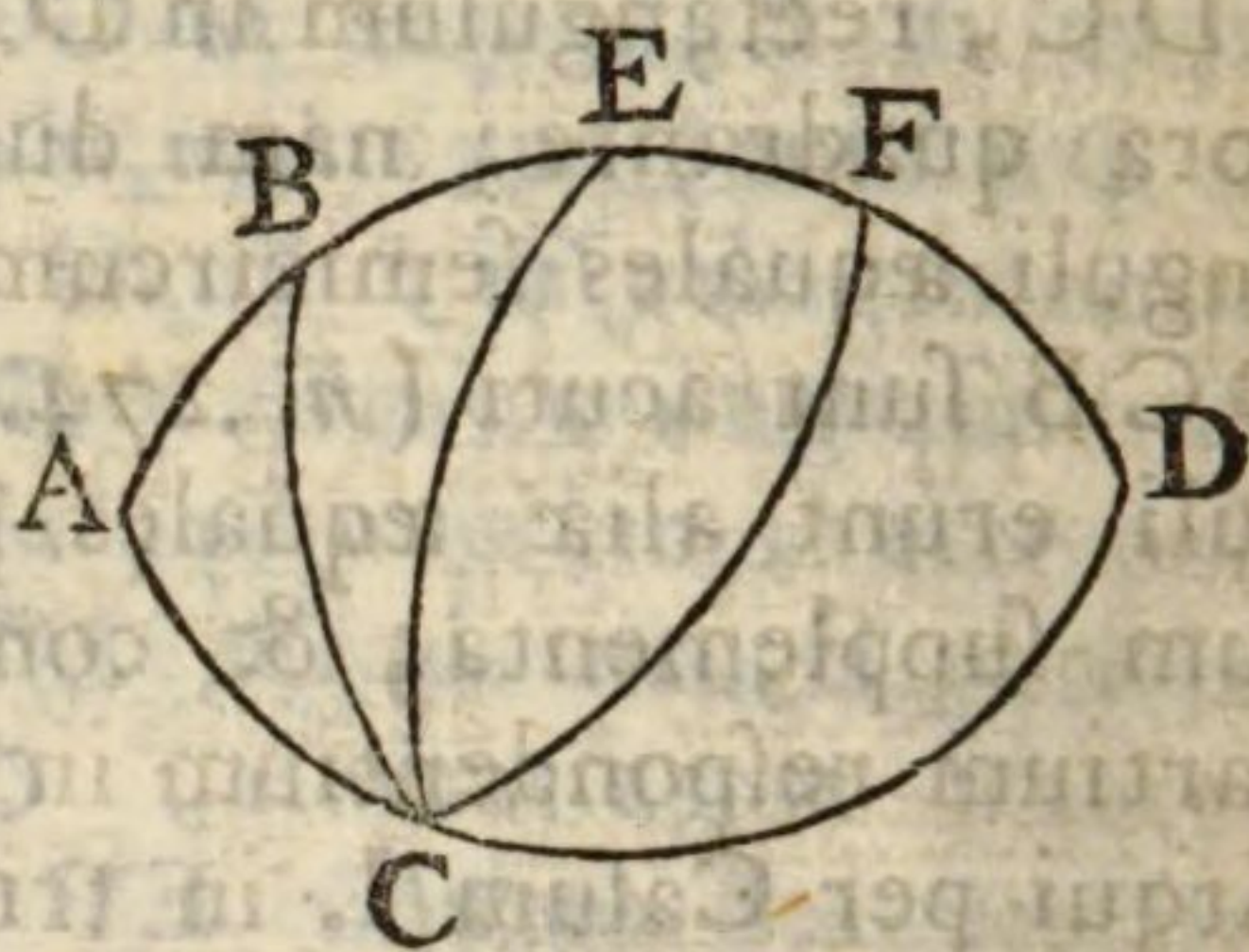
Casus II.

306. **S**int duo latera trianguli BDC rectanguli in D , singula majora quadrante: anguli B & C erunt obtusi; nam sequuntur speciem laterum oppositorum. In hoc casu proportio Theorematis locum habebit.

Quod aperte constabit, si consideretur triangulum oppositum BAC , conflatum ex arcubus DB , DC , productis usque ad concursum in A . Latera hujus trianguli sunt singula minora quadrante circuli; quippe quæ sunt supplementa laterum primi (n. 242.); itaque anguli ABC , ACB hujus trianguli erunt acuti; sunt enim supplementa angulorum B & C primi trianguli; aliunde hypotenusæ BC minor est quadrante; duo quippe latera sunt ejusdem speciei. Quamobrem partium



omnium trianguli BAC aliæ sunt æquales, & aliæ sunt supplementa partium trianguli BDC ; hinc sinus partium in uno sunt prorsus iidem, ac sinus partium respondentium in altero triangulo. Jam verò in triangulo BAC , cujus omnia latera sunt minora quadrante, per casum præced. habetur hæc



proportio: $R : S - BC :: S - ABC : S - AC$,
aut etiam, $:: S - ACB : S - AB$.

Ergo in triangulo BDC erit quoque

$R : S - BC :: S - DBC : S - DC$,
vel, $:: S - DCB : S - DB$.

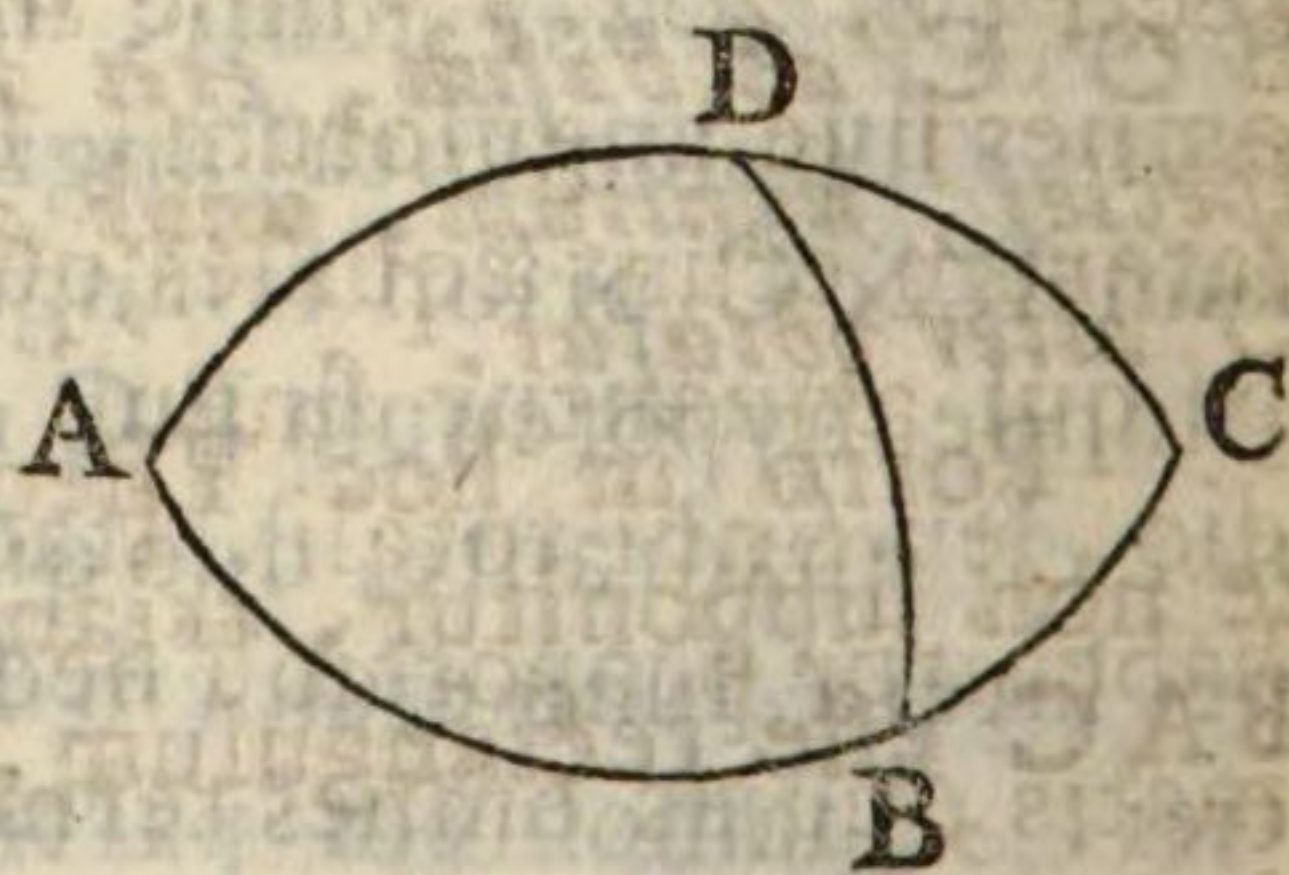
Scholion.

SI ponantur obtusi anguli $B \text{ \& } C$, adjacentes hypotenuse, duo latera erunt quoque majora quadrante (n. 274.); atque adeo hic casus recidit in præcedentem.

Casus III.

307. **I**N triangulo ADB , rectangulo in D , ponatur latus DA majus, & latus DB minus quadrante. Anguli A & B sequentur speciem laterum positorum (n. 274.); & hypotenusa AB major erit quadrante (n. 281.).

In hoc casu producat^{ur} hypotenusa AB versùs partem anguli obtusi, donec occurrat lateri AD pari-



ter

ter producto: habebitur triangulum aliud oppositum BDC , rectangulum in D , cujus omnia latera sunt minora quadrante; nam duo arcus ABC , ADC sunt singuli æquales semicircumferentiæ; & anguli DBC , DCB sunt acuti (*n.* 274.); hinc partes secundi trianguli erunt aliæ æquales partibus primi, & aliæ, earum supplementa; & consequenter iidem erunt sinus partium respondentium in uno, atque altero triangulo. Atqui per Casum I. in triangulo BDC obtinetur hæc proportio:

$$R:S-BC::S-DBC:S-DC,$$

$$\text{vel,} \quad ::S-DCB:S-DB.$$

Ergo pariter in triangulo ADB erit

$$R:S-AB::S-DBA:S-DA,$$

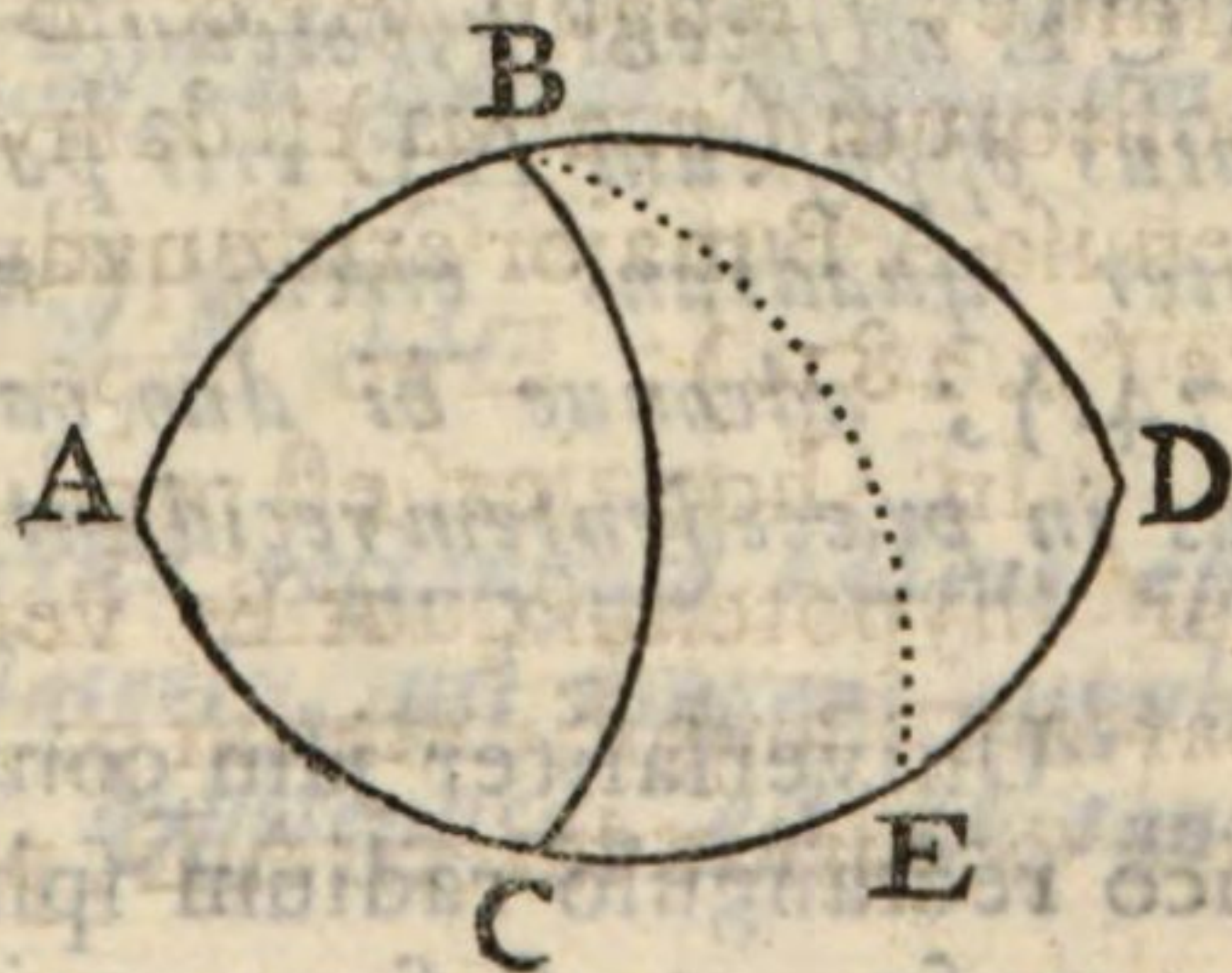
$$\text{vel,} \quad ::S-DAB:S-DB.$$

Scholion.

SI anguli adjacentes hypotenusæ, ponantur in diversa specie, obtusus unus, acutus alter, etiam latera sequentur illorum speciem; ac proinde hic casus in eundem revolvitur.

Casus IV.

308. **I**N triangulo BDC , rectangulo in D , si supponantur duo latera DB , DC æqualia quadranti circuli, hypotenusa BC erit mensura anguli recti (*n.* 236. 240.); & consequenter erit 90 graduum. Aliunde tres anguli erunt recti (*n.* 302.); hinc sinus omnes sive angulorum, sive laterum, erunt æquales; quippe qui æquantur singuli radio, seu sinui totali. Itaque habebitur proportio Theorematis, cujus omnes termini in hoc casu erunt æquales.



Scho-

Scholion.

SI duo anguli adjacentes hypotenusæ, ponantur recti, obtinebitur eadem proportio. Cum enim tres anguli tunc sint recti, tria latera erunt quadrantes circuli (n. 302.).

Casus V.

309. **I**Nvenietur quoque proportio Theorematis in triangulo rectangulo EAC , cujus unum latus AE ponatur graduum 90; tunc enim hypotenusa EC erit pariter quadrans circuli (n. 282.); & angulus ACE , oppositus lateri 90 graduum, est rectus (n. 274.). Præterea latus AC est mensura anguli oppositi AEC ; nam punctum E est polus arcus AC . Ergo habebitur,

$$R : S - EC :: S - AEC : S - AC,$$

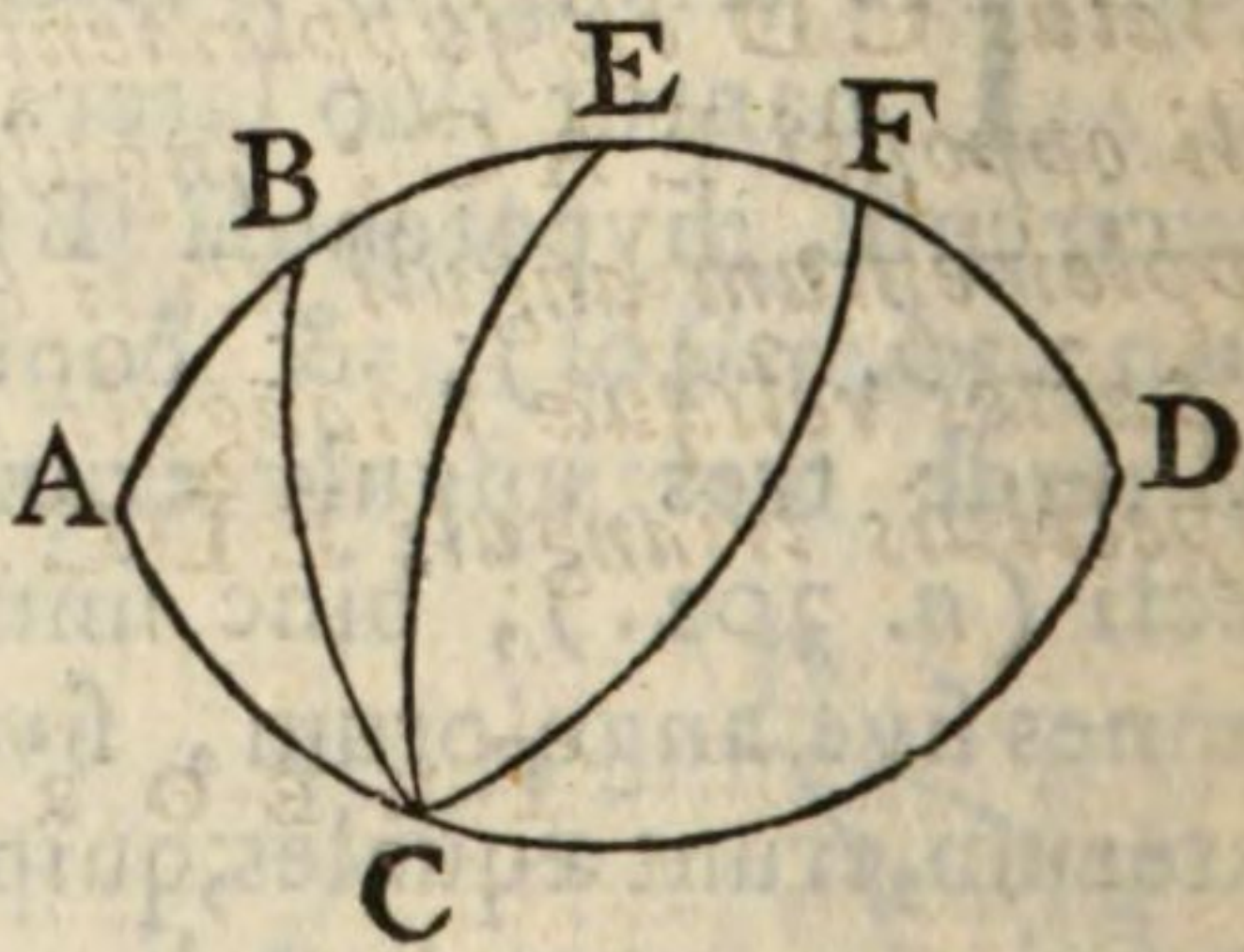
vel,

$$:: S - ACE : S - AE.$$

Termini primæ rationis sunt æquales inter se, quemadmodum termini secundæ in utraque proportionem.

Scholion.

SI supponatur hypotenusa EC quadrans circuli, alterutrum duorum laterum, puta, AE , erit pariter quadrans circuli (n. 284.). Vel, si ponatur rectus angulus ACE adjacens hypotenusæ, latus oppositum AE erit pariter quadrans circuli (n. 274.); adeoque hi duo casus in præcedentem recidunt.



Universaliter jam constat, in omni triangulo sphærico rectangulo radium sphæræ se habere ad sinum hypotenusæ, ut est sinus utriusvis angulorum reliquorum ad sinum cruris prædicto angulo oppositi.

Corollarium.

310. **H**inc sinus angulorum proportionales sunt finibus laterum oppositorum.

Scholion.

311. **T**res sunt casus, in quibus triangulum rectangulum habere potest partes, quæ excedant gradus 90. Primus est, quando duo latera sunt singula majora quadrante; Secundus est, quando latus unum majus est, & alterum minus quadrante; Tertius denique, quando latus unum majus, & alterum æquale quadranti.

In primis duobus casibus vidimus n. 306. 307., concipi posse triangulum primo oppositum, cujus aliquæ partes sint supplementa illarum, quæ excedunt gradus 90 in primo triangulo, & aliæ partes sint æquales partibus respondentibus in primo; ita ut sinus, & tangentes partium secundi, sint pariter sinus, & tangentes partium respondentium in primo.

Idem dici potest in tertio casu. Nam in triangulo EDC, rectangulo in D, si ponatur latus CD majus 90 gradibus, & alterum ED æquale quadranti; in hoc casu latus CD est supplementum lateris AC alterius trianguli oppositi EAC; angulus obtusus DEC est pariter supplementum anguli acuti AEC; & reciprocè. Præterea partes reliquæ trianguli EAC sunt æquales partibus respectivis trianguli EDC. Constat itaque propositum.

THEOREMA II.

312. **I**n omni triangulo sphærico rectangulo radius est ad sinum alterutrius lateris, uti tangens anguli intercepti ab eodem latere, & hypotenusà, est ad tangentem lateris oppositi.

Hæc analogia demonstranda nobis est in triangulo rectan-

rectangulo, cujus tria latera sint singula minora quadrante circuli; deinde eandem convenire demonstrabimus reliquis triangulis rectangulis, excepto casu trianguli, in quo dumtaxat latus unum, & hypotenu-
sa æquentur quadranti circuli.

Demonstratio. Dico itaque

$$R : S - DB :: T - DBC : T - DC.$$

Cùm enim, juxta constructionem Theorematis præcedentis, planum trianguli EFG , rectanguli in F , sit perpendiculare lineæ AB , erit triangulum AEF rectangulum in E ; hinc habebitur hæc proportio:

$$AF : R :: EF : S - EAF.$$

Similiter triangulum AFG , rectangulum in F , dabit hanc analogiam, uti constat ex prima parte Trig. planæ:

$$AF : R :: FG : T - FAG;$$

$$\text{Ergo } EF : FG :: S - EAF : T - FAG.$$

Atqui in triangulo EFG , pariter rectangulo in F , ex dictis in prima parte Trig., invenitur,

$$EF : FG :: R : T - FEG;$$

$$\text{Ergo } R : T - FEG :: S - EAF : T - FAG;$$

$$\& \text{alternando, } R : S - EAF :: T - FEG : T - FAG;$$

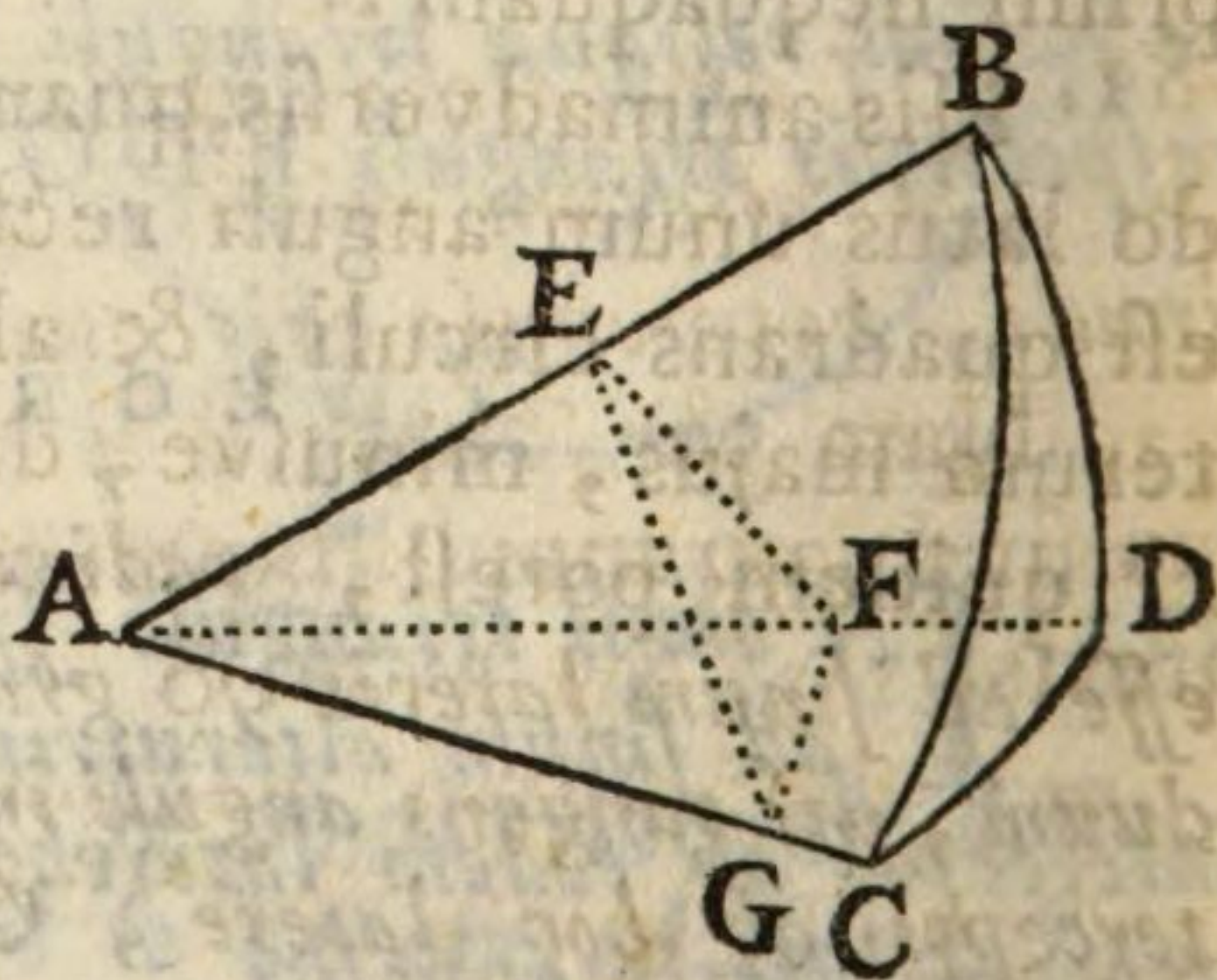
$$\text{vel, } R : S - DB :: T - DBC : T - DC.$$

Quod erat &c.

Similiter demonstrabitur,

$$R : S - DC :: T - DCB : T - DB.$$

Neque aliud supponi debet in constructione, quàm rectam EF perpendicularem esse sectori DAC , & consequenter intersectioni AD , ac præterea planum trianguli EFG perpendiculare rectæ AC .



Corollarium.

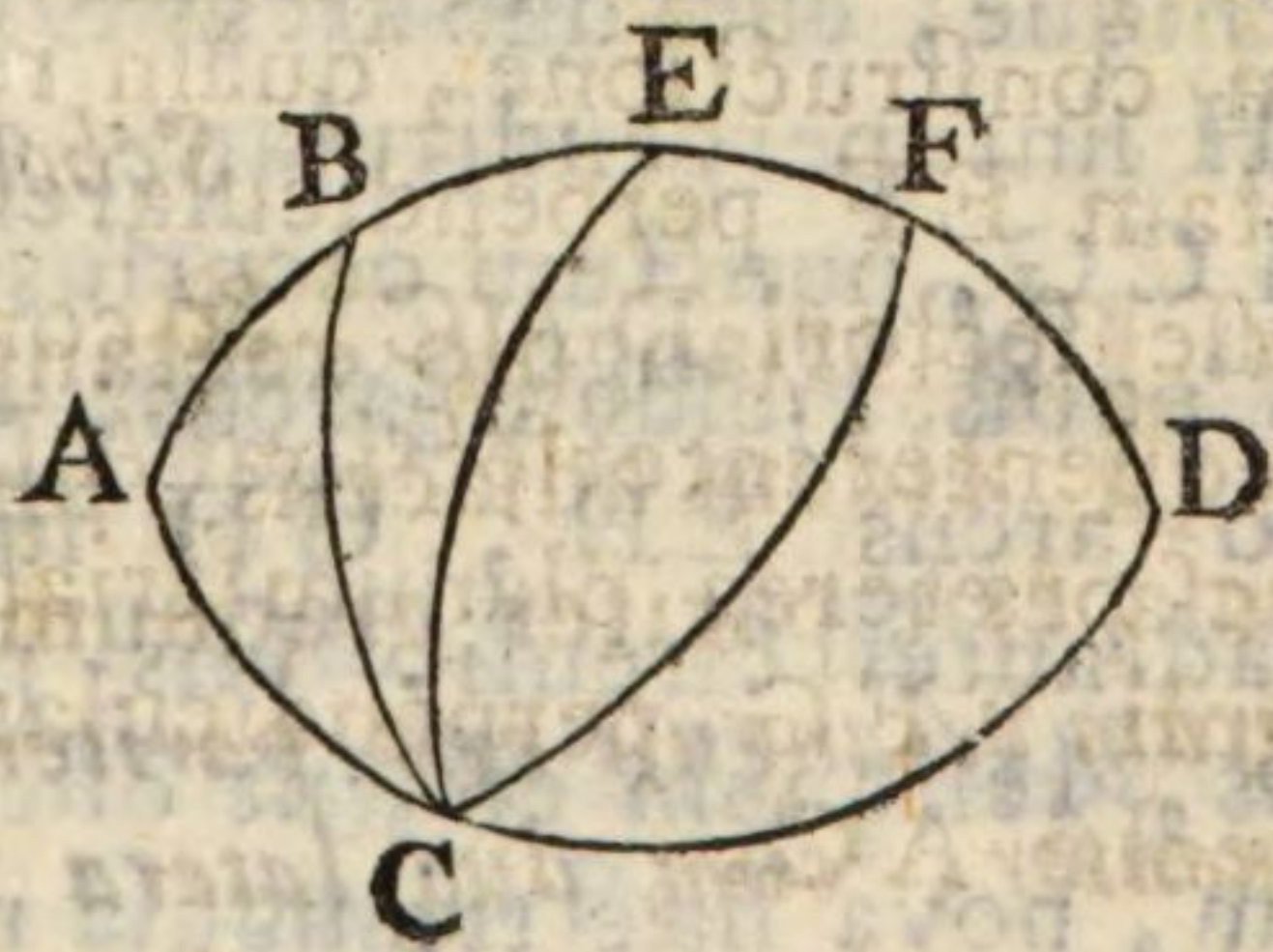
313. **Q**uemadmodum in Theoremate præcedenti, demonstrabitur eandem analogiam habere locum, I. quando duo crura anguli recti ambo majora sunt quadrante; II. quando duorum laterum alterum majus est quadrante, & alterum minus; III. quando duo latera æquantur singula quadranti. In hoc tertio casu duo termini primæ rationis erunt inter se æquales, quemadmodum termini secundæ. Verùm isti duo termini non aliter exprimi poterunt, quàm per numeros infinitos; nam tangens arcus, seu anguli 90 graduum, est infinita.

Denique, si latus unum anguli recti sit quadrans circuli, & latus alterum majus, minusve, uti in triangulo EAC , rectangulo in A , in quo latus AE est quadrans circuli, & hypotenusa EC erit pariter quadrans (*n.* 284.), & latus AC erit mensura anguli oppositi E ; tum habebitur etiam proportio:

$$R : S - AE :: T - AEC : T - AC.$$

Nam termini primæ rationis sunt inter se æquales, uti & termini secundæ. Verùm in hoc casu dici non poterit, $R : S - AC :: T - ACE : T - AE$; duo quippe ultimi termini sunt utique æquales; at duo primi nequaquam.

His animadversis, quando latus unum anguli recti est quadrans circuli, & alterum majus, minusve, dici quidem potest, *radius esse ad sinum lateris 90 graduum, uti tangens anguli intercepti ab hoc latere, & hypotenusa, est ad tangen-*



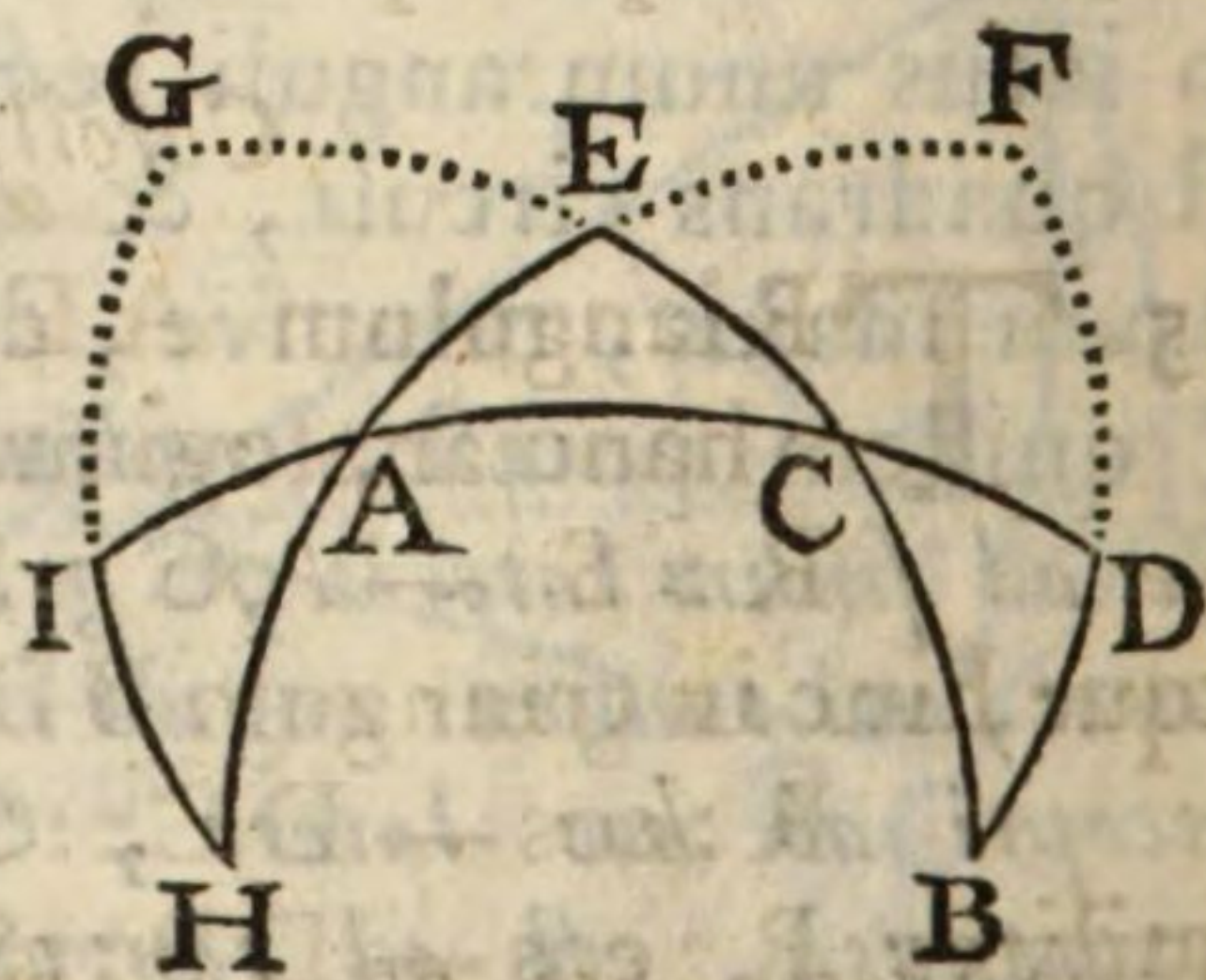
tem

tem lateris oppositi. At dici nequaquam potest, radium esse ad sinum lateris minoris, vel majoris quadrante, uti tangens anguli intercepti ab hoc latere & hypotenusa, est ad tangentem lateris oppositi.

LEMMA.

314. **D**ato triangulo rectangulo BDC , cujus latera omnia sint singula minora quadrante circuli, I. Si producat^{ur} hypotenusa BC , & latus DC , hac lege, ut productiones CG , CI sint quadrantes circuli; II. Si producat^{ur} similiter latus BD in F ; ac fiat BF quadrans circuli; III. Si denique a polo B ducatur arcus FEH : habebuntur nova triangula rectangula AEC , AIH , quorum partes erunt æquales partibus trianguli BDC , aut earum complementis.

Demonstratio. Quoniam arcus FEH habet polum B , erunt duo arcus BF , BE quadrantes circuli, perpendiculares arcui FEH ; hinc angulus AEC est rectus. Similiter, quia punctum C est polus arcus GIH , duo arcus CG , CI sunt quadrantes circuli, perpendiculares arcui GIH ; ergo angulus AIH est pariter rectus. Præterea, cum arcus AF habeat pro polo punctum B , & arcus AD angulum rectum efficiat in D , erunt ambo perpendiculares arcui BD ; & consequenter punctum A erit ejusdem arcus BD polus (n. 232.); ergo AD , AF sunt quadrantes circuli. Denique, cum duo arcus EH , GH sint perpendiculares arcui CG , punctum occurfus H est polus ejusdem arcus; ac duo arcus EH , GH sunt quadrantes circuli. His posit^{is}, reliquum est, ut ostendam, nova hæc triangula rectangula AEC , AIH habe-



re partes æquales partibus trianguli BDC , aut earum complementis.

I. Respectu trianguli AEC , rectanguli in E , constat, hypotenusam AC esse complementum lateris DC ; quia AD est quadrans circuli; latus AE est complementum lateris EF ; quod metitur angulum B ; latus alterum CE est complementum hypotenusæ BC ; nam BE est quadrans; angulus CAE habet pro mensura arcum DF , complementum lateris BD , propter quadrantem circuli BF ; denique angulus ACE æquatur angulo BCD .

II. Quantum attinet ad triangulum AIH , rectangulum in I , hypotenusa AH æquatur arcui EF , qui metitur angulum B ; nam isti duo arcus habent idem complementum AE . Rursum latus AI æquatur lateri CD , propter commune complementum AC ; latus alterum IH est complementum arcus GI , qui metitur angulum C ; angulus IAH habet pro mensura arcum DF , complementum lateris BD ; denique angulus H habet pro mensura arcum EG , æqualem hypotenusæ BC , propter commune complementum CE .

Scholion.

QUæ sequuntur Corollaria, ab hoc Lemmate deducuntur, & ab aliquo Theorematum præcedentium; nimirum, sex prima a Theoremate I. n. 304., ejusque Coroll.; & reliqua quatuor a Theor. II. n. 312.

Corollarium I.

315. **T**riangulum AEC , rectangulum in E , dat hanc analogiam:

$$R : S - AC :: S - ACE : S - AE.$$

Atque hinc in triangulo BDC rectangulo in D , habebitur,

$$R : \cos - DC :: S - C : \cos - B.$$

Similiter $R : \cos - DB :: S - B : \cos - C$ (n. 325.);
five

five alternando, $R:S—B::\cos—DB:\cos—C.$

Nimirum, *radius, seu sinus totus*
ad sinum anguli adjacentis hypotenusæ;

*Uti cosinus lateris, cui adjacet idem angulus,
ad cosinum anguli oppositi huic lateri.*

Corollarium II.

316. ¶ Dem triangulum A E C dat pariter ,

$$R: S-AC :: S-\overset{1}{C}AE: S-CE.$$

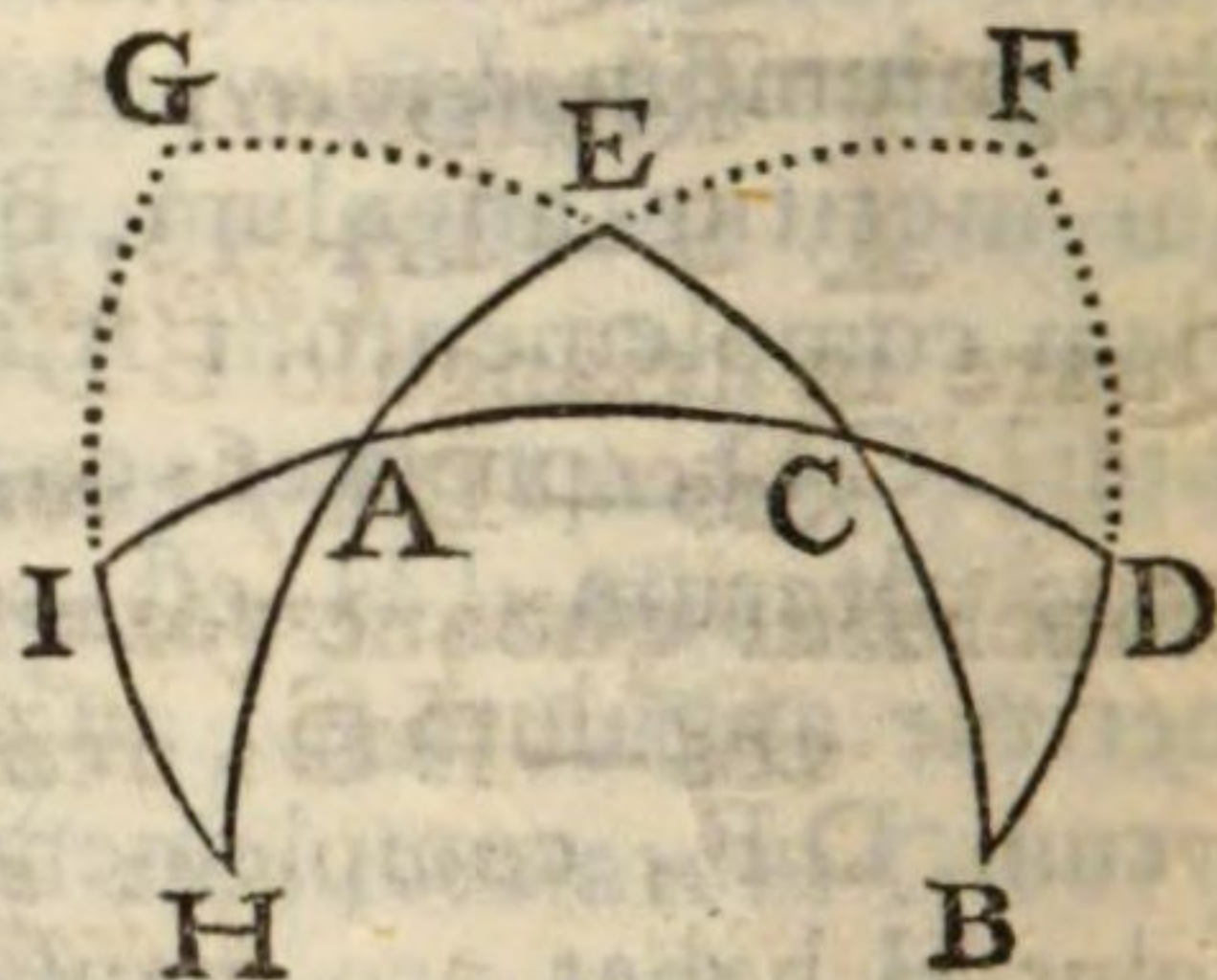
Ergo in triangulo BDC habebitur,

$$R : \cos \frac{1}{2} D C :: \cos \frac{1}{2} D B : \cos \frac{1}{2} B C.$$

Nimirum, *sinus totus*

ad cosinum unius lateris;

*Utī cōsinus alterius lateris
ad cōsinum hypotenusæ.*



Corollarium III.

317. **T**riangulum A E C hanc etiam analogiam exhibet (*n.* 311.):

S—CAE: S—CE::S—ACE:S—AE.

Ergo in triangulo BDC invenietur,

$$\cos \frac{1}{2} D B : \cos \frac{1}{2} B C :: S - C : \cos \frac{1}{2} B.$$

Habebitur quoque (*n.* 325.),

$$\cos \frac{1}{2} \hat{D}C : \cos \frac{1}{2} \hat{B}C :: S-B : \cos \frac{1}{2} C.$$

Corollarium IV.

318. **T**riangulum $A I H$, rectangulum in I , dat hanc analogiam:

$$\bar{R}: S-AH :: S-IAH: S-IH.$$

Itaque in triangulo BDC , rectangulo in D , habebitur,

R:

$$R : S - B :: \cos - DB : \cos - C.$$

Hoc Corollarium recidit in primum.

Corollarium V.

319. **T**riangulum A I H dat pariter
 $R : S - A H :: S - A H I : S - A I.$

Ergo in triangulo rectangulo B D C, invenietur,

$$R : S - B :: S - B C : S - D C.$$

Erit quoque (n. 325.)

$$R : S - C :: S - B C : S - D B.$$

Corollarium VI.

320. **T**riangulum A I H dat etiam
 $S - I A H : S - I H :: S - A H I : S - A I.$

Quare in triangulo B D C invenietur,

$$\cos - D B : \cos - C :: S - B C : S - D C.$$

Habebitur quoque (n. 325.)

$$\cos - D C : \cos - B :: S - B C : S - D B.$$

Corollarium VII.

321. **I**n triangulo A E C, rectangulo in E, invenietur
 (n. 312.),

$$R : S - A E :: T - C A E : T - C E.$$

Itaque in triangulo rectangulo B D C, erit

$$R : \cos - B :: \cot - D B : \cot - B C;$$

$$\text{vel } R : \cot - D B :: \cos - B : \cot - B C.$$

Habebitur quoque (n. 325.)

$$R : \cos - C :: \cot - D C : \cot - B C;$$

Hoc est, *sinus totus*

ad cosinum anguli adjacentis uni lateri ;

Ut cotangens hujus lateris,

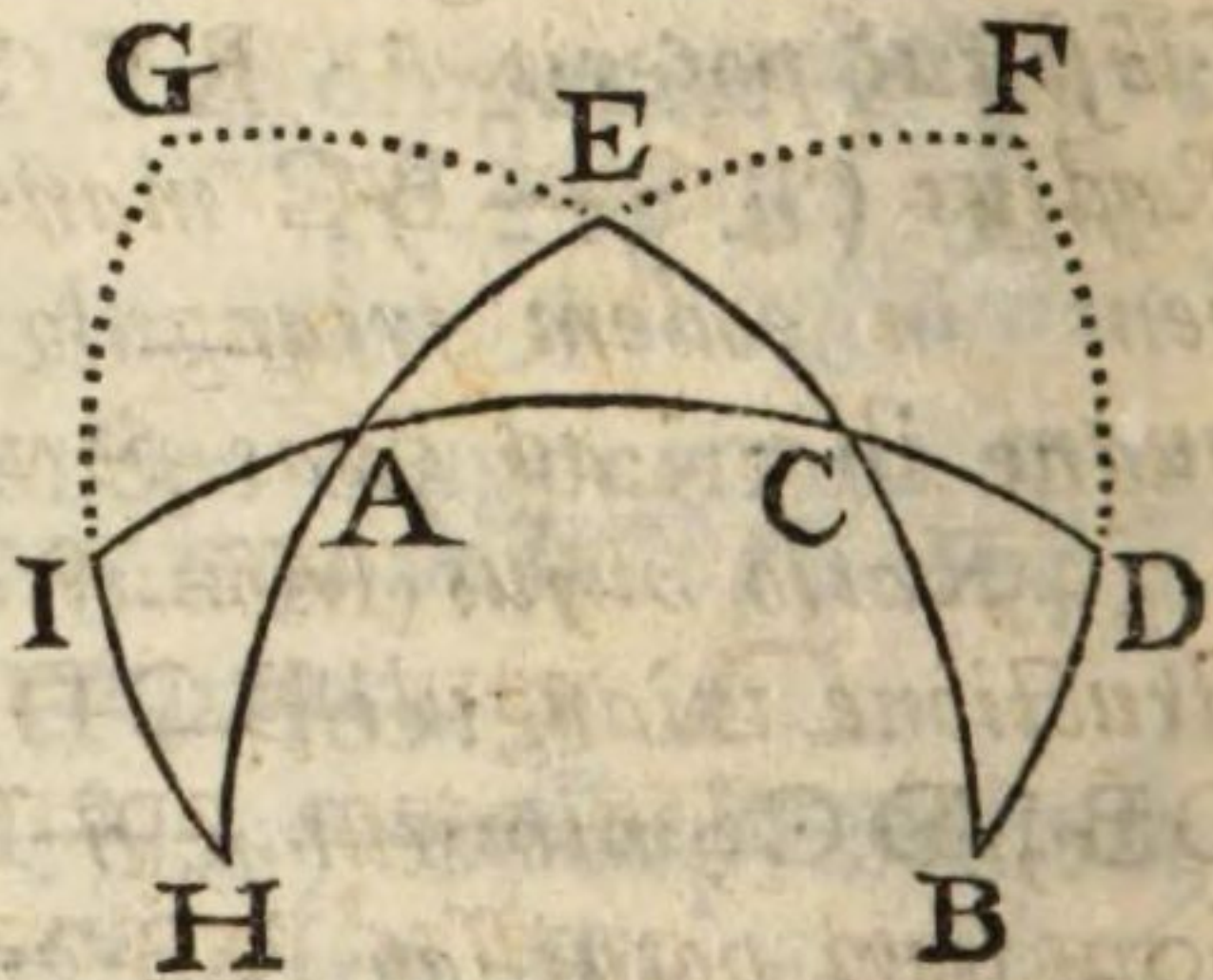
ad cotangentem hypotenusæ.

Corollarium VIII.

322. **I**dem triangulum A E C dat pariter
 $R : S - CE :: T - ACE : T - AE.$
 Ergo in triangulo B D C habebitur
 $R : \cos - BC :: T - C : \cot - B.$
 Habebitur quoque (n. 325.)
 $R : \cos - BC :: T - B : \cot - C;$
 Nimirum, *sinus totus*
ad cosinum hypotenusæ ;
Ut tangens anguli adjacentis hypotenusæ,
ad cotangentem alterius anguli ejusdem hypotenusæ.

Corollarium IX.

323. **I**n triangulo A I H invenietur (n. 312.),
 $R : S - IH :: T - AHI : T - AI.$
 Ergo in triangulo B D C habebitur
 $R : \cos - C :: T - BC : T - DC.$
 Erit quoque $R : \cos - B :: T - BC : T - DB.$
 Hæ duæ analogiæ locum
 habere possunt in iisdem
 circumstantiis Coroll. VII.



Corollarium X.

324. **D**enique in triangulo A I H reperietur pariter,
 $R : S - AI :: T - IAH : T - IH.$
 In triangulo B D C erit quoque
 $R : S - DC :: \cot - DB : \cot - C;$
 vel $R : \cot - DB :: S - DC : \cot - C;$
 vel denique $R : S - DB :: \cot - DC : \cot - B.$

Monitum I.

325. **S**I quando in aliqua analogia habeantur termini alicujus trianguli, qui sint ejusdem nominis cum aliis terminis ejusdem trianguli, hi ultimi substitui poterunt primis in analogia. Quamobrem in triangulo re-
ctangulo substitui poterit latus unum, & angulus huic oppositus, loco alterius lateris, & anguli oppositi huic secundo lateri; similiter substitui poterit latus, & angulus adjacens, loco alterius lateris, sui que anguli adjacentis.

Illam tamen cautio diligenter habenda est, quod, si tres fuerint in aliqua proportionem hujusmodi partes, quæ alias ejusdem nominis habeant in eodem triangulo, vel tres omnes erunt permutandæ, vel earum neutra; quod si duæ dumtaxat habeantur, ambæ pariter permutandæ sunt.

Est hæc analogia, $R : \cos — DC :: S — C : \cos — B :$
substitui poterit $R : \cos — DB :: S — B : \cos — C .$

Pariter in analogia $R : S — B :: S — BC : S — DC ,$
substitui poterit $R : S — C :: S — BC : S — DB .$

Radius & $S — BC$ manent iidem; quippe qui non habent in eodem triangulo alias partes ejusdem nominis, quàm illas, ad quas pertinent.

Ratio hujus Moniti est planè evidens. Nam in constructione trianguli BCD , variari potuisset valor laterum DB, DC ; nimirum, si DB est grad. 65, & DC grad. 60, fieri potuisset DB grad. 60, & DC grad. 65; ac similiter permutari potuisset valor angulorum B & C , manente semper vera proportionem.

Præterea produci possent CB, DB versùs B , & DC versùs A ; & duo triangula AEC, AIH orirentur ultra B . In hoc casu deduci potuissent analogiæ, de quibus agitur in hoc Monito, loco illarum, quæ deductæ sunt in I. & V. Corollario.

Monitum II.

326. **H**Æc Corollaria non utique respiciunt triangula rectangula, in quibus latus aliquod, aut aliquis angulus adjacens hypotenusæ, contineat 90 gradus; nam Lemma, ex quo hæc Corollaria deducta sunt, postulat, ut omnes partes trianguli rectanguli sint minores gradibus 90, excepto angulo, qui triangulum rectangulum constituit.

Verum analogiæ, quæ in hisce decem Corollariis continentur, aptari possunt reliquis omnibus triangulis rectangulis; quamvis suarum partium aliquæ excedant gradus 90. Nam dato hujusmodi triangulo, concipi semper poterit aliud primo oppositum, cujus aliquæ partes æquentur iis partibus primi, quæ sunt minores gradibus 90, & reliquæ partes sint supplementa earum partium primi, quæ sunt majores gradibus 90; uti jam expositum est n. 306. 307. 308. 309.

Monitum III.

327. **I**N sequenti Problematum serie satius duco, uti dumtaxat sex diversis analogiis, quæ continentur in Theor. I. & II. & in quatuor ex immediatè præcedentibus Corollariis, nimirum, in I. II. VII. & VIII. Ut autem unico obtutu comprehendendi facilius possint, & memoriâ retineri, juvabit sex hasce analogias propter usum insignem, generatim subicere, nullis adhibitis figuris, ut promptius Tironibus occurrant.

328. In omni triangulo sphærico rectangulo
 Sinus totus, seu radius
 est ad sinum hypotenusæ;
 Ut sinus utriusvis angulorum adjacentium hypotenusæ,
 est ad latus prædicto angulo oppositum.
 Theor. I. n. 304.

329. Radius, seu sinus totus
est ad sinum alterutrius lateris;
Uti tangens anguli intercepti ab eodem latere, & hyp.,
est ad tangentem lateris oppositi.

Theor. II. n. 312.

330. Sinus totus
est ad sinum anguli adjacentis hypotenusæ;
Uti cosinus lateris, cui adjacet idem angulus,
est ad cosinum anguli oppositi huic lateri.

Coroll. I. n. 315.

331. Sinus totus
est ad cosinum unius lateris;
Uti cosinus alterius lateris
est ad cosinum hypotenusæ.

Coroll. II. n. 316.

332. Sinus totus
est ad cosinum anguli adjacentis uni lateri;
Uti cotangens hujus lateris
est ad cotangentem hypotenusæ.

Coroll. VII. n. 321.

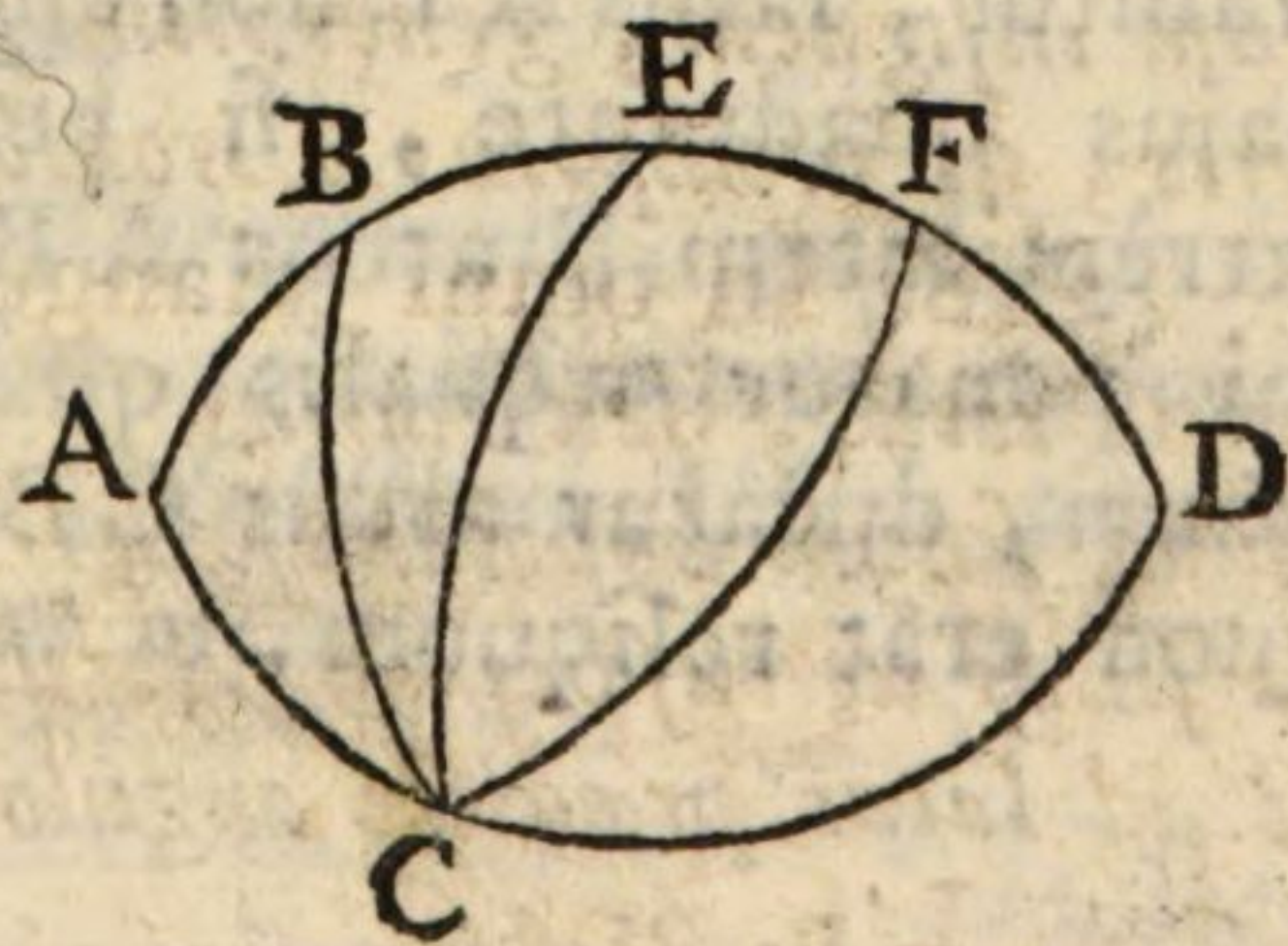
333. Sinus totus
est ad cosinum hypotenusæ;
Uti tangens anguli adjacentis hypotenusæ,
est ad cotangentem alterius anguli ejusdem hypotenusæ.

Coroll. VIII. n. 322.

THEOREMA III.

334. **I**N triangulo sphærico
EAC, rectangulo in
A, si latus unum AE sit
quadrans circuli, latus alte-
rum AC tot gradus continet,
quot angulus oppositus AEC.

Demonstratio. Nam in
hoc casu punctum E est
polus arcus AC, propter an-



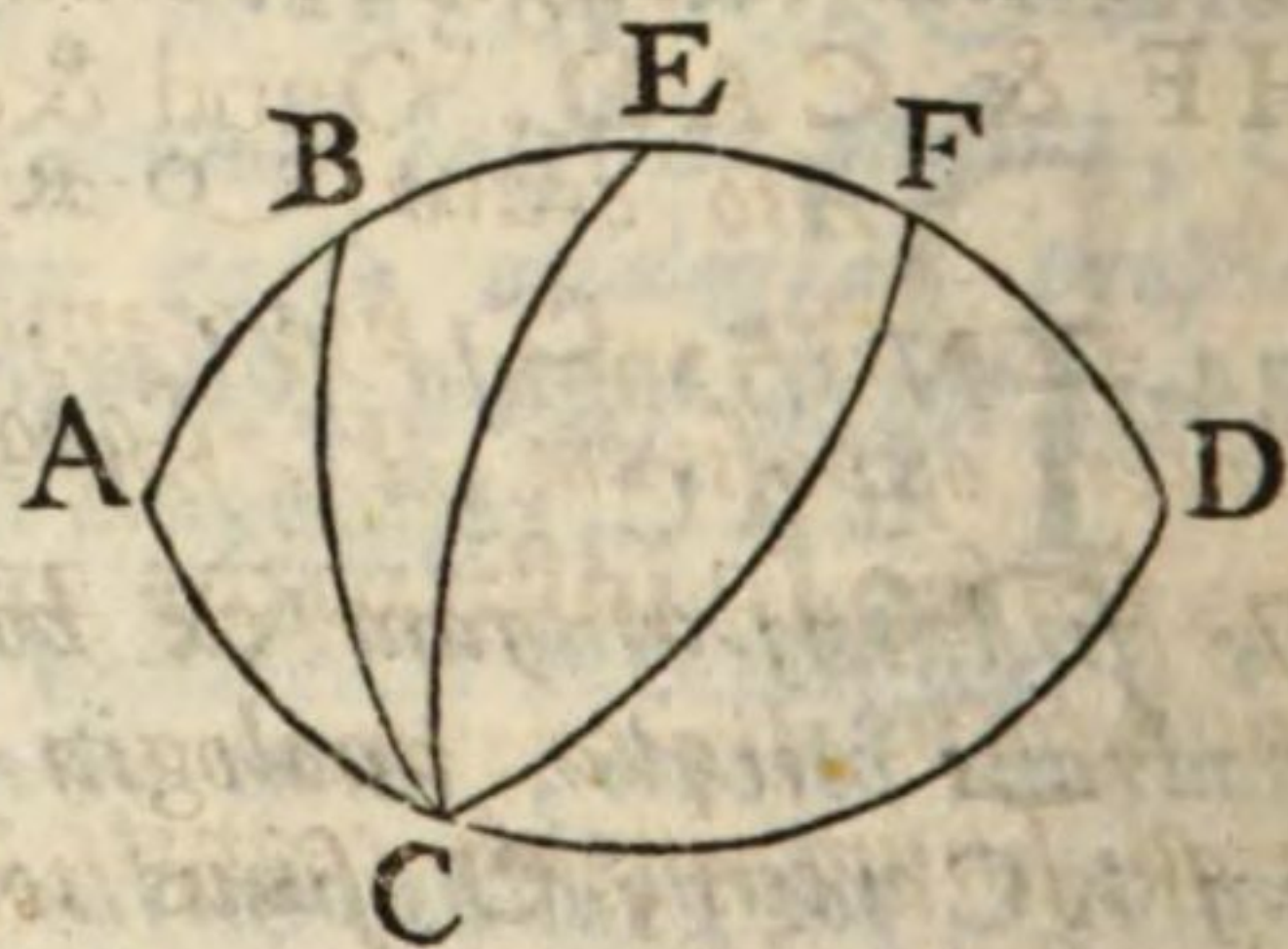
gulum rectum EAC ; & consequenter latus AC est mensura anguli AEC (*n.* 309.). Quod erat &c.

THEOREMA IV.

335. **E**T vicissim, si in eodem triangulo latus unum, minus, aut majus quadrante circuli, contineat totidem gradus, quot angulus oppositus, latus alterum erit quadrans circuli.

Demonstratio. Esto triangulum AEC , in quo latus AC sit totidem graduum, quot graduum est angulus oppositus AEC : Dico latus alterum AE esse non posse neque minus, neque majus quadrante circuli. Nam I., si minus esset, & puta, AF esset quadrans, hypotenusa quoque CF esset quadrans (*n.* 282.); & consequenter latus AC esset totidem graduum, quot angulus oppositus AFC ; quare hic angulus AFC æquaretur primo AEC ; quod fieri non potest; nam, si isti duo anguli essent æquales, summa laterum CE , CF trianguli ECF , æquaretur semicircumferentiæ (*n.* 272.); quamobrem sicuti latus CF est quadrans circuli ex sequela hypothese, latus alterum CE erit quoque quadrans. Atqui hypotenusa CE trianguli rectanguli EAC , non est quadrans circuli per suppositionem; alioquin latus AE , contra hypothese, esset similiter quadrans (*n.* 284.); constat itaque propositum.

Eodem modo demonstrabitur, latus AE non esse majus quadrante, si per extremitatem B arcus AB , qui ponatur æqualis quadranti, ducatur arcus CB . Quod erat reliquum.



Scholion.

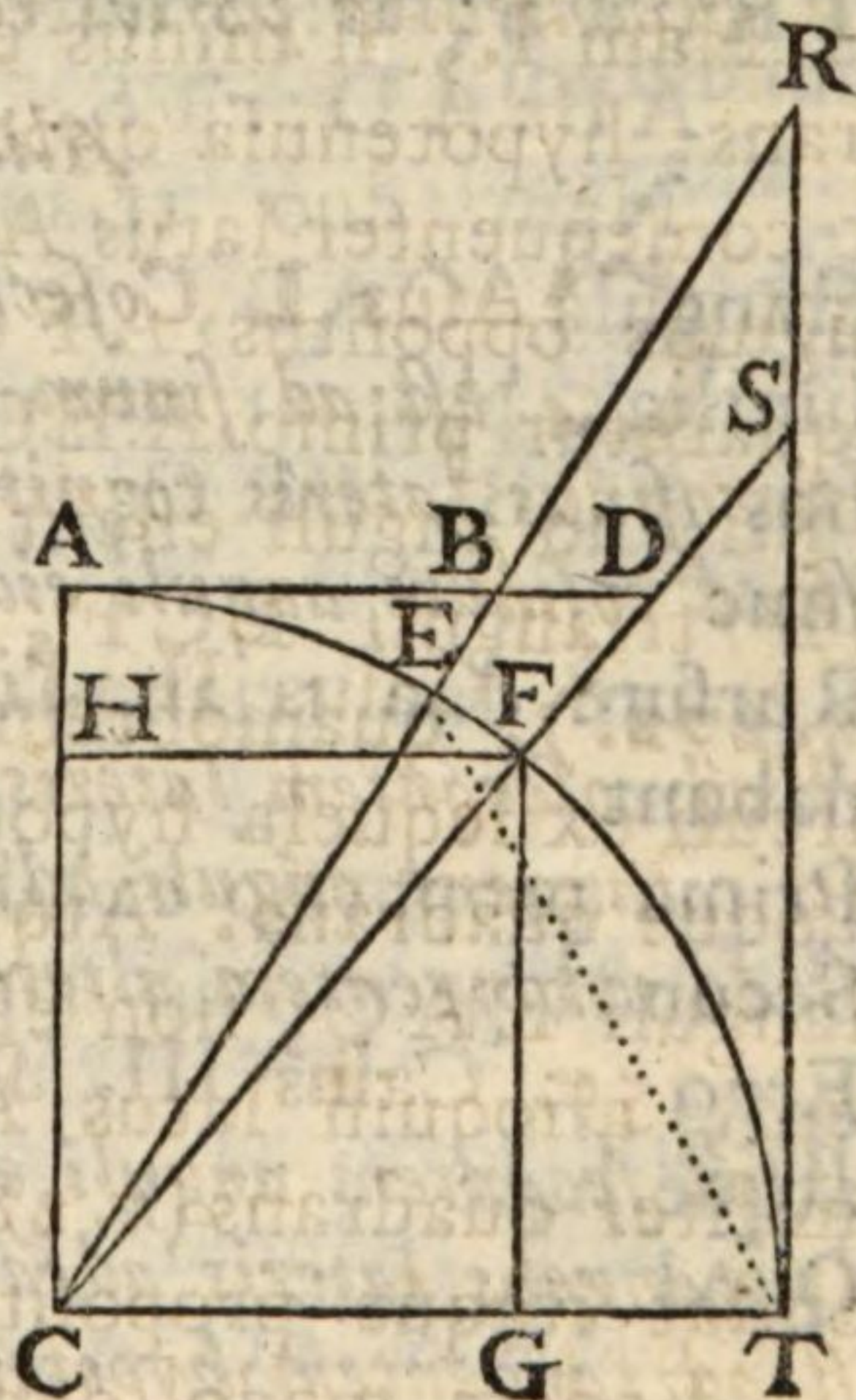
Constabit deinceps n. 350., triangulum rectangulum, cujus latus unum majus, minusve quadrante circuli, sit mensura anguli oppositi, reliquas quatuor partes habere singulas graduum 90.

Hæc autem duo, quæ subdo, Theoremata, usui sunt, ut deducantur aliquæ analogiæ ex iis, quæ aliunde jam demonstratæ sunt.

THEOREMA V.

336. **R**adius, seu sinus totus, est medius proportionalis inter sinum arcus, & cosecantem ejusdem arcus, si-ve secantem sui complementi.

Demonstratio. Assumatur arcus FT, cujus complementum est AF: Dico radium, seu sinus totum, esse medium proportionalem inter FG sinum arcus FT, & CD secantem complementi AF. Nam $FG = CH$; jam verò $CH:CA::CF$, seu $CA:CD$, propter similia triangula rectangula CHF & CAD. Quod &c.



Scholion.

337. **C**onstat jam ex hoc Theoremate, quodd, si in aliqua analogia duo termini unius rationis sint sinus arcus, & sinus totus, substitui iisdem poterit sinus totus, & cosecans ejusdem arcus.

THEOREMA VI.

338. **T** Angentes duorum arcuum, vel duorum angulorum sunt inter se reciproci, ut eorum cotangentes, sive reciproci, uti tangentes suorum complementorum.

Demonstratio. Sint duo arcus AE , AF , quorum tangentes sint AB , AD . Complementa horum arcuum sunt TE , TF , quorum tangentes sunt TR , TS ; Dico autem

$$AB:AD::TS:TR.$$

Nam duo triangula rectangula CAB , RTC sunt similia, propter angulos alternos ACB , TRC ;

hinc

$$AB:CT::CA:TR.$$

Rursum duo triangula CAD , STC pariter similia, dabunt

$$AD:CT::CA:TS.$$

Prima proportio exhibet

$$AB \times TR = CT \times CA;$$

Secunda proportio dat

$$AD \times TS = CT \times CA.$$

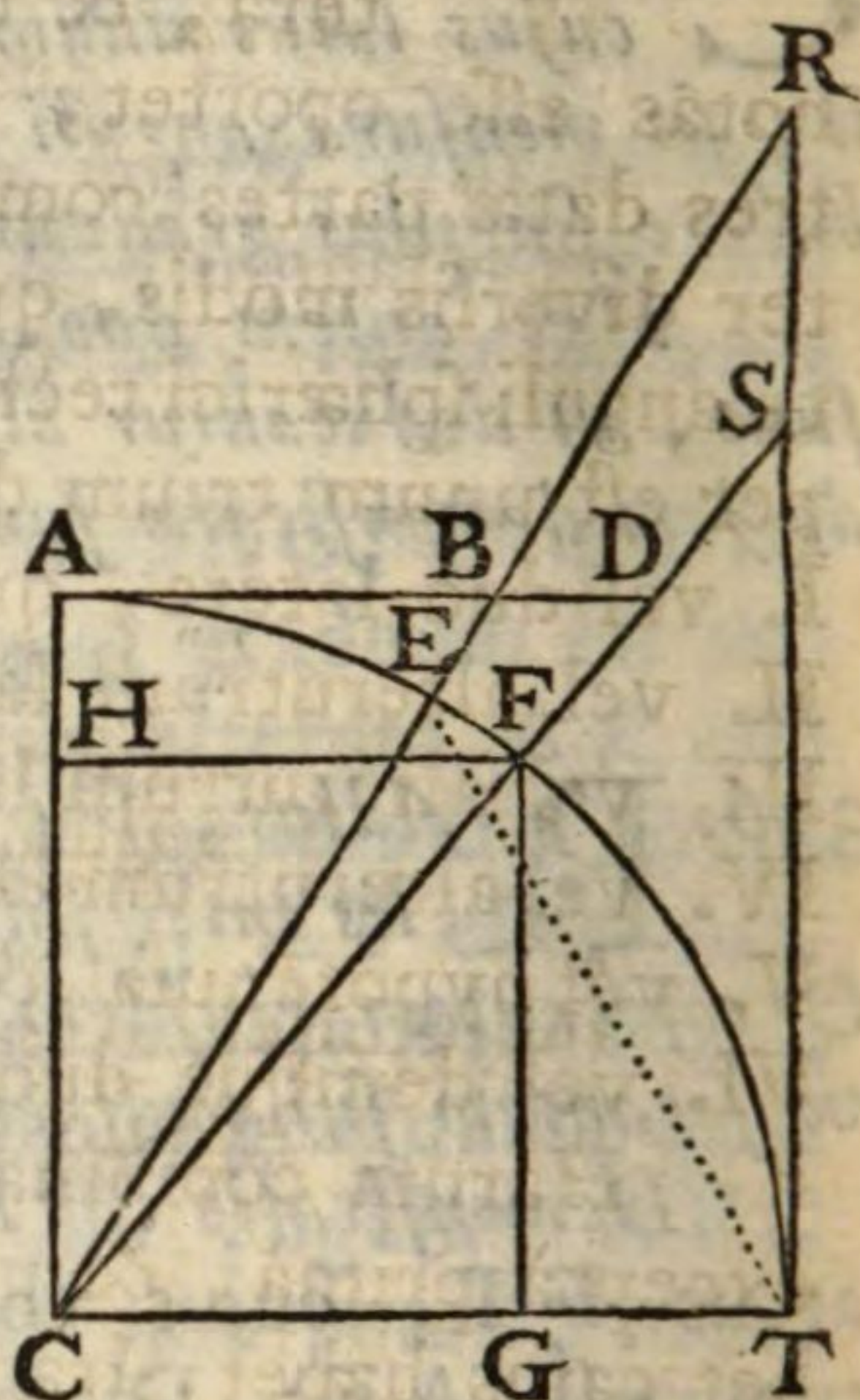
Ergo

$$AB \times TR = AD \times TS;$$

atque hinc

$$AB:AD::TS:TR.$$

Quod erat &c.



Scholion.

339. **S**I quando in aliqua analogia duo termini unius rationis sint duæ tangentes, substitui poterunt bisce terminis cotangentes, seu tangentes complementorum, quæ sumantur in ordine inverso.

Analysis Trianguli sphærici rectanguli.

340. **T**riangulum omne sex habet partes, tria latera, & tres angulos; harum partium tres notas esse oportet, ut reliquæ inveniantur. Verum tres datæ partes combinari possunt inter se sex pariter diversis modis, quos explicare aggredimur respectu trianguli sphærici rectanguli, in quo angulus rectus semper est unum trium datorum; duæ reliquæ partes erunt
 I. vel duo latera, quæ angulum rectum continent;
 II. vel alterutrum laterum, & hypotenusa;
 III. vel alterutrum laterum, & angulus adjacens;
 IV. vel alterutrum laterum, & angulus eidem oppositus;
 V. vel hypotenusa, & alteruter angulorum adjacentium;
 VI. vel denique duo anguli adjacentes hypotenusæ.

Harum combinationum quælibet tres habet casus, exceptâ primâ, & ultimâ, quæ duos dumtaxat quælibet casus habet. Itaque resolutio trianguli sphærici rectanguli sexdecim casus complectitur; quos omnes recenseam, & demonstrabo.

P R O B L E M A I.

341. **D**atis duobus cruribus, invenire I. duos angulos iisdem oppositos, II. hypotenusam.

Casus I. Ecce tibi analogiam, ut inveniatur alteruter angulorum adjacentium hypotenusæ; quæ est inversa illius, quam explicavimus n. 312. Fiat:

Ut sinus lateris adjacentis angulo quæsito, ad sinum totum;

Ita tangens alterius lateris, ad tangentem hujus anguli;

qui erit in eadem specie lateris oppositi (n. 274.).

Casus II. Ut invenias hypotenusam, usui erit analogia n. 316. Sinus totus est ad cosinum unius duorum laterum;

Ut

*Utî cosinus alterius lateris
est ad cosinum hypotenusæ;*

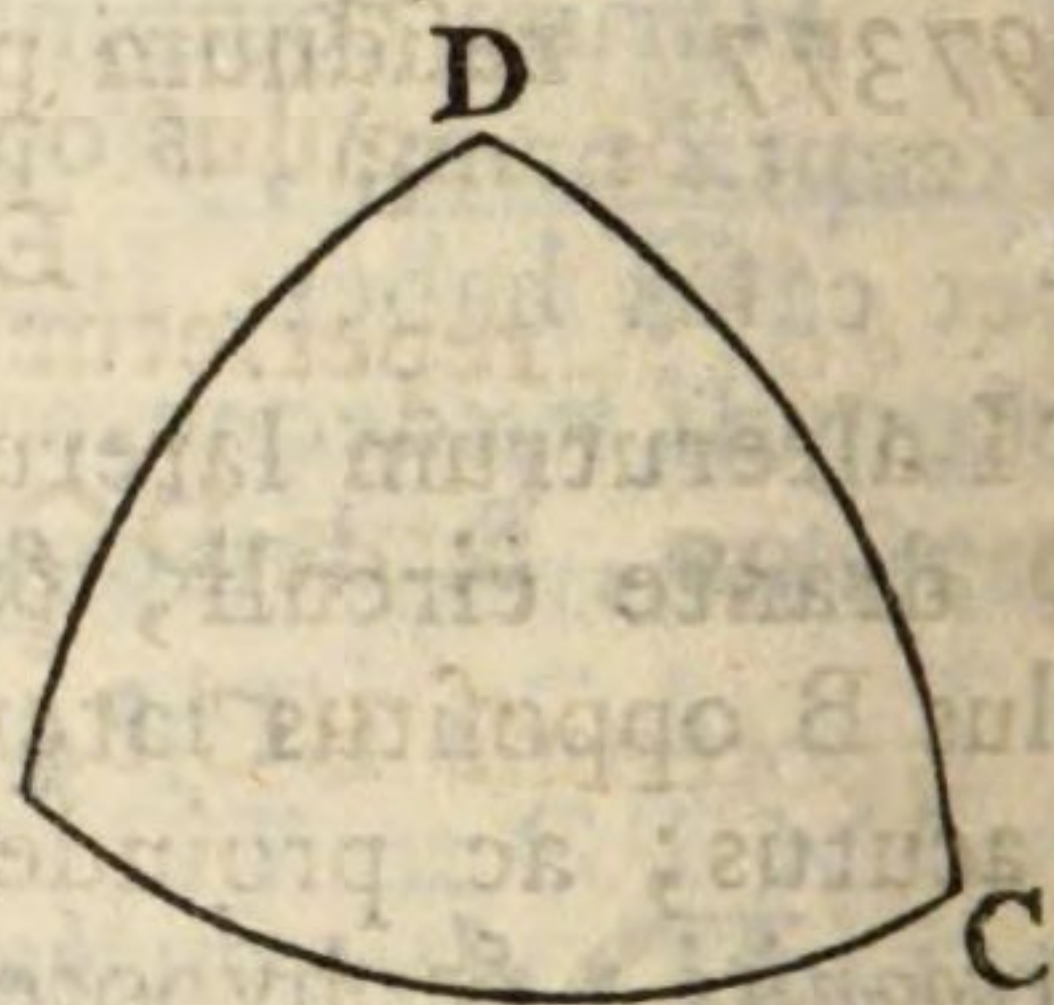
quæ erit major, minorve quadrante circuli, prout duo latera fuerint ejusdem, aut diversæ speciei (n. 279.). Quod si alterutrum duorum laterum, aut duo latera æquarent singula quadrantem circuli, hypotenusæ esset pariter quadrans circuli (n. 280. 282.).

Scholion.

PRo logarithmicis autem operationibus in memoriam sunt revocanda præcepta generalia, tradita in secunda parte hujus Operis.

Exemplum I.

ESto triangulum BDC, rectangulum in D, cujus
latus unum DB fit $66^{\circ} 24'$,
& latus alterum DC,
 $76^{\circ} 24'$. Invenietur ope sequentis calculi angulus B
 $= 77^{\circ} 30'$, & hypotenusæ BC
 $= 84^{\circ} 36'$.



Inventio anguli B.

Substitutis logarithmis in prima analogia, fiat
1000000 logarithmus sinus totius;

1061632 log. tangentis lateris oppositi DC $76^{\circ} 24'$.
2061632 summa.

996207 logar. subd. lateris adjacentis DB $66^{\circ} 24'$.

1065425 residuum pro log. tang. $77^{\circ} 30'$ anguli B.

Similiter ex analogia Casus I. reperietur angulus
C $67^{\circ} 0'$, seu potius $66^{\circ} 59\frac{1}{2}'$.

Ratio

Ratio totius operationis pendet ex theoria logarithmorum. Nam in adducto exemplo, logarithmi substituti tribus primis terminis prioris analogiæ, sunt 996207, 1000000, 1061632; addantur duo medii; & a summa subducatur primus: residuum dabit logarithmum tangentis anguli quæsitæ B.

Inventio hypotenusæ BC.

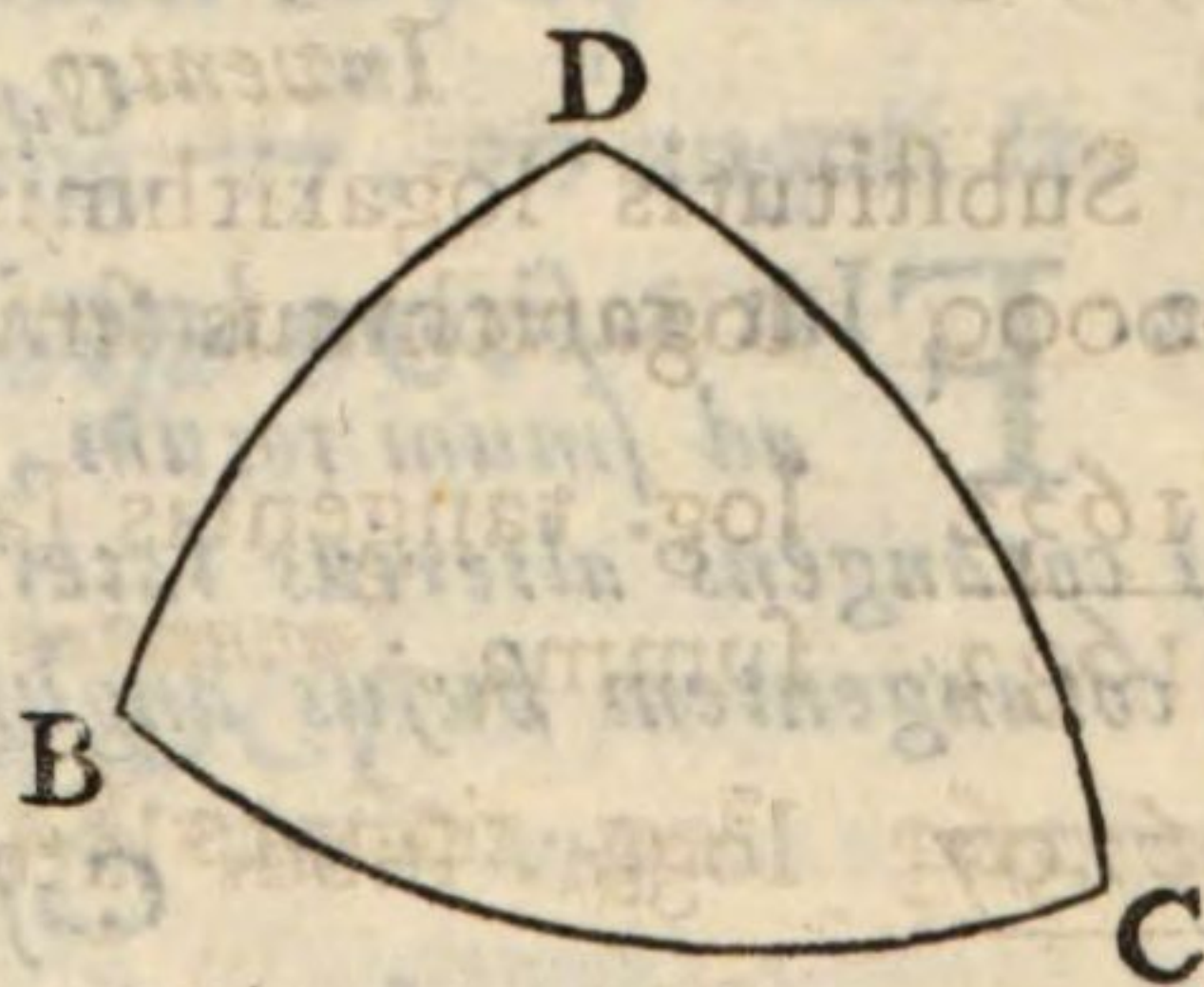
Substitutis logar. in secunda analogia, accipiatur

960244	logarithmus cos. DB 66°, 24';
937133	log. cos. DC 76°, 24'.
1897377	summa.
1000000	log. subducendus sinus totius.
897377	residuum pro log. cos. hyp. BC 84°, 36'.

Exemplum II.

SI alterutrum laterum, puta, DB, minus sit quadrante circuli, & latus alterum DC majus, angulus B oppositus lateri DC, erit obtusus, & angulus C acutus; ac proinde *duo anguli quæsitæ, erunt specie præcogniti*; & hypotenusa BC erit pariter major qua-

drante. Ponatur DB 75°, 34', & DC 117°, 19', cujus supplementum est 62°, 41'; invenietur angulus B = 116°, 34', & hypotenusa BC = 96°, 34'; cujus inventionis calculum subijcio.



Inventio anguli B.

1000000 logarithmus sinus totius.

1028692 log. tang. 62° , $41'$ = suppl. ipsius DC.2028692 summa.998607 log. subducendus lateris DB 75° , $34'$.1030085 residuum pro logarithmo tangentis 63° , $26'$;
cujus supplementum 116° , $34'$ = angulo quæsito B.*Inventio hypotenusæ BC.*939664 log. cos. 75° , $34'$.966173 log. cos. 62° , $41'$ = suppl. ipsius DC.1905837 summa.1000000 log. subducendus sinus totius.905837 residuum pro log. cos. 83° , $26'$;
cujus supplementum 96° , $34'$ = hyp. quæsita BC.Similiter ex prima analogia invenietur angulus C 77° , $7'$.*Aliæ analogiæ pro resolutione I. Problematis.**Casus I.*

342. **F**iat cosecans lateris adjacentis angulo quæsito,
ad sinum totum,
Ut cotangens alterius lateris,
ad cotangentem hujus anguli.

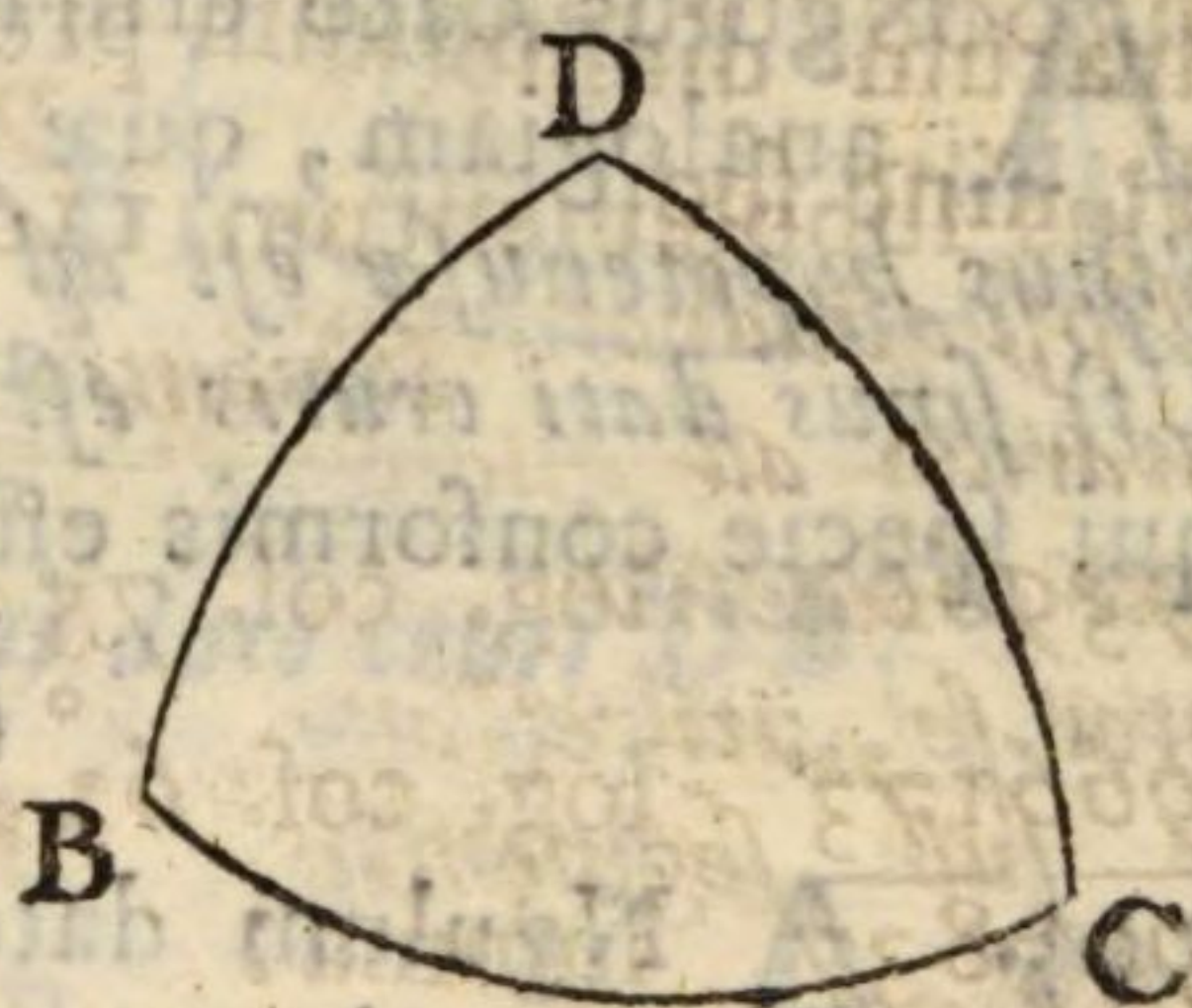
Casus II.

Fiat secans unius duorum laterum,
ad sinum totum,
Ut cosinus alterius lateris,
ad cosinum hypotenusæ.

Hæ duæ analogiæ consequuntur ex præcedentibus. Nam partim ex n. 337., partim ex n. 339. deducuntur. Prima duarum ab utroque articulo inferitur; secunda dumtaxat a n. 339.

Omnes secundæ analogiæ quinque aliorum Problematum ex iisdem fontibus inferuntur.

Jam verò hæ duæ analogiæ applicentur primo exemplo, quo nuper usi fuimus; quod deinceps semper præstabimus in singulis casibus, eo consilio, ut, si quis error fortasse irreperit in calculum adhibitâ unâ analogiâ, facilius deprehendi possit adhibitâ alterâ analogiâ.



Inventio anguli B.

1000000	log. sinus totius.
<u>938368</u>	log. cotang. $76^{\circ}, 24'$ DC.
1938368	summa.
<u>1003793</u>	log. subducendus cosec. $66^{\circ}, 24'$ DB.
934575	resid. pro log. cotang. $77, 30'$ anguli B.

Inventio hypotenusæ BC.

1000000	log. sinus totius.
<u>937133</u>	log. cosinus $76^{\circ}, 24'$ DC.
1937133	summa.
<u>1039756</u>	log. subd. secantis $66^{\circ}, 24'$ DB.
897377	residuum pro log. cosinus $84, 36'$ BC.

P R O B L E M A II.

343. **D** Atà hypotenusà, & altero crurum, quærere
I. angulum dato cruri oppositum, II. angulum
dato cruri, & hypotenusæ adjacentem, III. crus reliquum.

Casus I.

A Ngulus dato cruri oppositus, invenietur per hanc
analogiam, quæ est inversa analogiæ n. 304.

Sinus hypotenusæ est ad sinum totum;

Utì sinus dati cruris est ad sinum anguli huic oppositi;
qui specie conformis esse debet dato cruri (n. 274.).

Casus II.

344. **A** Ngulum dato cruri adjacentem, dabit pro-
portio n. 321., substituta dumtaxat secun-
da ratione loco primæ.

Cotangens dati cruris est ad cotangentem hypotenusæ;

Utì sinus totus est ad cosinum anguli quæsiti;

cujus speciem determinabit species hypotenusæ, & la-
teris cogniti; nimirum, si hypotenusa sit minor qua-
drante circuli, angulus quæsitus in eadem est specie la-
teris cogniti; verùm, si hypotenusa est major quadran-
te, angulus quæsitus differt specie a latere cognito
(n. 294.).

Casus III.

345. **I** Nvenietur latus alterum anguli recti per inver-
sam analogiam n. 316.

Cosinus dati cruris est ad sinum totum;

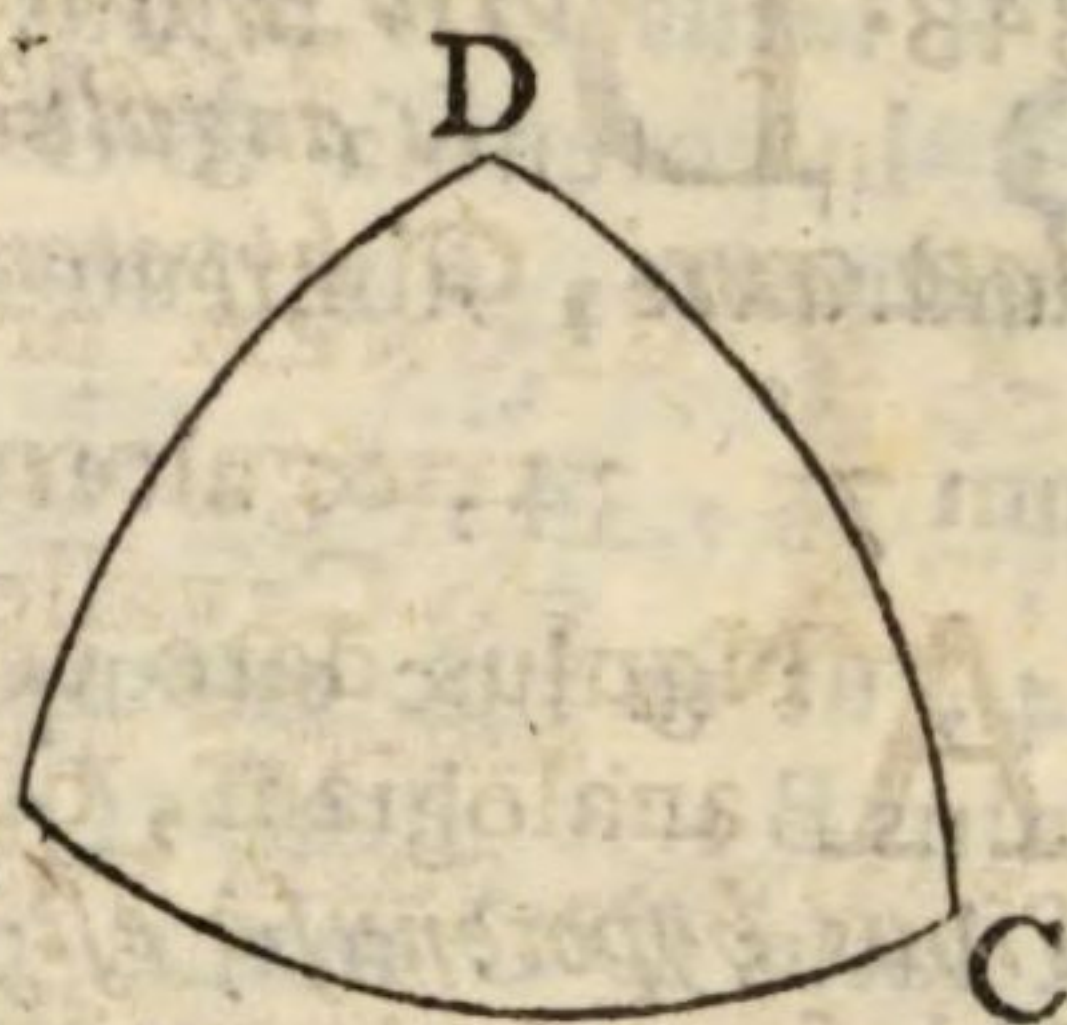
Utì cosinus hypotenusæ est ad cosinum alterius lateris;

quod erit in eadem specie dati cruris, si hypotenusa sit
minor quadrante; sin autem eadem sit major, latus
quæsitum in diversa erit specie a latere cognito (n. 283.).

Exem-

Exemplum I.

Esto triangulum BDC, in quo latus DB fit $66^{\circ}, 24'$, & hypotenuſa BC $84^{\circ}, 36'$: inuenietur angulus C $67^{\circ}, 0'$, ſeu potiùs $66^{\circ}, 59\frac{1}{2}'$; angulus B $77^{\circ}, 30'$; & latus DC $76^{\circ}, 24'$.



Inuentio anguli C, oppoſiti dato cruri DB.

1000000 log. ſin. totalis.

996207 log. ſin. $66^{\circ}, 24'$ DB.

1996207 ſumma.

999807 log. ſubducendus ſinus $84^{\circ}, 36'$ BC.

996400 reſid. pro log. ſinus $66^{\circ}, 59\frac{1}{2}'$ ang. quæſiti C.

Inuentio anguli B, adjacentis dato lateri DB.

897556 log. cotang. $84^{\circ}, 36'$ BC.

1000000 log. ſinus totius.

1897556 ſumma.

964037 log. ſubtrahendus cotang. $66^{\circ}, 24'$ DB.

933519 reſiduum pro log. cof. $77^{\circ}, 30'$ anguli B.

Inuentio lateris DC.

1000000 log. ſinus totalis.

897363 log. coſinus $84^{\circ}, 36'$ BC.

1897363 ſumma.

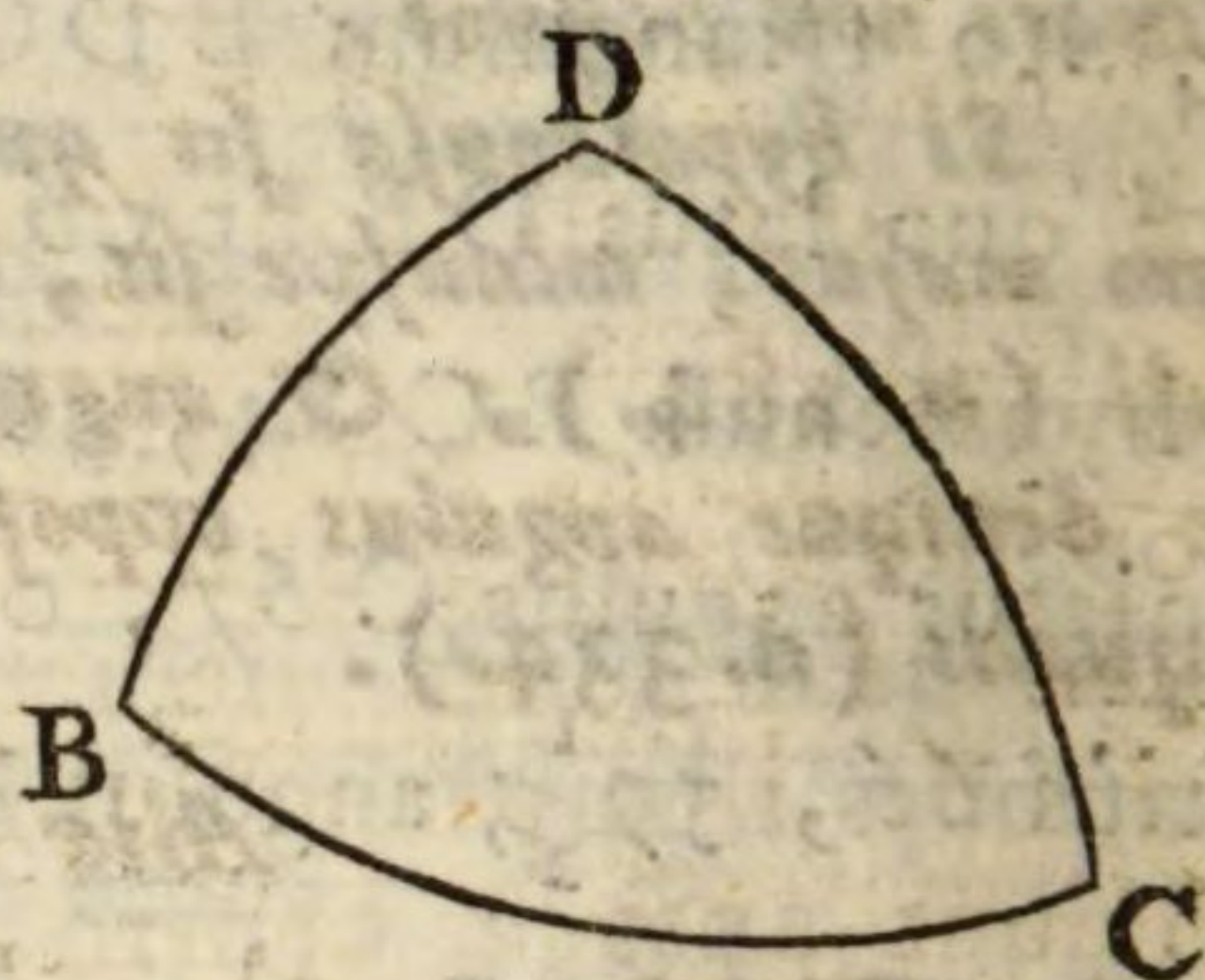
960244 log. ſubtrahendus coſinus $66^{\circ}, 24'$ DB.

937119 reſiduum pro log. coſinus $76^{\circ}, 24'$ DC.

Exem-

Exemplum II.

SI latus DB minus sit, & hypotenusa BC major quadrante, nimirum, alterum 75° , $34'$, & alterum 96° , $34'$, ut in hoc exemplo, angulus B erit obtusus (n. 283.); & latus DC majus 90° gradibus.

*Inventio anguli B.*

906113	log. cotang. 83° , $26'$ suppl. ipsius BC.
1000000	log. sinus totius.
1906113	summa.
941057	log. subducendus cotang. 75° , $34'$ DB.
965056	resid. pro log. cos. 63° , $26'$ sup. 116° , $34'$ B.

Inventio lateris DC.

1000000	log. sinus totius.
905827	log. cosinus 83° , $26'$ suppl. ipsius BC.
1905827	summa.
939664	log. subducendus cos. 75° , $34'$ DB.
966163	resid. pro log. cos. 62° , $41'$ suppl. 117° , $19'$ DC.

Invenietur quoque angulus C 77° , $7'$.

Scholion.

SI latus cognitum est quadrans circuli, hypotenusa erit quoque quadrans circuli (n. 282.); & in hoc casu angulus oppositus lateri cognito, erit rectus (n. 274.).

Quod

Quod attinet ad latus alterum, & angulum huic oppositum, erunt æqualia inter se (n. 334.); verum determinari non possunt.

Si hypotenusa sit quadrans circuli, & latus cognitum majus, minusve sit, latus alterum erit quadrans circuli (n. 284.); & angulus oppositus, erit grad. 90; ac denique angulus oppositus lateri cognito, erit eidem æqualis (n. 334.).

Aliæ analogiæ.

346. **C**asus I. Sinus totus
est ad cosecantem hypotenusæ;

Uti sinus lateris cogniti
est ad sinum anguli oppositi eidem lateri.

347. Casus II. Tangens lateris cogniti
est ad tangentem hypotenusæ;

Uti sinus totus
est ad secantem anguli quæsitæ.

348. Casus III. Sinus totus
est ad secantem lateris cogniti;

Uti cosinus hypotenusæ
est ad cosinum lateris quæsitæ.

A P P E N D I X.

349. **A**ntequam progrediar, juvabit Tironibus declarare plerasque Observationes, quæ viam multò planiorem aperient resolutioni eorum Problematum, quæ ad triangula rectangula pertinent.

O B S E R V A T I O I.

SI quando triangulum sphæricum rectangulum, præter angulum rectum, habeat quampiam partem aliam, quæ sit 90 graduum, nimirum, vel unum laterum, vel hypotenusam, vel angulum adjacentem hypotenusæ; in hoc casu idem triangulum continebit quatuor partes, quarum singulæ erunt 90 graduum.

T. III.

S

I. Si

I. Si unum duorum laterum sit grad. 90, hypotenusa erit quoque 90 grad. (n. 282.); ac præterea angulus oppositus lateri 90 graduum, erit in eadem specie ejusdem lateris (n. 274.); & per hyp., angulus oppositus hypotenusæ, rectus est.

II. Si hypotenusa sit quadrans circuli, unum saltem duorum laterum erit similiter quadrans (n. 284.); ac proinde hic casus recidit in primum.

III. Si denique, alteruter angulorum hypotenusæ adjacentium, sit rectus, latus oppositum erit ejusdem speciei (n. 274.); & rursus hic casus devolvitur in primum.

OBSERVATIO II.

350. **I**N triangulo rectangulo, si, præter angulum rectum, duæ aliæ partes, hoc est, latus unum, & angulus eidem oppositus, contineant eundem numerum graduum; quamvis hæ partes non sint 90 graduum, deduci hinc poterit, in eodem triangulo haberi quatuor partes grad. 90.

Ratio est, quia in hoc casu necesse est, latus alterum esse quadrantem circuli (n. 335.).

Corollarium.

Perspiciuum est in hoc casu, nullà opus esse analogiâ, ut inveniantur reliquæ partes, quoniam singulæ sunt 90 graduum.

OBSERVATIO III.

351. **S**I duarum datarum partium, præter angulum rectum, una dumtaxat sit grad. 90, reliquæ omnes partes trianguli rectanguli erunt cognitæ, & determinatæ.

Nam hæc pars data grad. 90, vel est unum duorum laterum, vel hypotenusa, vel angulus adjacens hypotenusæ.

I. Si

I. Si est unum laterum, hypotenusæ erit quadrans circuli; & angulus huic lateri oppositus, erit 90 grad. Aliunde per hyp. cognoscitur pars altera, quæ est duarum æqualium una. Omnia itaque sunt cognita.

II. Si data pars grad. 90, sit hypotenusæ, demonstrabitur eodem modo, unum laterum, & angulum huic oppositum, esse 90 graduum; ita ut latus hoc, & angulus determinari possint; nam per hypothesim cognoscitur una duarum reliquarum partium, quæ remanent; hæ duæ partes sunt latus, & angulus huic oppositus, quæ inter se æquantur (n. 334.).

III. Si pars cognita 90 graduum, est unus angulorum basi adjacentium, latus oppositum erit quadrans circuli (n. 274.); ac similiter hypotenusæ (n. 282.). Præterea per hyp. datur una duarum partium, quæ residuæ sunt, nimirum, latus, & angulus oppositus, quæ invicem æquantur. Quamobrem in hisce tribus casibus reliquæ partes omnes trianguli sunt determinatæ, & cognitæ.

OBSERVATIO IV.

352. **S**I duæ partes cognitæ, præter angulum rectum, sint singulæ 90 graduum, sex combinationes contingere possunt, in quibus inutiles planè sunt analogiæ, ut tres reliquæ partes determinantur.

Nam duæ partes datæ esse possunt

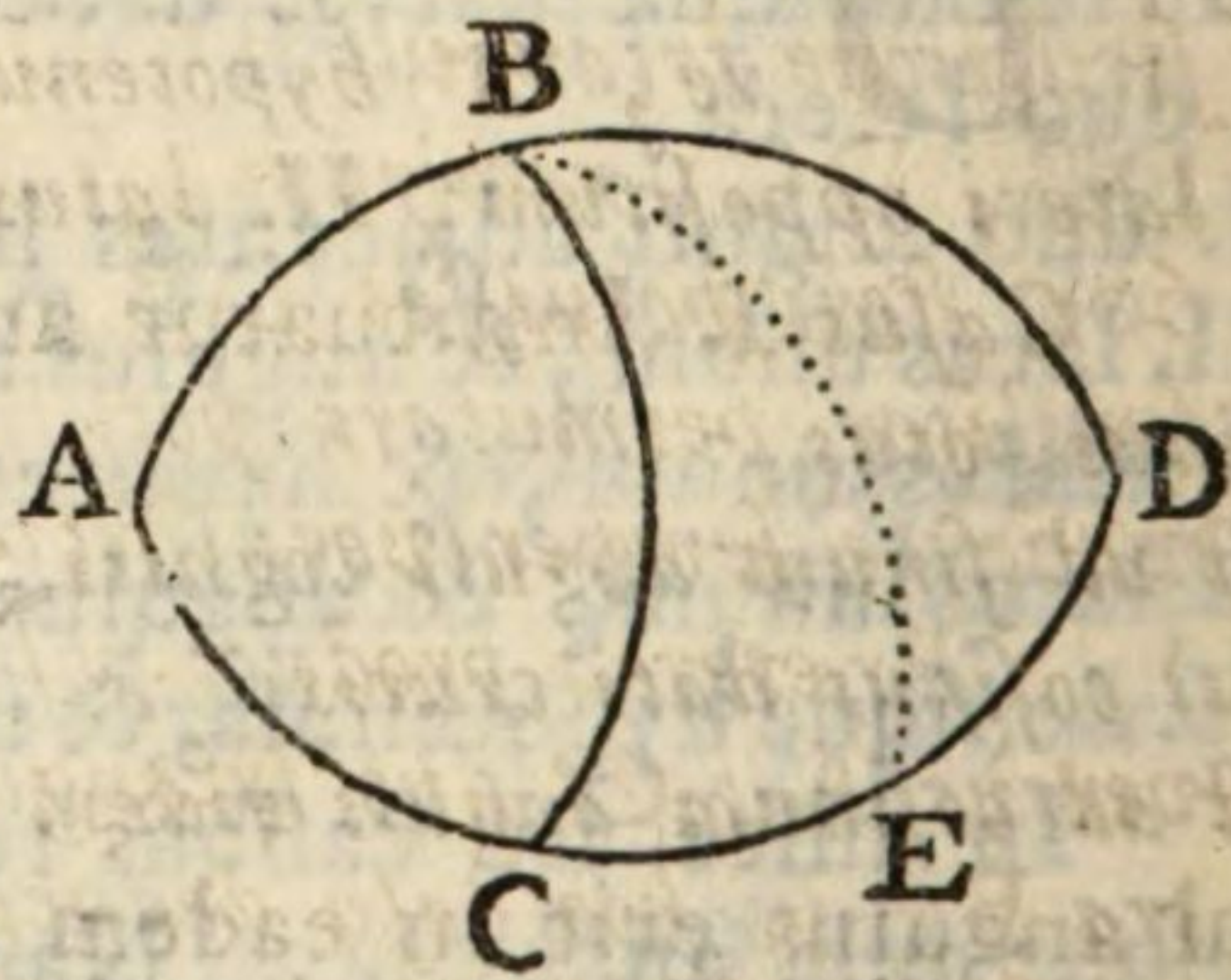
- I. duo latera,
- II. duo anguli adjacentes hypotenusæ,
- III. latus unum, & angulus adjacens eidem lateri & hyp.,
- IV. latus unum, & hypotenusæ,
- V. latus unum, & angulus huic oppositus,
- VI. denique hypotenusæ, & unus angulorum adjacentium.

In hisce sex casibus reliqua omnia determinantur absque ulla analogia. Nam in tribus primis erunt sex partes singulæ 90 graduum; puta, in primo casu, cum

duo latera sint 90 graduum, anguli oppositi sunt ejusdem speciei (*n.* 274.); ac præterea hypotenusa continet pariter 90 gradus (*n.* 280.); eademque ratio est in secundo, & tertio casu; nam id, quod supponitur, verum esse non potest, nisi duo latera sint singula 90 graduum.

Pro reliquis tribus casibus facile constabit quarta pars graduum 90. Nam in quarto casu hæc quarta pars quæsitæ, erit angulus oppositus lateri cognito; in quinto erit hypotenusa; & in sexto erit latus oppositum angulo cognito. Quamobrem analogiæ erunt prorsus inutiles, ut hæc quarta pars inveniat.

At erunt quoque inutiles, ut inveniantur duæ reliquæ partes inter se æquales. Ratio est, quia a quatuor primis partibus, quarum singulæ sunt grad. 90, determinari non poterunt duæ reliquæ; quæ possunt esse majores, aut minores, stantibus quatuor primis in eodem statu; uti constare poterit in adjecta figura, in qua, cum supponatur angulus A rectus, & latus AB 90 graduum, duæ hypotenusæ BC, BE sunt ambo æquales quadranti circuli, & perpendiculares arcui ACE (*n.* 230. 231. 232.); nam punctum E est polus hujus arcus (*n.* 232.); & consequenter in duobus triangulis BAC, BAE, rectangulis in A, quatuor partes primi sunt 90 graduum, hoc est, angulus A, latus AB, angulus oppositus C, & hypotenusa BC; perinde ac quatuor partes respectivæ secundi; quamvis duæ reliquæ partes primi, nimirum, latus AC, & angulus oppositus, sint minores reliquis duabus partibus, quæ respondent in secundo.



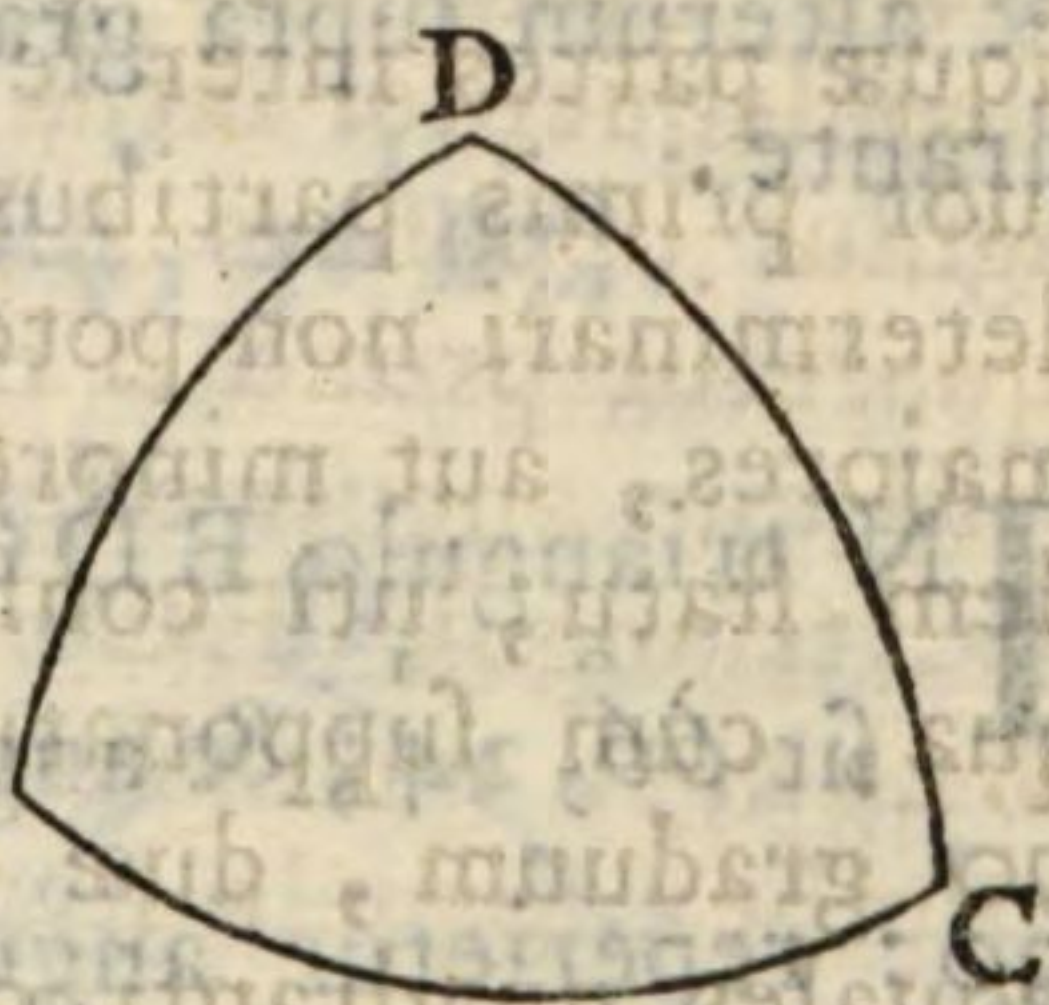
OBSERVATIO V.

353. **A** Nalogiæ non solum inutiles sunt in casu, in quo plures partes trianguli continent 90 gradus; verum etiam peræquè possent esse falsæ (n. 313.).

In triangulo BDC, rectangulo in D, latus DC fit quadrans circuli, & latus alterum DB fit minus gradibus 90. Si uti velis primâ analogiâ I. Problematis, ut inveniatur angulus B, ita dicendum esset: Sinus lateris DB est ad sinum totum;

Ut tangens lateris DC est ad tangentem anguli B.

Quod falsum est; nam duo termini primæ rationis sunt inæquales; & duo termini secundæ forent æquales, si existerent, quippe qui essent tangentes quantitatum æqualium; verum ejusmodi tangentes non aliter possent exprimi, quàm per numeros infinitos; nam arcus DC, & angulus B sunt singuli 90 graduum.



PROBLEMA III.

354. **D** Ato crure, & angulo intercepto ab eodem crure, & hypotenusâ, invenire I. angulum dato lateri oppositum, II. latus alterum, III. hypotenusam.

Casus I. Instituaturs analogia n. 315.

Sinus totus

est ad sinum anguli cogniti;

Ut cosinus dati cruris

est ad cosinum anguli eidem cruri oppositi;

qui angulus erit in eadem specie dati cruris (n. 274.).

355. Casus II. Usui erit analogia n. 312.

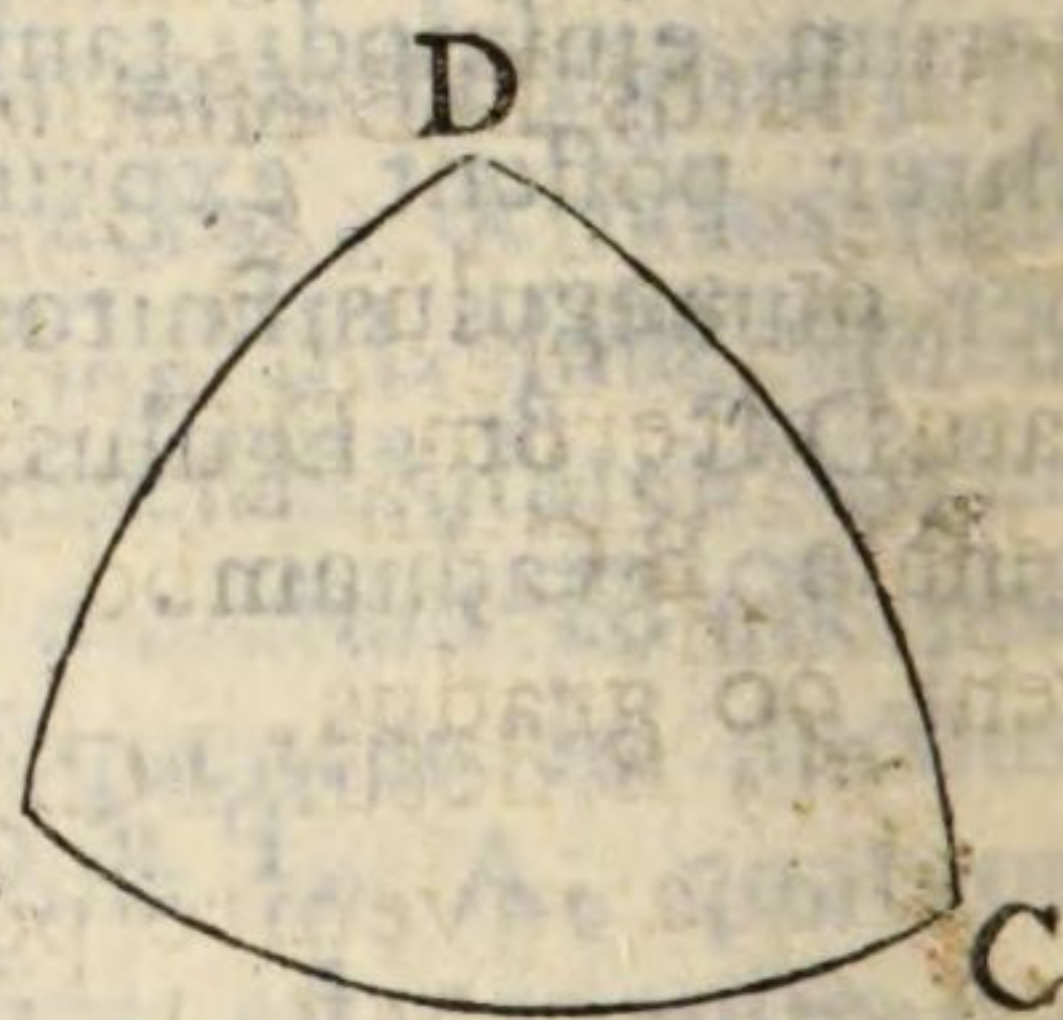
Sinus totus
est ad sinum lateris cogniti;
Ut tangens anguli adjacentis huic lateri,
est ad tangentem alterius lateris;
 quod erit specie conforme angulo opposito (n. 274.).

356. *Casus III.* Per analogiam n. 321.

Sinus totus
est ad cosinum anguli cogniti;
Ut cotangens lateris eidem angulo adjacentis,
est ad cotangentem hypotenusæ;
 quæ erit minor quadrante circuli, si duo data, latus,
 & angulus, vel ambo minora sint, vel ambo majora
 grad. 90. Quod si duorum datorum alterum sit infra,
 & alterum supra grad. 90, hypotenusa major erit qua-
 drante.

Exemplum I.

IN triangulo BDC latus DB
 fit $66^{\circ}, 24'$; & angulus B $77^{\circ}, 30'$: reperietur angulus C $66^{\circ}, 59\frac{1}{2}'$; & latus DC $76^{\circ}, 24'$; ac
 denique hypotenusa BC $84^{\circ}, 36'$.



Inventio anguli C, dato lateri DB oppositi.

998958	log. sinus $77^{\circ}, 30'$ B.
960244	log. cosinus $66^{\circ}, 24'$ DB.
1959202	summa.
1000000	log. subducendus sinus totius.
959202	resid. pro log. cos. $66^{\circ}, 59\frac{1}{2}'$ C.

In-

Inventio cruris DC, dato angulo oppositi.

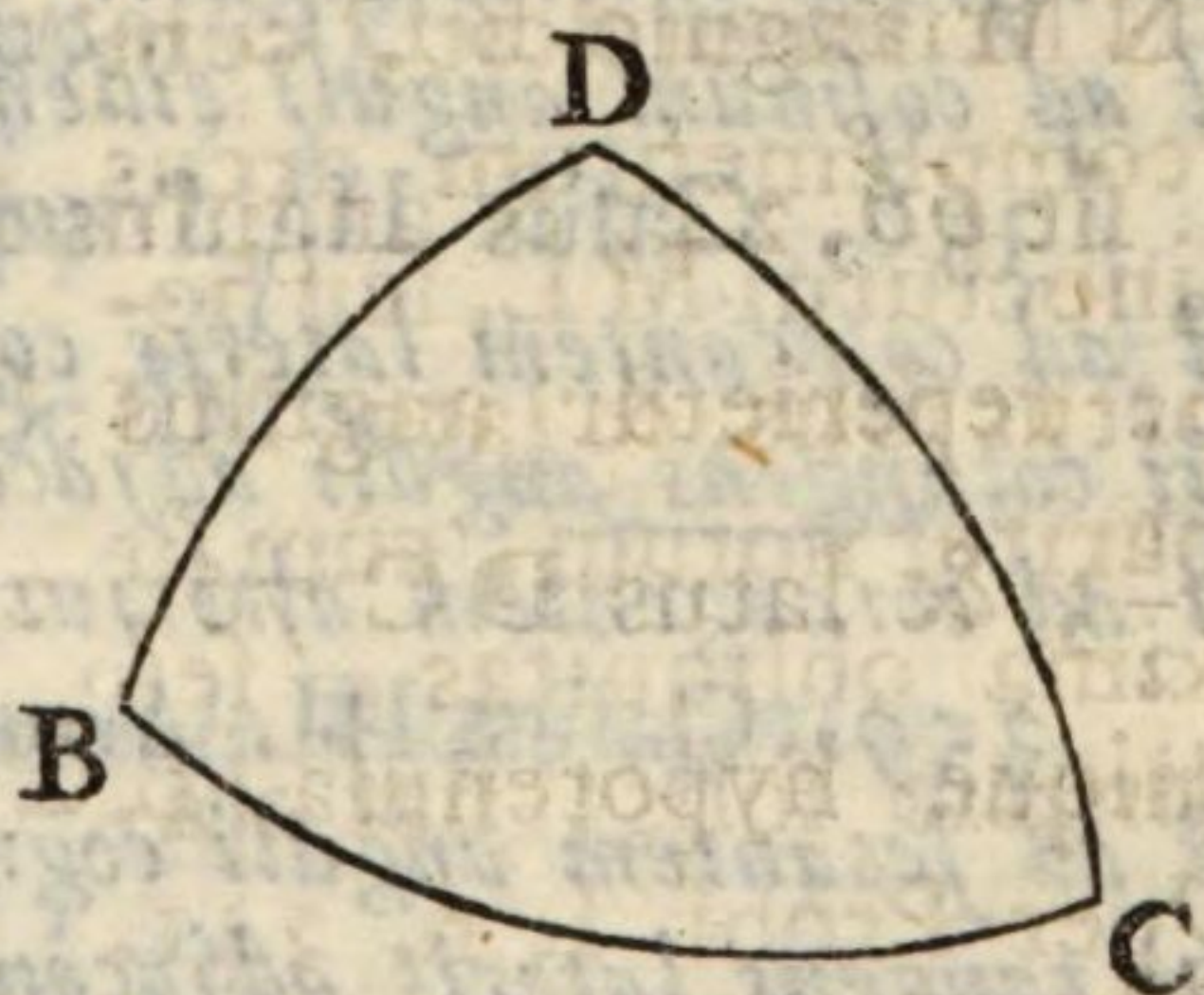
996207	log. sinus $66^{\circ}, 24'$ DC.
<u>1065424</u>	log. tang. $77^{\circ}, 30'$ B.
2061631	summa.
<u>1000000</u>	log. subd. sinus totius.
1061631	resid. pro log. tang. $76^{\circ}, 24'$ DC.

Inventio hypotenusæ BC.

933534	log. cosinus $77^{\circ}, 30'$ B.
<u>964037</u>	log. cotang. $66^{\circ}, 24'$ DB.
1897571	summa.
<u>1000000</u>	log. subd. sinus totius.
897571	resid. pro log. cotang. $84^{\circ}, 36'$ BC.

Exemplum II.

SI latus DB effet $75^{\circ}, 34'$,
& angulus B $116^{\circ}, 34'$;
latus alterum DC, & hypo-
tenusa BC, ambo excede-
rent 90 gradus.



Inventio lateris DC.

998607	log. sinus $75^{\circ}, 34'$ DB.
<u>1030100</u>	log. tang. $63^{\circ}, 26'$ suppl. B.
2028707	summa.
<u>1000000</u>	log. subd. sinus totius.
1028707	resid. pro log. tang. $62^{\circ}, 41'$ sup. $117^{\circ}, 19'$ DC.

Inventio hypotenusæ BC.

965054	log. cos. 63° , $26'$ suppl. B.
941057	log. cotang. 75° , $34'$ DB.
1906111	summa.
1000000	log. sinus totius.
906111	resid. pro log. cot. 83° , $26'$ sup. 96° , $34'$ BC.

Scholion.

SI duarum datarum partium alterutra sit 90° grad.,
invenientur partes reliquæ trianguli sine analogia.

Aliæ analogiæ.

357. **C**asus I. Cossecans anguli cogniti
est ad sinum totum ;

Ut cosinus lateris cogniti
est ad cosinum anguli eidem lateri oppositi.

358. Casus II. Sinus totus
est ad cossecantem lateris cogniti ;
Ut cotangens anguli adjacentis eidem lateri,
est ad cotangentem alterius lateris.

359. Casus III. Sinus totus
est ad secantem anguli cogniti ;
Ut tangens lateris adjacentis eidem angulo,
est ad tangentem hypotenusæ.

P R O B L E M A IV.

360. **D**atis, crure, & angulo eidem opposito, inve-
nire I. angulum interceptum inter latus co-
gnitum, & hypotenusam, II. latus alterum, III. hypo-
tenusam.

Oportet autem, ut partes quæsitæ specie sint præ-
cognitæ.

Casus

Casus I. Ex analogia n. 315. *Cosinus lateris dati est ad cosinum anguli oppositi;*

Ut sinus totus

est ad sinum anguli quæsitum.

361. Casus II. *Tangens anguli cogniti est ad tangentem lateris cogniti;*

Ut sinus totus

est ad sinum lateris quæsitum (n. 312.).

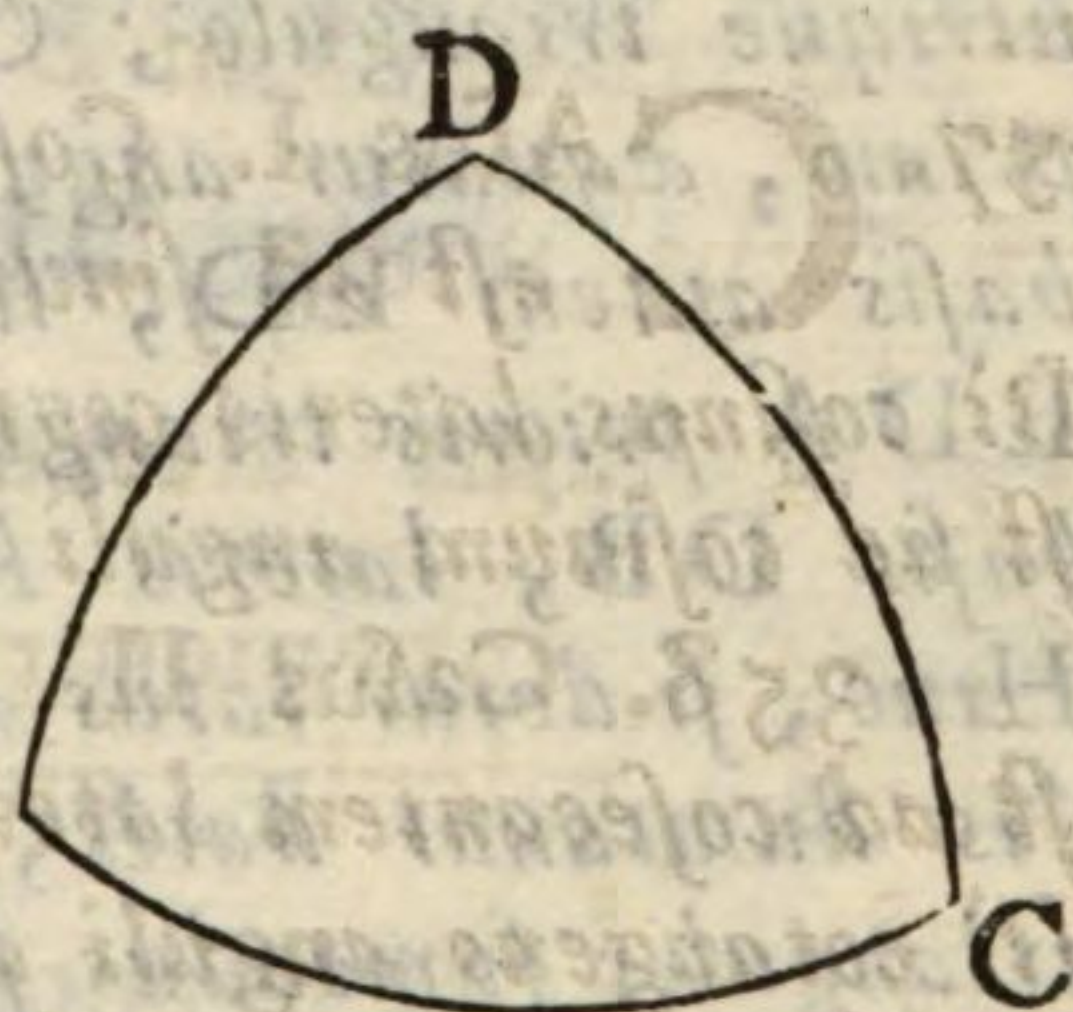
362. Casus III. *Sinus anguli cogniti est ad sinum lateris oppositi;*

Ut sinus totus

est ad sinum hypotenusæ (n. 304.).

Exemplum.

Sit latus cognitum DB 66° , $24'$, & angulus oppositus C 66° , $59\frac{1}{2}'$: reperietur angulus B 77° , $30'$, latus DC 76° , $24'$, & hypotenusæ BC 84° , $36'$, hoc B pacto.



Inventio anguli B, adjacentis lateri cognito.

959203 log. cosin. 66° , $59\frac{1}{2}'$ C.

1000000 log. sinus totalis.

1959203 summa.

960244 log. subd. cosin. 66° , $24'$ DB.

998959 resid. pro log. sinus 77° , $30'$ B.

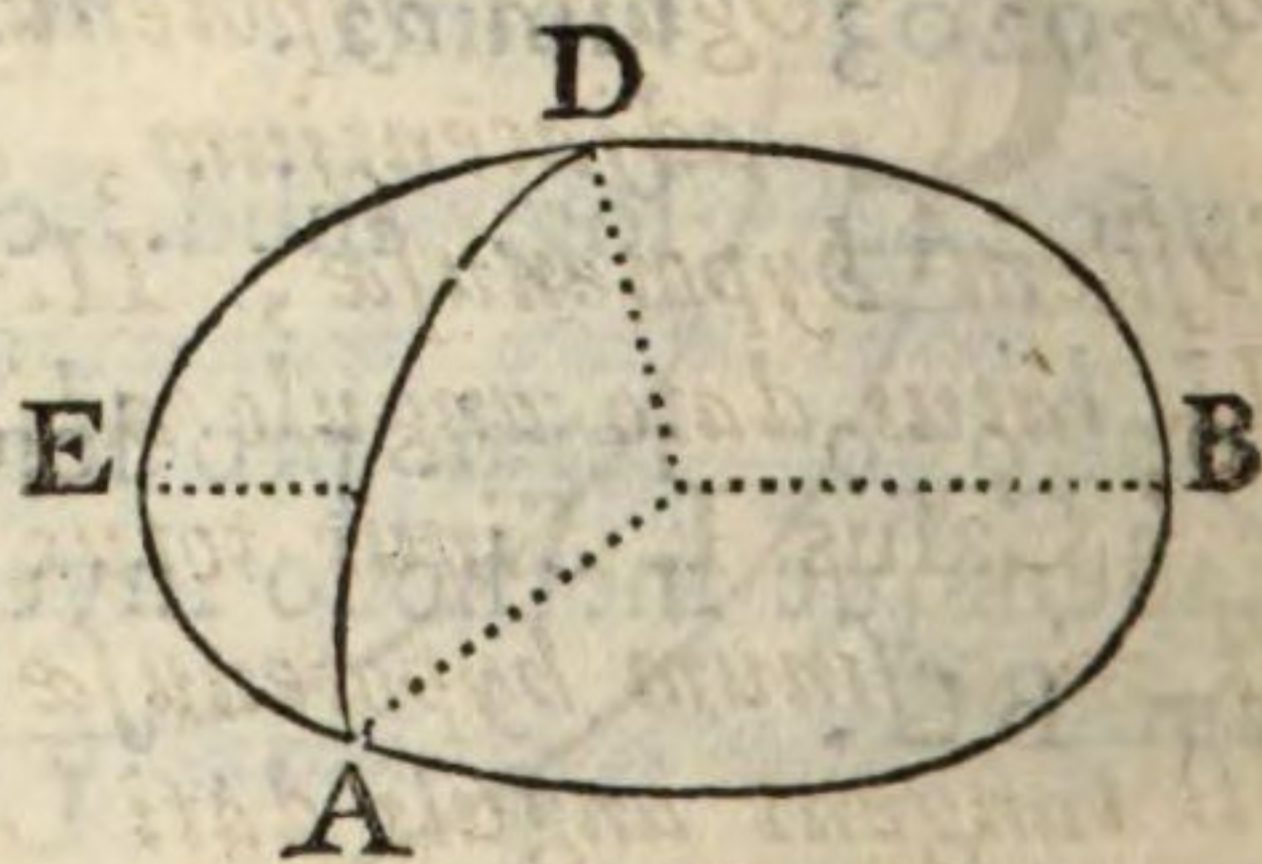
Eademque methodo invenies latus DC, & hypotenusam BC.

Monitum.

363. **I**N omnibus, quæ in analysi trianguli sphaerici re-
ctanguli contingunt, combinationibus datorum,
& quæstorum, partes datæ semper determinant speciem
incognitarum; excepta dumtaxat combinatione hujus Pro-
blematis, in quo detur alterum latus cum angulo opposito,
& quærat quodvis e reliquis tribus; is enim casus
semper ambiguus erit, & binas solutiones admittet; ac
quodvis e reliquis tribus esse poterit vel majus, vel mi-
nus quadrante, stantibus iisdem conditionibus Proble-
matis.

Quod ut planius intelligas, concipe duo triangula
EAD, BAD rectangula in A: latus AD est commune
utrique triangulo; & angulus AED, ipsi oppositus in
primo, æquatur angulo ABD, eidem opposito in secundo;
basis autem ED, latus alterum AE, & alter angulus
EDA prioris trianguli, sunt complementa ad duos rectos
basis DB, lateris AB, & anguli ADB posterioris.
Hinc, si detur latus AD, & angulus ipsi oppositus, ex
his dumtaxat datis, ambiguum erit, uter e binis illis
triangulis sumendus sit. Itaque in iis casibus, in quibus
detur latus cum angulo opposito, regulæ superius adductæ,
locum non habent, nec determinant speciem anguli, vel
arcus quæsitæ, quam determinant in cæteris omnibus.

Verum enimverò in quæstionibus contractis, quæ oc-
currunt in resolutione hujus Problematis, praxis ipsa
semper aliquid indicabit, quod
speciem partis quæsitæ deter-
minare possit; quare hæc inde-
terminatio, quæ auferri non
potest ab ipsis conditionibus
Problematis generatim sumpti,
nihil impediet, quo minus in
particularibus quæstionibus eæ-
dem analogiæ applicari possint.



Præ-

Præterea in Problemate proposito nosse etiam juvabit, quod, si duæ partes cognitæ essent inter se æquales, & ambo majores, vel minores gradibus 90, reliquæ partes essent singulæ graduum 90 (n. 335.). Contra verò, si hæ duæ partes cognitæ æquarent singulæ quadrantem, hypotenusæ esset graduum 90 (n. 281.); & duæ reliquæ partes essent æquales inter se (n. 334.).

Aliæ analogiæ.

364. **C**asus I. Sinus totus
est ad secantem lateris cogniti;

*Ut cosinus anguli oppositi
est ad sinum anguli quæsitæ.*

Hæc analogia deducitur ab alterna præcedentis in eodem casu.

365. Casus II. Cotangens anguli cogniti
est ad cotangentem lateris cogniti;

*Ut sinus totus
est ad coscantem lateris quæsitæ.*

366. Casus III. Sinus totus
est ad coscantem anguli cogniti;

*Ut sinus lateris eidem angulo oppositi,
est ad sinum hypotenusæ.*

Hæc pariter analogia deducitur ab alterna præcedentis pro eodem casu.

P R O B L E M A V.

367. **C**ognitâ hypotenusâ, & altero angulorum eidem adjacentium, quærere I. angulum reliquum ejusdem hypotenusæ, II. latus dato angulo oppositum, III. latus dato angulo adjacens.

Casus I. Sinus totus
est ad cosinum hypotenusæ;

Ut tangens anguli dati

est ad cotangentem anguli quæsitæ (n. 322.);

qui

qui est in eadem specie anguli cogniti, si hypotenusa minor sit quadrante; verum hi duo anguli different specie, si hypotenusa sit major quadrante (n. 288.).

368. Casus II. Sinus totus est ad sinum hypotenusæ;

Ut si sinus anguli cogniti est ad sinum lateris oppositi (n. 304.);

quod erit in eadem specie anguli cogniti (n. 274.).

369. Casus III. Per inversam analogiam n. 321.

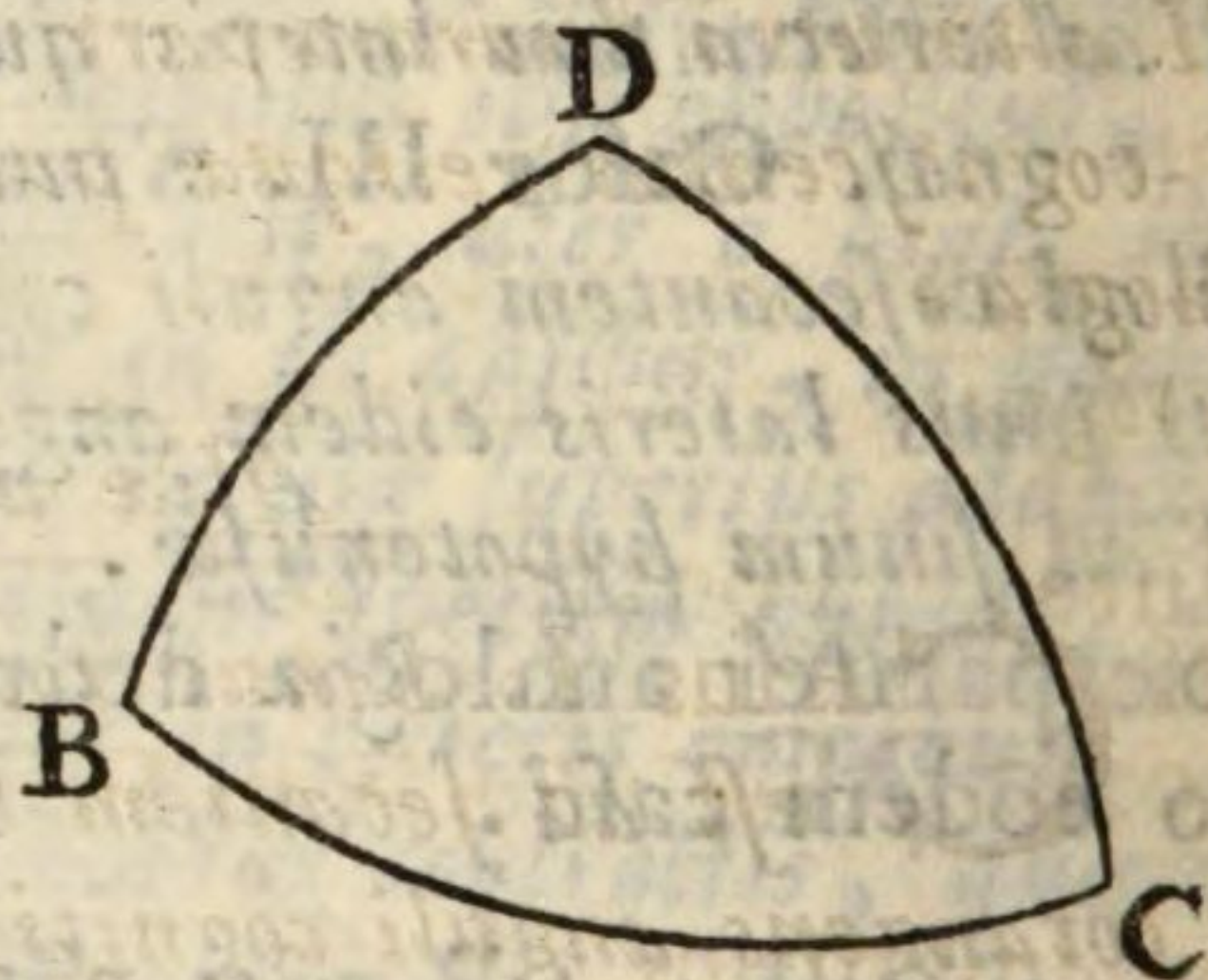
Cosinus anguli cogniti est ad sinum totum;

Ut si cotangens hypotenusæ est ad cotangentem lateris quæsitæ;

quod erit in eadem specie anguli cogniti, vel in diversa specie, prout hypotenusa fuerit minor, vel major quadrante (n. 294.).

Exemplum.

Pone hypotenusam BC
84°, 36', & angulum B
77°, 30': invenies angulum C
67° circiter, latus DC 76°,
24', latus DB 66°, 24'.



Inventio anguli C.

897363 log. cosinus 84°, 36' BC.

1065424 log. tang. 77°, 30' B.

1962787 summa.

1000000 log. subd. sinus totius.

962787 resid. pro log. cotang. 67°, 0' C.

Inventio lateris DC, oppositi angulo cognito.

999807 log. sin. $84^{\circ}, 36'$ BC.

998958 log. sin. $77^{\circ}, 30'$ B.

1998765 summa.

1000000 log. subd. sinus totius.

998765 resid. pro log. sinus $76^{\circ}, 24'$ DC.

Inventio lateris DB, adjacentis angulo cognito B.

1000000 log. sin. totius.

897556 log. cotang. $84^{\circ}, 36'$ BC.

1897556 summa.

933534 log. subd. cos. $77^{\circ}, 30'$ B.

964022 resid. pro log. cotang. $66^{\circ}, 24'$ DB.

Scholion.

SI alterutra duarum partium cognitarum sit 90 graduum, cognoscentur reliquæ partes in triangulo, etiam sine analogia.

Aliæ analogiæ.

370. **C**Asus I. Sinus totus

est ad secantem hypotenusæ;

Ut cotangens anguli cogniti

est ad tangentem anguli quæsitæ.

371. Casus II. Cossecans hypotenusæ

est ad sinum totum;

Ut sinus anguli cogniti

est ad sinum lateris oppositi.

372. Casus III. Secans anguli cogniti

est ad sinum totum;

Ut tangens hypotenusæ

est ad tangentem lateris quæsitæ.

PRO-

PROBLEMA VI.

373. **D** Atis duobus angulis adjacentibus hypotenusæ, quærere I. latera, II. hypotenusam.

Casus I. Per analogiam inversam n. 315.

Sinus anguli adjacentis lateri quæsito, est ad sinum totum;

Ut cosinus alterius anguli cogniti

est ad cosinum ejusdem lateris;

quod erit in eadem specie anguli oppositi.

374. Casus II. Per analogiam n. 322., substituendo dumtaxat secundam rationem loco primæ,

Tangens alterutrius angulorum datorum

est ad cotangentem alterius anguli;

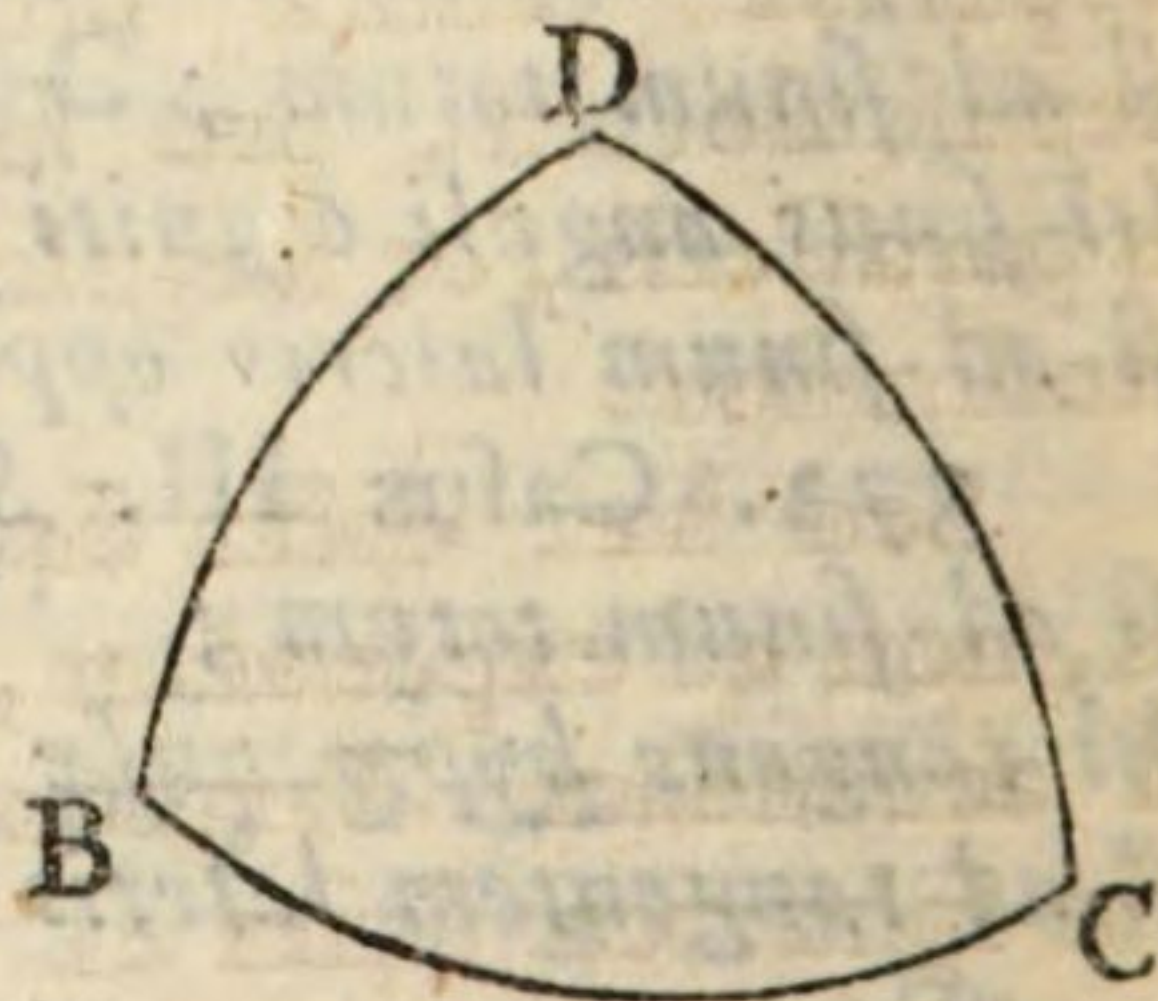
Ut sinus totus

est ad cosinum hypotenusæ;

quæ minor erit, vel major quadrante circuli, prout duo anguli erunt ejusdem, vel diversæ speciei, & ambo obliqui. Verum, si duo anguli recti sint, perinde ac angulus oppositus hypotenusæ, tria latera erunt singula grad. 90 (n. 302.). Denique, si duorum angulorum alter sit rectus, & alter obliquus, latus oppositum angulo recto, & hypotenusæ, quadrantem æquabit utrumque (n. 274. 282.); & latus alterum totidem gradus continebit, quot continet angulus ipsi oppositus (n. 334.).

Exemplum.

E Sto angulus B $77^{\circ} 30'$, & angulus C $67^{\circ} 0'$: invenietur ope calculi, latus DB $66^{\circ} 24'$, & hypotenusæ BC $84^{\circ} 36'$.



In-

Inventio lateris DB.

1000000	log. finus totius.
<u>959188</u>	log. cosin. $67^{\circ}, 0^{\circ} C.$
1959188	summa.
<u>998958</u>	log. subd. finus $77^{\circ}, 30^{\circ} B.$
960230	resid. pro log. cosin. $66^{\circ}, 24^{\circ} DB.$

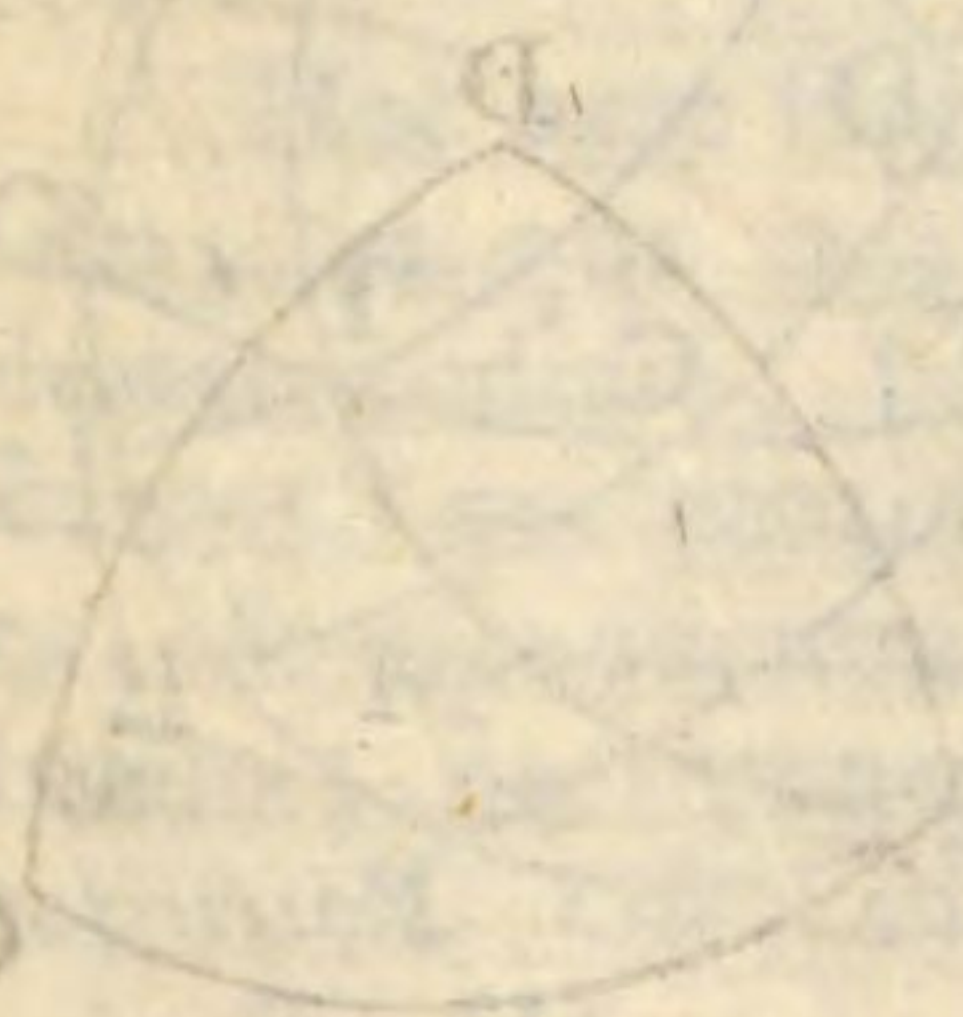
Inventio hypotenusæ BC.

<u>962785</u>	log. cotang. $67^{\circ}, 0^{\circ} C.$
1000000	log. finus totius.
1962785	summa.
<u>1065424</u>	log. subd. tang. $77^{\circ}, 30^{\circ} B.$
897361	resid. pro log. cosin. $84^{\circ}, 36^{\circ} BC.$

Aliæ analogiæ.

375. **C**asus I. Sinus totus
 est ad cosecantem anguli adjacentis lat. quæsito;
 Ut cosinus alterius anguli dati
 est ad cosinum ejusdem lateris.

376. Casus II. Cotangens unius angulorum cognitorum
 est ad tangentem alterius anguli;
 Ut sinus totus
 est ad secantem hypotenusæ.



PRAXIS ASTRONOMICA

Trianguli sphaerici rectanguli.

TIRONEM properantem ad analysim reliquorum triangulorum, morari tantisper lubet, ut exemplo Cavallerii in suo directorio, qualem, quantumque usum habitura sit in omni Astronomia, analysis, quam nuper docuimus, trianguli sphaerici rectanguli, statim intelligat; & ad reliquum, quod breve est iter, multò fidentiùs se instauret. Postulo autem, ut in elementis, ac definitionibus Sphaerae armillaris, ne prorsus rudis sit Tiro.

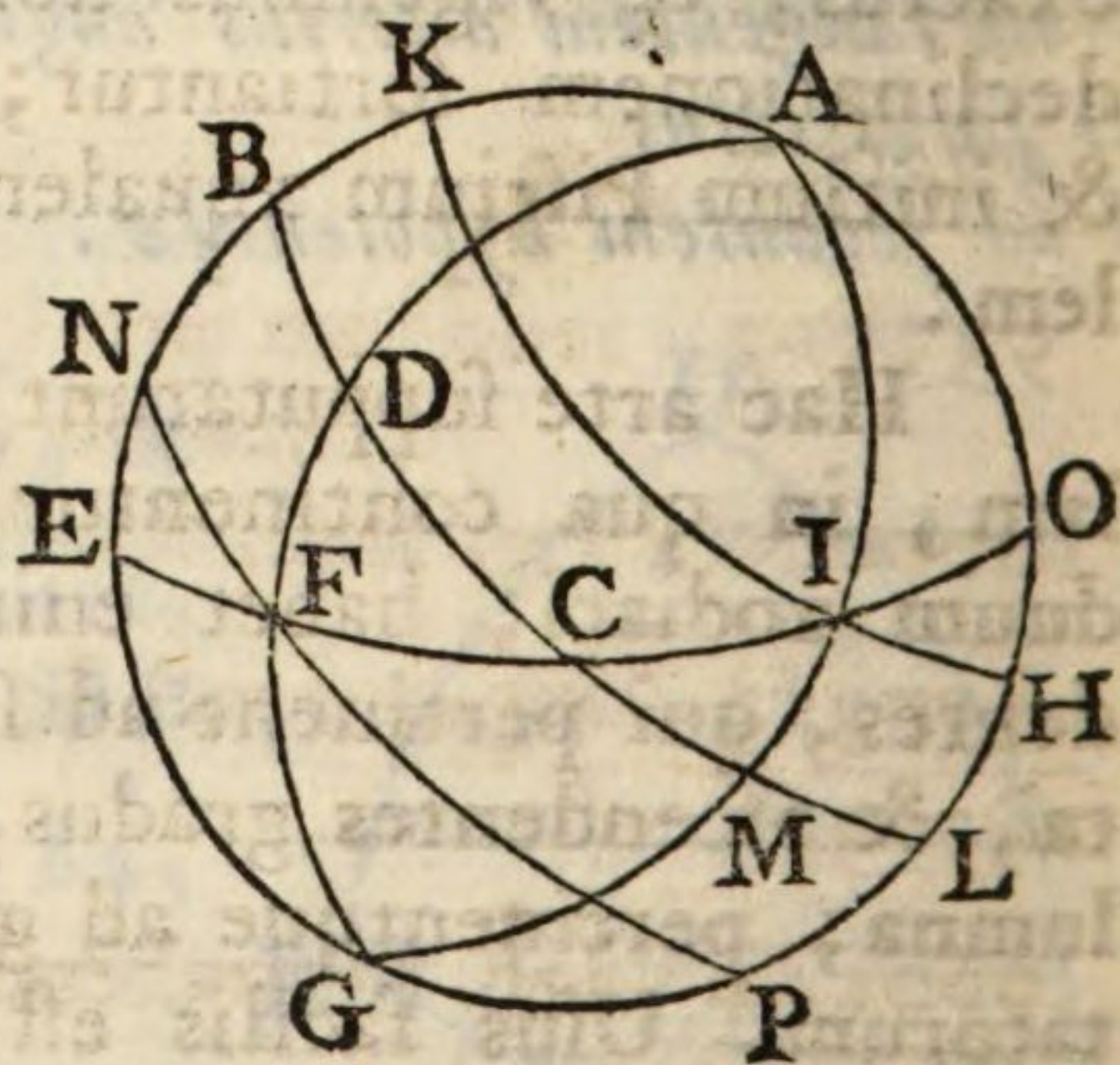
PROBLEMA I.

377. **S**olis declinationem ad singulos gradus Eclipticae supputare; & tabulam declinationum construere.

Resolutio. Circulus, sub quo sol movetur, ad æquinoctialem obliquus est; illius gradus singuli variam sortiuntur declinationem, seu inæqualiter ab æquinoctiali distant; hæc distantia determinatur a circulo per polos mundi transeunte; juvat autem tabulam construere, in qua habeamus ad manum declinationem singulorum graduum eclipticae.

Neque opus erit, nisi supputatione unius quadrantis; cum gradus hinc inde a sectionibus æqualiter distantes, æqualem habeant declinationem.

Sit ergo datus arcus eclipticae CI, & datum punctum I, cujus declinatio sit investiganda. Ducatur per punctum I circulus AIMG, per po-



los mundi transiens: quæritur declinatio IM. Triangulum sphæricum MCI est rectangulum in M; cum circulus AIM per polos æquinoctialis transeat. Cognoscitur etiam angulus ICM, cujus mensura est arcus OL, maxima declinatio eclypticæ jam inventa, nempe grad. $23\frac{1}{2}$. Fiat ergo per Probl. V. n. 368.

Ut sinus totus ad sinum arcus CI eclypticæ;

Ita sinus anguli $23\frac{1}{2}$, ad sinum declinationis quæsitæ.

Si per logarithmos operari velis, logarithmum sinus $23\frac{1}{2}$ adde successivè logarithmis singulorum arcuum usque ad 90; & a summa subtrahe logarithmum sinus totius (quæ subtractio fiet abjecta prima unitate ad sinistram): habebis logarithmos arcuum declinationis in singulos gradus unius quadrantis. Quia verò puncta æqualiter distantia a sectionibus, æqualem habent declinationem; & ejusdem rationis, si in eodem hemisphærio boreali, aut australi inveniantur; diversæ rationis, si in diverso hemisphærio; idcirco sufficiet unus quadrans eclypticæ. Intellego nempe, quòd initium Tauri, & initium Virginis eandem habeant declinationem borealem; quòd primus gradus Virginis exactus, & vigesimus nonus Arietis pariter eandem declinationem fortiantur; similiter initium Scorpii, & initium Piscium æqualem habeant priori, sed australem.

Hac arte supputarunt Astronomi sequentem tabulam, in qua continentur declinationes omnium graduum zodiaci; habet enim gradus eclypticæ descendentes, qui pertinent ad signa in fronte tabulæ notata, & ascendentes gradus, qui habentur in ultima columna; pertinentque ad gradus signorum in calce notatorum. Usus facilis est; si enim velis, poteris ope

Tabula declinationis Eclypticæ.

Gr. Ecl.	0. 6.			1. 7.			2. 8.			Gr. Ecl.	
	Aries		Libra	Taurus		Scorpio	Gemini		Arciten.		
	Gr.	I	II	Gr.	I	II	Gr.	I	II		
0	0.	0.	0.	11.	30.	11.	20.	12.	23.	30	
1	0.	23.	55.	11.	51.	14.	20.	24.	57.	29	
2	0.	47.	51.	12.	12.	5.	20.	37.	3.	28	
3	1.	11.	46.	12.	32.	46.	20.	48.	57.	27	
4	1.	35.	39.	12.	44.	13.	21.	0.	24.	26	
5	1.	59.	31.	13.	13.	28.	21.	11.	26.	25	
6	2.	23.	22.	13.	33.	30.	21.	22.	6.	24	
7	2.	47.	10.	13.	53.	16.	21.	32.	20.	23	
8	3.	10.	54.	14.	12.	51.	21.	42.	10.	22	
9	3.	34.	38.	14.	32.	12.	21.	51.	38.	21	
10	3.	58.	17.	14.	51.	16.	22.	0.	40.	20	
11	4.	21.	51.	15.	10.	7.	22.	9.	18.	19	
12	4.	45.	24.	15.	28.	44.	22.	17.	29.	18	
13	5.	8.	50.	15.	47.	1.	22.	25.	16.	17	
14	5.	39.	59.	16.	5.	6.	22.	32.	38.	16	
15	5.	55.	30.	16.	22.	51.	22.	39.	32.	15	
16	6.	18.	41.	16.	40.	21.	22.	46.	2.	14	
17	6.	41.	46.	16.	57.	33.	22.	52.	8.	13	
18	7.	4.	47.	17.	14.	29.	22.	57.	44.	12	
19	7.	27.	40.	17.	31.	6.	23.	2.	54.	11	
20	7.	50.	24.	17.	47.	23.	23.	7.	40.	10	
21	8.	13.	4.	18.	3.	23.	23.	11.	58.	9	
22	8.	35.	33.	18.	19.	5.	23.	15.	48.	8	
23	8.	58.	4.	18.	34.	25.	23.	19.	10.	7	
24	9.	20.	9.	18.	49.	26.	23.	22.	9.	6	
25	9.	42.	14.	19.	4.	10.	23.	24.	39.	5	
26	10.	4.	10.	19.	18.	30.	23.	26.	40.	4	
27	10.	25.	56.	19.	32.	30.	23.	27.	39.	3	
28	10.	47.	31.	19.	46.	10.	23.	29.	4.	2	
29	11.	8.	57.	19.	59.	26.	23.	30.	6.	1	
30	11.	30.	11.	20.	12.	23.	23.	30.	20.	0	
Virgo Pisces				Leo Aquarius				Cancer Capricorn			
5. II.				4. IO.				3. 9.			

istius tabulæ, cognito gradu eclypticæ, quem sol aliquo tempore occupat, assignare ejus declinationem; vel cognita declinatione, scire, & determinare locum solis in eclyptica.

PROBLEMA II.

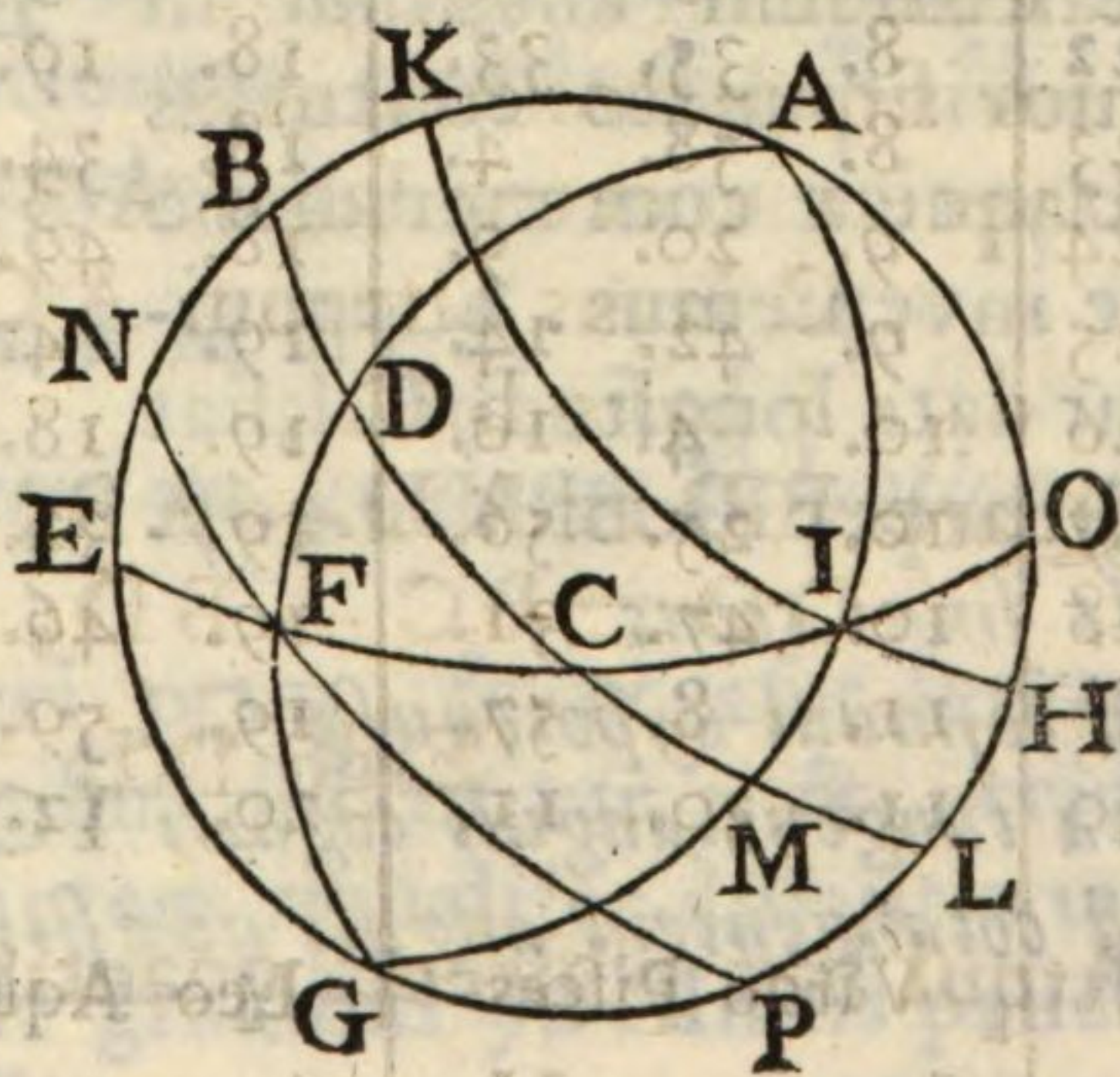
378. **A** Scensionem rectam singulorum graduum Eclypticæ supputare.

Resolutio. Solem in circulo ad æquinoctialem obliquo moveri compertum est; & in eo motu duæ proprietates considerandæ sunt; nempe, quòd feratur in austrum, & boream, seu declinationes varias habeat: altera proprietas est, quòd in orientem tendat; & quia obliquè incedit, inæqualiter etiam incedat necesse est. Quare, ut sciamus, quantum præcisè ad orientem inceserit, motum obliquum, ad circulum directè ad occidentem protensum reducimus.

Ascensio igitur recta alicujus puncti eclypticæ, est punctum circuli æquinoctialis, simul cum eo oriens in ea regione, quæ subjacet æquatori, cujus nempe horizon transit per polos mundi.

Quia verò circulus meridianus, immo & omnes circuli horarii, sunt horizontes respectu alicujus regionis in æquatore positæ; hinc punctum illud, quod ascensionem rectam vocamus, simul invenietur in omnibus circulis horariis, cum puncto eclypticæ sibi correspondente.

Sit ergo propositus gradus zodiaci I, per quem describatur circulus AIM transiens per polos æquinoctialis, & secans eundem in puncto M. Supponitur autem cognitus



arcus CI ; & quæritur arcus CM , nimirum, ascensio recta puncti I . Fiat ergo per Probl. V. n. 369.

Ut cosinus anguli cogniti ICM , seu arcus LO , ad sinum totum;

Ita cotangens hypotenusæ IC ,

ad cotangentem lateris, seu arcus quæsitæ MC .

Vel n. 372. fiat, *Ut secans anguli cogniti, ad sinum totum;*

Ita tangens hypotenusæ,

ad tangentem lateris quæsitæ.

Atque hinc conficiuntur tabulæ astronomicæ ascensionum rectarum.

PROBLEMA III.

379. **A**ngulum Eclypticæ, & Meridiani invenire.

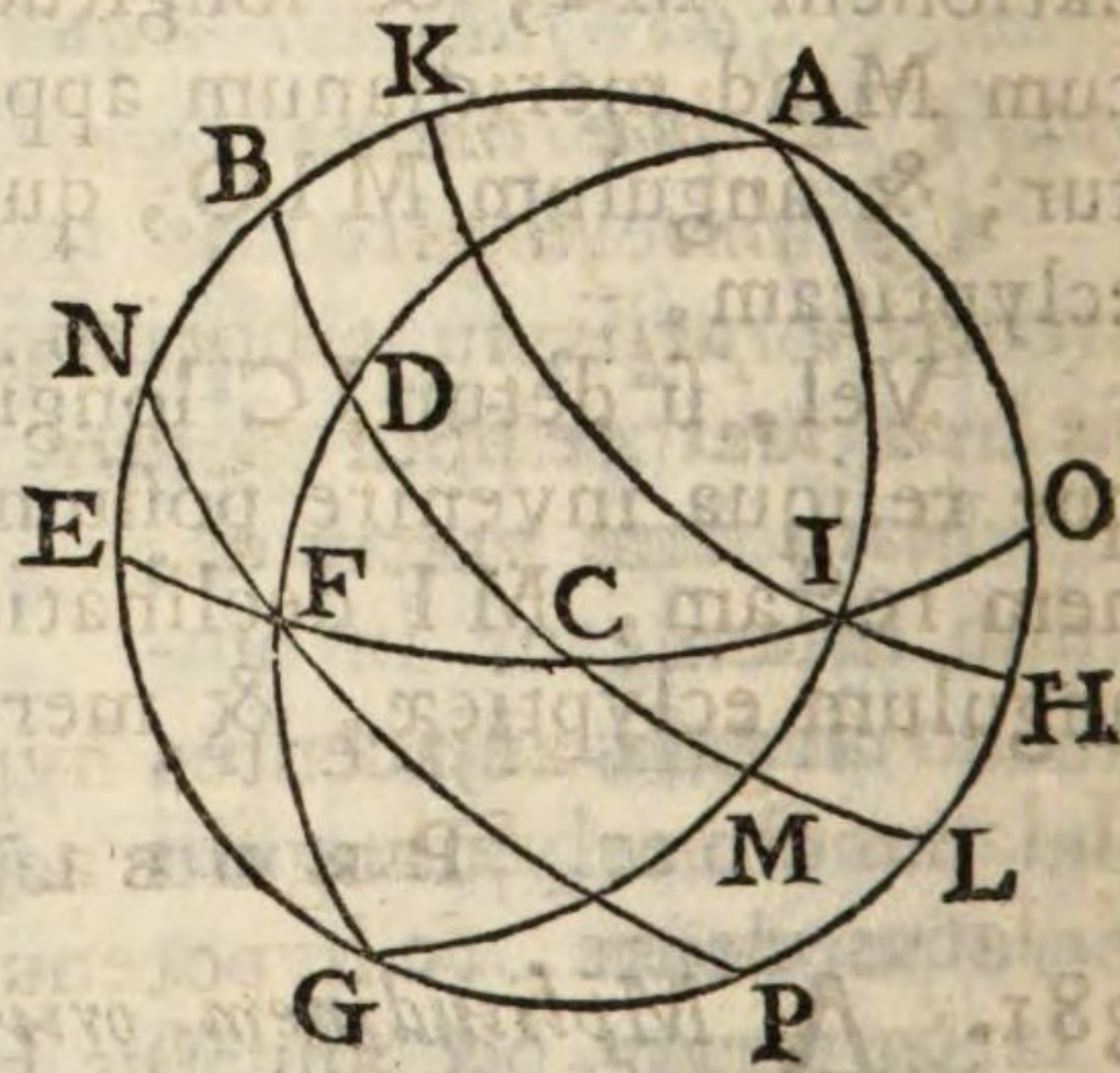
Resolutio. In proposito triangulo IMC restat etiam angulus MIC cognoscendus; quippe qui maximè utilis est, præsertim in solaribus eclypsibus supputandis. Certum est autem, quòd eclyptica cum meridiano varios comprehendit angulos, uti ab Astronomis ostenditur; sufficit autem supputare unum quadrantem. Quare eundem angulum in quovis puncto concursus eclypticæ cum meridiano sic inveniemus. Supponitur data longitudo CI ; fiat igitur per Probl. V. n. 367.

Ut sinus totus

ad cosinum hypotenusæ CI ;

Ita tangens anguli cogniti ICM ,

ad cotangentem anguli quæsitæ MIC .



PROBLEMA IV.

380. **D**ata declinatione Solis, quæ observatione cognoscitur, habetur ejus ascensio recta, & locus in Ecliptica, longitudo, declinatio, & angulus Eclipticæ, & Meridiani per resolutionem trianguli rectanguli spherici.

Resolutio. Esto BCL æquinoctialis circulus, ECO ecliptica, I sol; a quo ad æquinoctialem demisso circulo perpendiculari IM, erit arcus IM solis declinatio; & proinde in triangulo rectangulo IMC, ex datis IM, & angulo C, inclinatione eclipticæ ad æquatorem, dabitur per Probl. IV. n. 360. arcus CM, solis ascensio recta, & CI locus solis in ecliptica; quin etiam angulus CIM, inclinatio circuli declinationis, seu meridiani ad eclipticam.

Præterea in eodem triangulo CIM rectangulo, cum angulus C constans sit, & immutabilis, si detur vel latus MC, ascensio recta, invenire possumus declinationem MI, & longitudinem puncti I, quod unà cum M ad meridianum appellit, mediumque cæli dicitur; & angulum MIO, qui est inclinatio meridiani ad eclipticam.

Vel, si detur IC longitudo puncti I, exinde quoque reliqua invenire possumus, scilicet CM ascensionem rectam, MI declinationem puncti I, & MIO angulum eclipticæ, & meridiani.

PROBLEMA V.

381. **A**mplitudinem ortivam graduum Eclipticæ invenire.

Resolutio. Puncta veri ortus, & occasus sunt ea puncta horizonis, in quibus sol oritur, & occidit tempore æquinoctii; hæc autem æqualiter distant a meridiano, hoc est, hinc inde gradibus 90. In iis punctis

æquator fecat horizontem; & consequenter in iisdem sol tempore æquinoctiorum oritur; extra verò æquinoctia in aliis punctis oritur; prout maiorem, vel minorem habet declinationem.

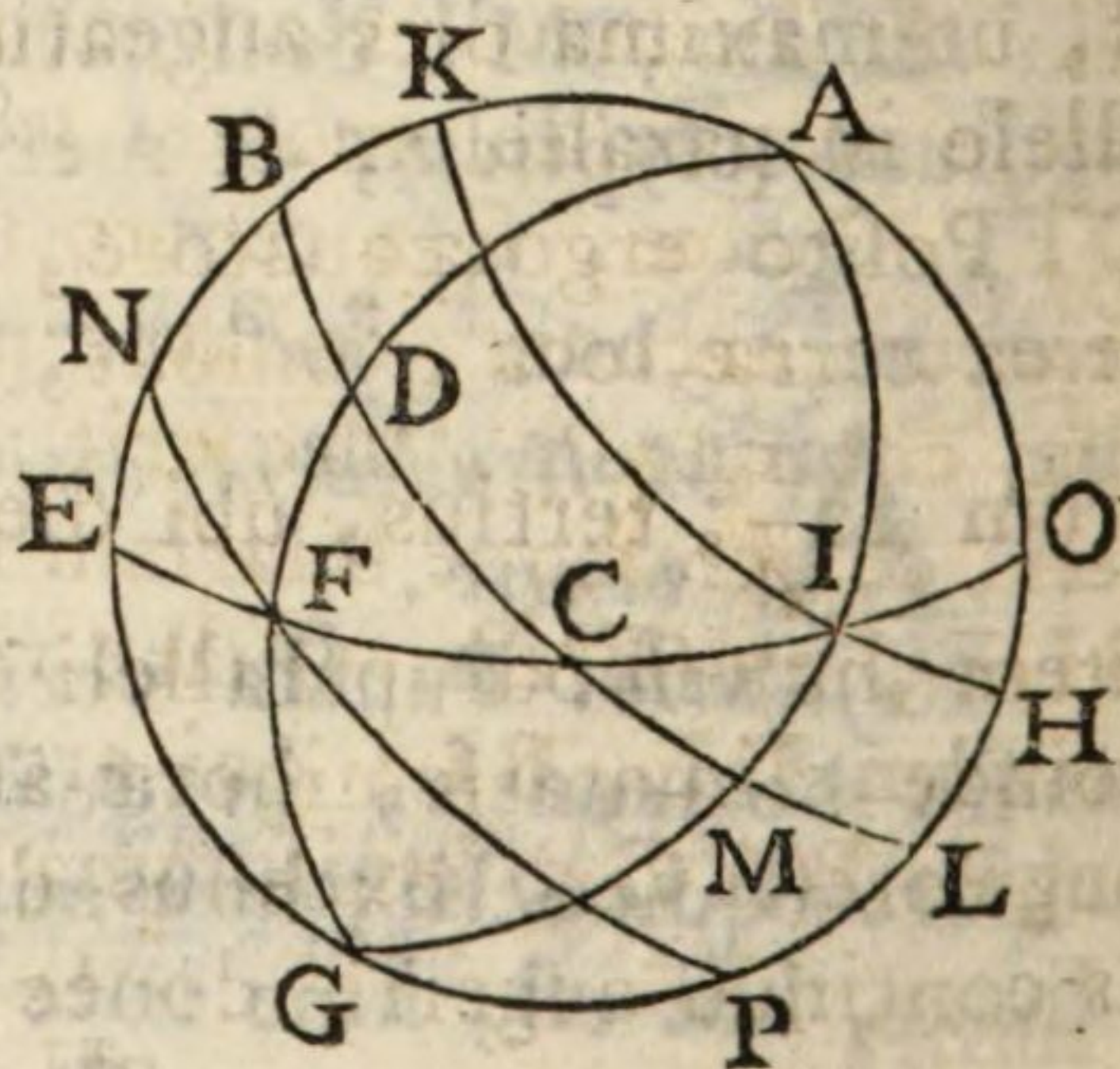
Differentia inter ortum solis, & punctum veri ortus vocatur amplitudo ortiva; & est veluti declinatio, non sumpta secundum circulum horarium, ut antea, sed sumpta secundum horizontem; & mutatur juxta maiorem, vel minorem inclinationem horizontis ad circulos horarios. Duplex est amplitudo ortiva, borealis, & australis.

Sit horizon OE , æquator CD ; & sol percurrat parallelum borealem IK : oriatur in puncto I ; & amplitudo ortiva erit arcus IC . Pariter sole percurrente parallelum australem PN , australis amplitudo ortiva erit CF . Itaque per resolutionem trianguli sphærici rectanguli CIM , habebitur amplitudo ortiva borealis. Fiat per Probl. IV. n. 362.

Ut sinus complementi elevationis poli,
ad sinum totum;

Ita sinus declinationis solis,
ad sinum amplitudinis ortivæ.

Nam in triangulo rectangulo CIM , ita est sinus anguli ICM , cujus mensura est LO complementum altitudinis poli EB , ad sinum lateris MI , seu declinationis; ut sinus totus anguli recti M , ad sinum arcus CI , hoc est, amplitudinis ortivæ; quare, si in scheda scribas logarithmum sinus complementi elevationis poli, & eum continuè subtrahas ex logarithmis sinuum declinationis, quibus addas



loga-

logarithmum sinus totius, quæ additio fit adjecta unitate initio logarithmi; habebis facile logarithmos omnium amplitudinum ortivarum. Sufficiet autem id præstare pro borealibus; nam australes æquales sunt borealibus.

De Climatibus.

CLima est telluris tractus, duobus parallelis æquatori comprehensus, seu, est quasi zona aliqua circa tellurem extensa; cujus principium, & finis sunt duo paralleli, quorum unus est vel æquator, vel alius circulus minor, æquatori parallelus; alter verò, seu finis, pariter est alius parallelus ex eadem parte, sed remotior ab æquatore. Cur autem veteres Geographi regiones telluris per *Parallelos*, & *Climata* distinxerint, brevissimè dicam.

Cùm enim in sphæra recta, seu sub æquinoctiali, dies noctibus perpetuò æquentur, si inde pergamus versùs alterutrum polum, dies æstate fiunt noctibus longiores, quò propiùs ad polum accedimus, donec sub ipsis circulis polaribus nulla sit nox. Hinc per parallelos æquatoris, qui augmenta dierum horæ quadrantibus notabant, tellurem diviserunt Geographi; nam paralleli illi tantùm a se invicem distant, quantò opus est, ut maxima dies augeatur horæ quadrante, de parallelo in parallelum.

Posito ergo æquatore, primo parallelo, secundus per ea terræ loca transibat, ubi dies longissima est horarum $12\frac{1}{4}$; tertius, ubi dies est horarum $12\frac{2}{4}$ &c. Duo autem hujusmodi paralleli *Clima* constituebant; quæ proinde climata semihoræ augmento distinguuntur.

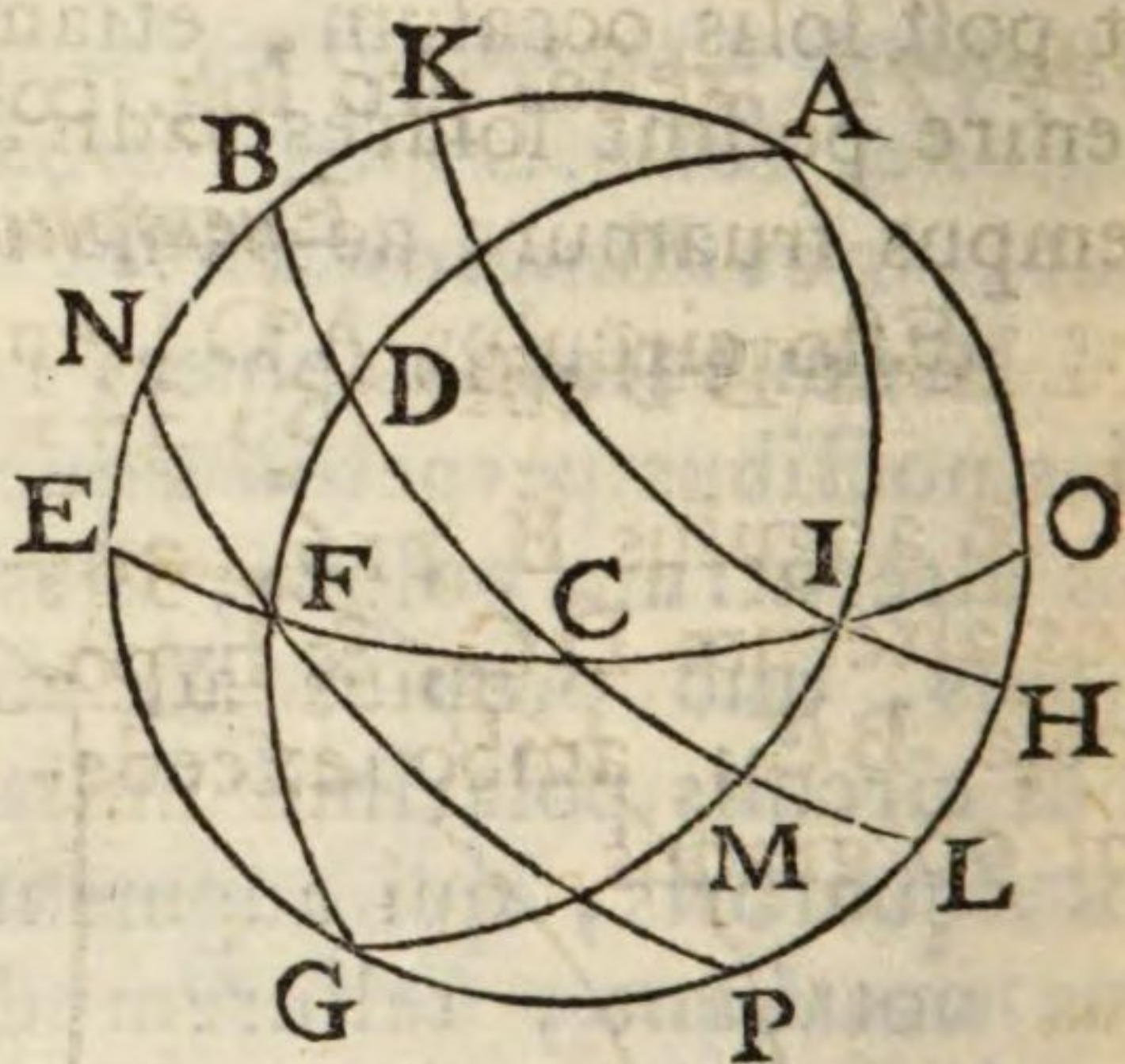
Potest verò excessus diei solstitialis supra 12 horas continuò augeri, donec ad polarem circulum per-

ventum fuerit, ubi tropicus unico puncto terram tangens, totus eminet, & sol, illum decurrendo, non occidit; quare dies erit horarum 24, qui excedit æquinoctialem diem horis 12, seu 24 semihoris, vel 48 horæ quadrantibus; unde conficitur tandem numerus climatum inter æquinoctialem, & polarem esse 24, & parallelorum esse 48. His animadversis, fit

PROBLEMA VI.

382. **I**nvenire latitudinem, per quam terminatur Clima.

Resolutio. Esto A alteruter polus mundi; BCL æquator; ECO horizon; AMG circulus horarius ortus solis in sua maxima declinatione. Quare per analysim trianguli rectanguli sphærici IMC, invenietur angulus ICM, si-ve latitudo LO. Nam latus CM innotescit, cum sit complementum arcus seminocturni ML, seu horæ ortus solis; & latus MI est pariter notum, cum sit maxima obliquitas, seu declinatio solis; fiat itaque per Probl. I. n. 341.



Ut sinus lateris IC, seu complementi horæ ortus solis, ad sinum totum;

Ita tangens lateris IM, seu maximæ declinationis solis, ad tangentem anguli ICM, complementi altitudinis poli, seu latitudinis quæsitæ LO.

Atque hac methodo construuntur tabulæ climatum, in quibus latitudo cujusvis determinatur.

De Crepusculis.

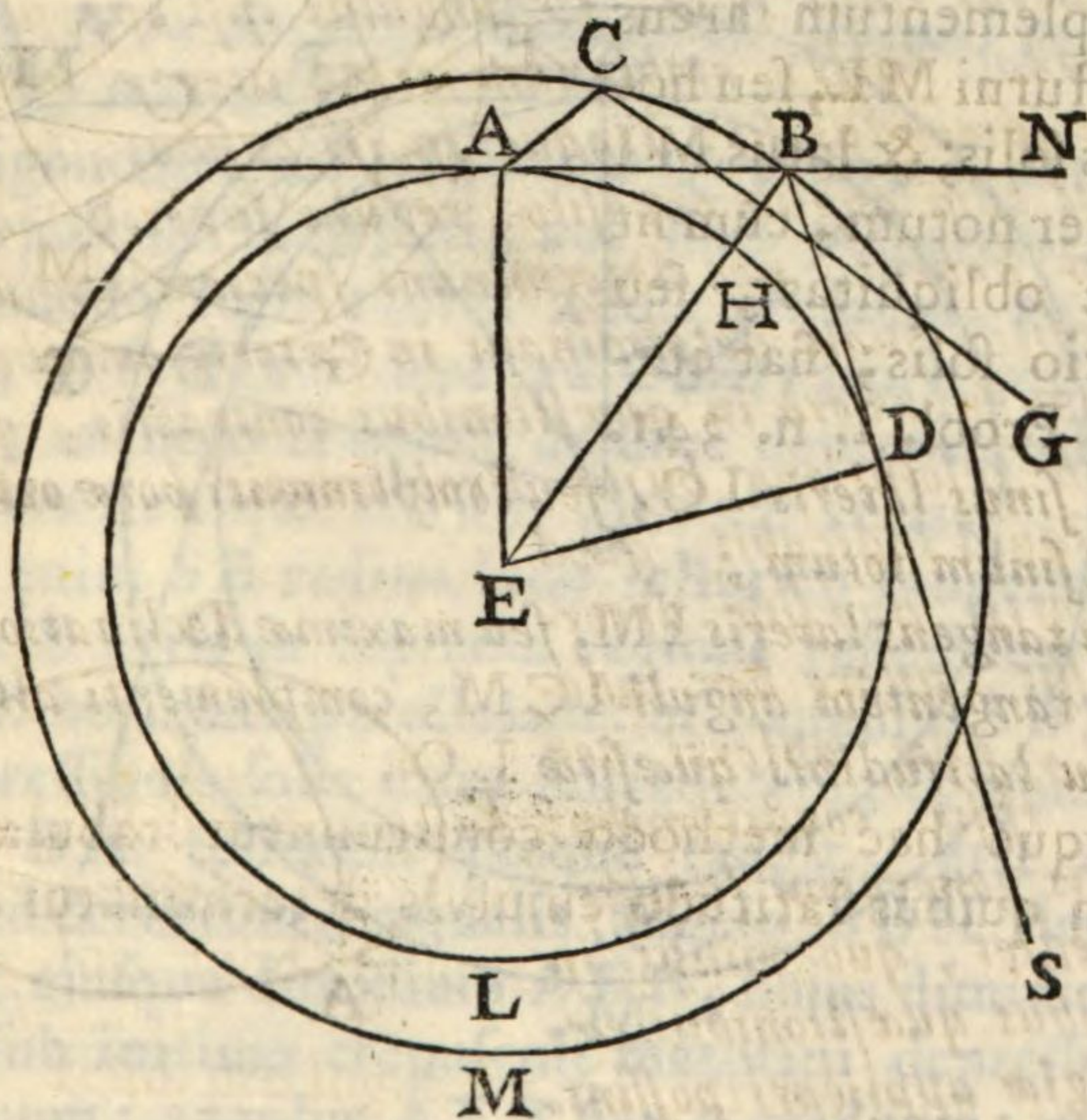
Quàm sæpe utrâque Trigonometriâ uti oporteat, planâ, & sphæricâ, in astronomicis investigationibus, constabit Tironi, & utriusque usum conjungere discet cum voluptate ex sequentibus Quæstiunculis.

Quæstio I.

383. **A**N crepera illa, & dubia lux mane ante Solis
ortum, & vespere post ejus occasum conspi-
cua, quæ Crepusculum dicitur, ab Atmosphære illumi-
natione oriatur.

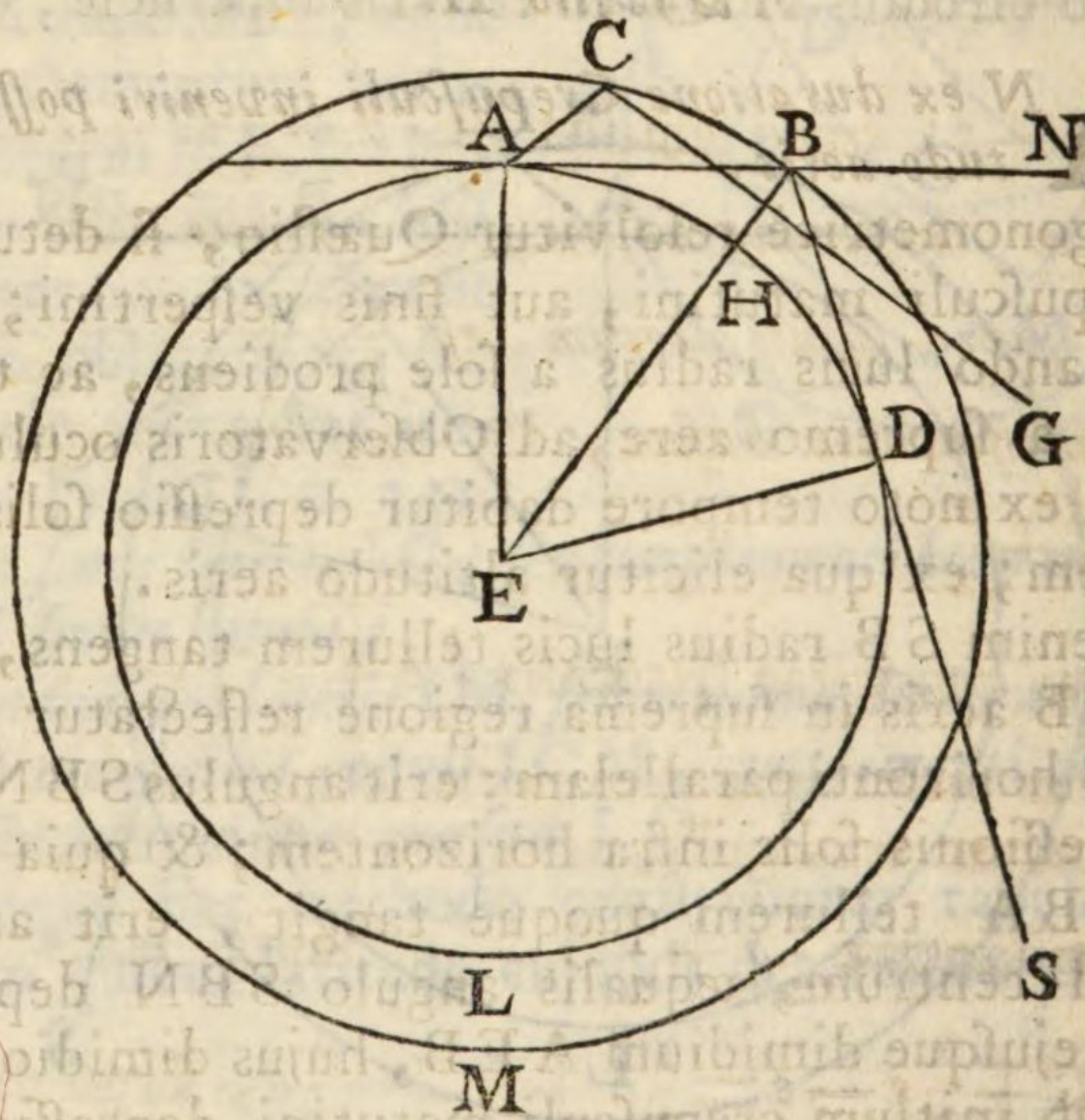
Sublatà athmosphærà, ex clarissima luce densissimis tenebris momento temporis, quo sol occidit, involve-remur; sed per circumfusam telluri athmosphæram fit, ut post solis occasum, etiamsi nulli directi ad nos per-venire possint solares radii, reflexis tamen per aliquod tempus fruamur; ac paulatim obrepant noctis tenebræ.

Estō circulus ADL in telluris superficie, concen-



tricus verticali, in quo sol infra horizontem existit, circa quem sit alius circulus C B M, includens in eodem plano aeris portionem, quæ solis radios potest reflectere; & oculus sit in superficie telluris A; cujus horizon sensibilis sit A N. Quia verò ex Elementis, inter tangentem A N, & circulum A D nulla recta duci potest ad A; hinc sole infra horizontem depresso, nulli radii poterunt ad oculum A directè pertingere. Verùm a sole in recta G C existente, duci potest recta, quæ in atmosphæræ particulam C incidat; ibique potest radius in C A reflecti, & oculum in A ingredi; atque hac ratione solis radii, infinitas atmosphæræ particulas illustrantes, ab iisdem in oculum detorquentur.

Tangens A B occurrat superficiei aeris, lucem reflectentis, in puncto B, a quo ducatur B D, circulum telluris tangens in D; sitque sol in hac linea: tunc radius S B in B A reflectetur; & oculum ingrediatur, ob



angulum DBE incidentem, æqualem angulo reflexionis ABE ; eritque ille radius, qui primus mane ad oculum pervenire possit, & initium crepusculi matutini; vel ultimus vespere, & finis crepusculi vespertini.

Scholion.

Aliam crepusculorum causam repetunt Astronomi ex atmosphæra solari; verùm hujus crepusculi & brevior est duratio, & lux planè diversa ab illa, quæ ex illustratione atmosphære terrestris oritur; quæque vespere non finitur, nisi cùm sol octodecim circiter gradus infra horizontem deprimitur. Hujus crepusculi duratio pendet ex quantitate materiæ in aere suspensa, ad lucis reflexionem idonea, & ex altitudine aeris; hinc hyeme crepuscula breviora, quàm æstate, in qua rarefactus aer altior est, & diutius a sole illustratur.

Quæstio II.

384. **A**N ex duratione Crepusculi inveniri possit altitudo aeris.

Trigonometricè resolvitur Quæstio, si detur initium crepusculi matutini, aut finis vespertini; nimirum, quando lucis radius a sole prodiens, ac terram tangens, a supremo aere ad Observatoris oculum reflectitur; ex noto tempore dabitur depressio solis infra horizontem; ex qua elicitur altitudo aeris.

Sit enim SB radius lucis tellurem tangens, qui a particula B aeris in suprema regione reflectatur per lineam AB horizonti parallelam: erit angulus SBN mensura depressionis solis infra horizontem; & quia radius reflexus BA tellurem quoque tangit, erit angulus AED ad centrum, æqualis angulo SBN depressionis solis; ejusque dimidium AEB , hujus dimidio æquale. Sit sub initium crepusculi matutini depressio solis 18 graduum: angulus AEB fiet 9 graduum; quod verum

Quæstio III.

385. **A**N ex data duratione Crepusculi, & declinatione Solis, ejus depressio infra Horizontem investigari possit; Et vicissim.

Supponatur primò sol in æquatore; & habeatur hora, qua incipit crepusculum. Sit diameter æquatoris A D, & E F diameter horizontis: erit A H sinus elevationis solis meridianæ, nempe sinus arcus A E; & H G erit sinus depressionis solis infra horizontem; nam I K supponitur esse diameter circuli, in quo sol existit initio auroræ, & sol esse in B; eritque M B sinus durationis crepusculi in gradus conversæ. Perspicuum est autem, ita esse A M ad M B, uti A H ad H G; fiat ergo,

Ut sinus totus A M

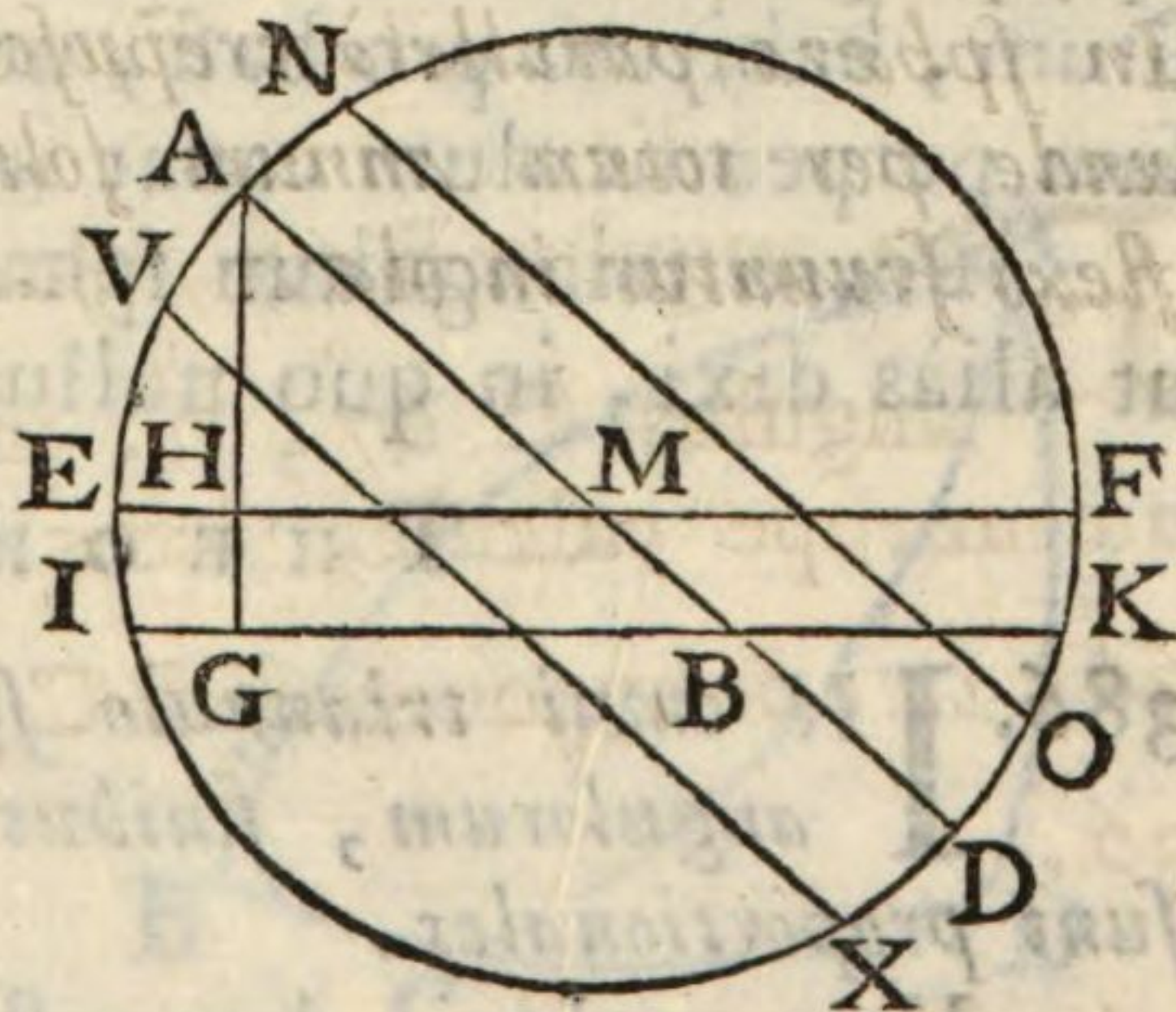
ad sinum durationis crepusculi M B;

Ita sinus complementi elevationis poli, seu A H

ad sinum H G depressionis solis infra horizontem.

Eodem modo, paucis mutatis, ratiocinaberis, si sol sit in parallelo boreali N O, vel in parallelo australi V X. Cùm sæpius, & diversis diebus facta fuerit observatio, si semper eveniat, ut incipiat aurora, sole 18 gradus infra horizontem depresso; deinceps regula generalis constitui poterit, & per analogiam expositam supputari tabula integra crepusculorum, pro singulis parallelis, & singulis latitudinibus.

Sed hæc dicta sint factis, non ad explendam, sed ad acuendam Trigonometriæ sphæricæ sitim ex tam præclaris usibus.



THEO.

THEORIA, ET ANALYSIS

Trianguli sphærici obliquanguli.

Observaverat Cavallerius in suo Directorio Cap. IV. p. III., obliquangulorum triangulorum calculum meritò cæteras Trigonometriæ sphæricæ partes difficultate superare, tum ob multiplicem Problematum varietatem, tum etiam propter operosam Theorematum, ex quibus analysis derivatur, explicationem. Ego verò, quoad possem, & liceret, postremam hanc Trigonometriæ partem ad eam facilitatem deducere conatus sum, ut Astronomiæ studiosi, quibus hæc analysis adeò necessaria est, hos tanquam scopulos, & syrtes minimè averfari debeant. Omnino horum incommodorum una cautio est, atque una provisio, ut ne nimis citò Theoremata congerantur plurimis suppositionibus, quas vocant hypotheses, implicita, sed pedetentim, partitèque per Lemmata evolvantur ea, quæ sunt paulo abstrusiora; quod in superioribus Libris præstitimus; certè conati fuimus.

Ac primò, ad hujus calculi facilitatem maximè conducet reductio trianguli obliquanguli ad duo rectangula, ope perpendiculi demissi ex angulo aliquo in latus oppositum, habitum pro basi, ut in triangulis planis; sive ipsum perpendiculum cadat intra triangulum, sive extra.

Porro triangulum sphæricum *obliquangulum* voco, ut aliàs dixi, in quo nullus angulus est rectus.

THEOREMA I.

386. **I**n omni triangulo sphærico obliquangulo, sinus angulorum, sinibus oppositorum laterum directè sunt proportionales.

Hæc analogia demonstrata jam est respectu trianguli rectanguli.

De-

Demonstratio. Sit triangulum sphæricum obliquangulum ABC : Dico, ita esse sinum anguli B ad sinum lateris oppositi AC , ut est sinus anguli C ad sinum oppositi lateris AB .

Cadat ex A in latus BC perpendicularis arcus AD , five intra, si duo anguli B & C sint ejusdem speciei, hoc est, ambo acuti, vel ambo obtusi; five extra, si hujusmodi anguli specie differant (n. 277.).

Erit itaque in triangulo rectangulo ADC ,
Ut radius ad sinum anguli C ,
Ita sinus hypotenusæ AC ad sinum cruris AD (n. 304.).

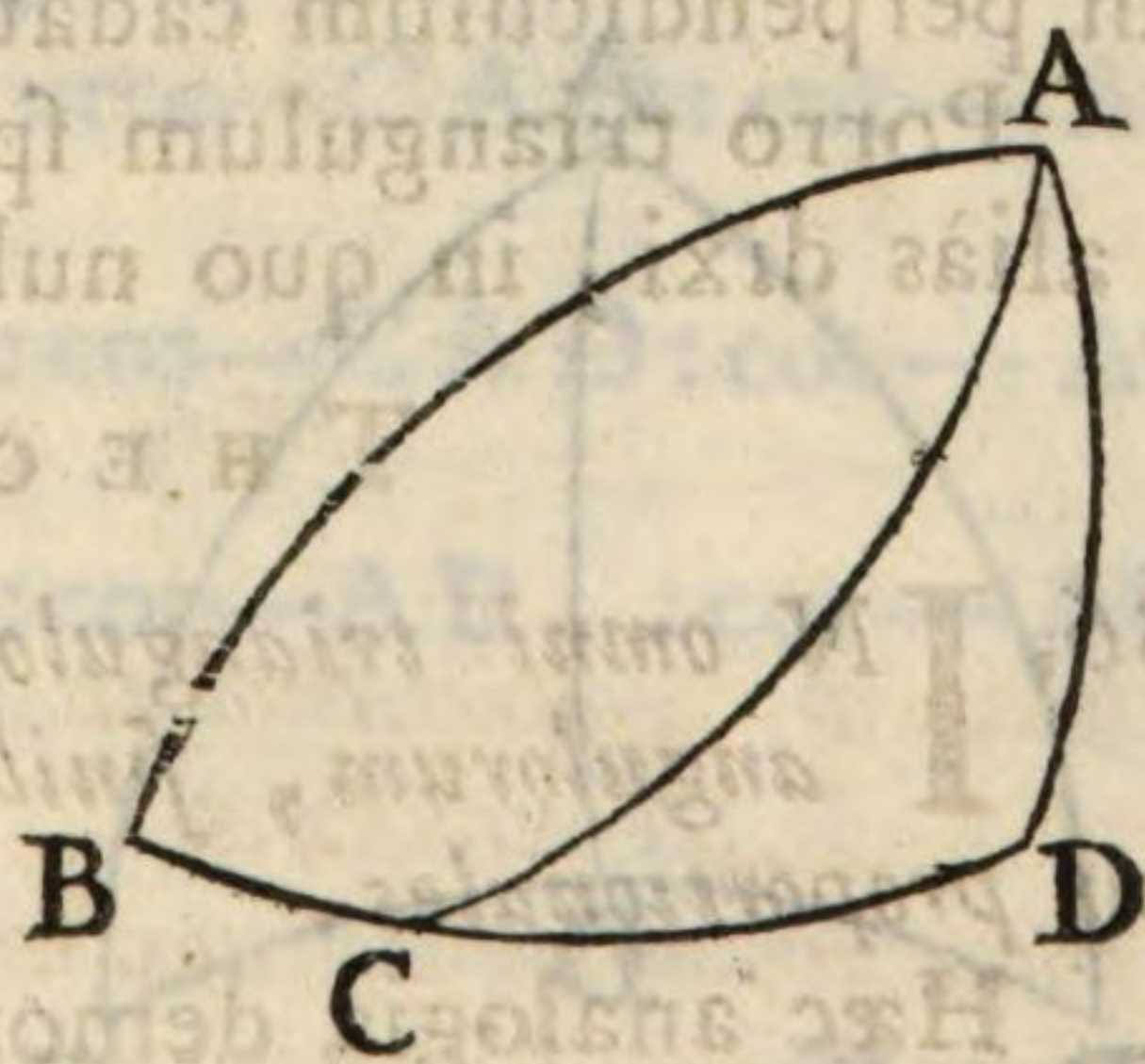
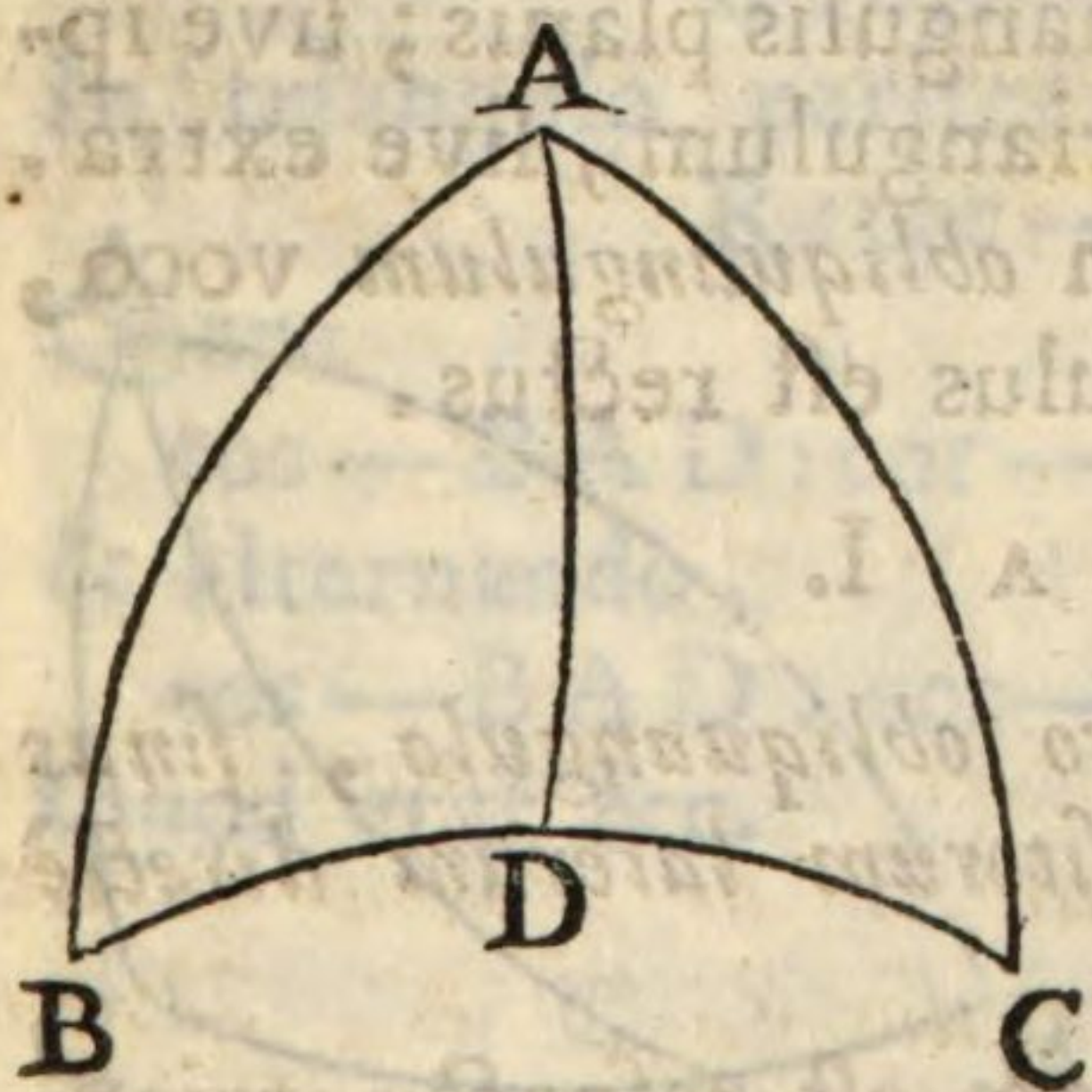
Similiter in altero triangulo ABD ,
Ut radius ad sinum anguli B ,
Ita sinus hypotenusæ AB ad sinum cruris AD ,
 & convertendo,
Ut sinus anguli B , ad radium,
Ita sinus cruris AD , ad sinum hypotenusæ AB .

Ergo ex æquo perturbatè, ut a latere

<i>Sinus ang. B</i>	<i>Sinus hyp. AC</i>
<i>Radius</i>	<i>Sinus crur. AD</i>
<i>Sinus ang. C</i>	<i>Sinus hyp. AB</i>

 cernis, erit,

Ut sinus anguli B ad sinum anguli C ;
Ita sinus hypotenusæ AC ad sinum hypotenusæ AB ;
 & permutando,
Ut sinus anguli B , in triang. ABC , ad sinum lat. AC ;
Ita sinus anguli C , ad sinum lateris AB .



Ea-

Eadem prorsus ratione ostendetur, ducto arcu perpendiculari ex C ad AB , ita esse sinum anguli B ad sinum lateris AC , ut est sinus anguli BAC ad sinum lateris CB . In omni ergo triangulo sphærico obliquangulo &c. Quod erat &c.

THEOREMA II.

387. **I**N omni triangulo sphærico obliquangulo ABC , ab angulo verticali A in oppositam basim BC demisso arcu perpendiculari AD , Erunt sinus secundi, seu cosinus laterum AB , AC , sinibus secundis, seu cosinibus segmentorum BD , DC directè proportionales.

Demonstratio. In triangulo rectangulo ADB habetur hæc porportio (*n.* 316.):

$$R : \cos — AD :: \cos — BD : \cos — AB.$$

In altero pariter triangulo rectangulo ADC ,

$$R : \cos — AD :: \cos — CD : \cos — AC.$$

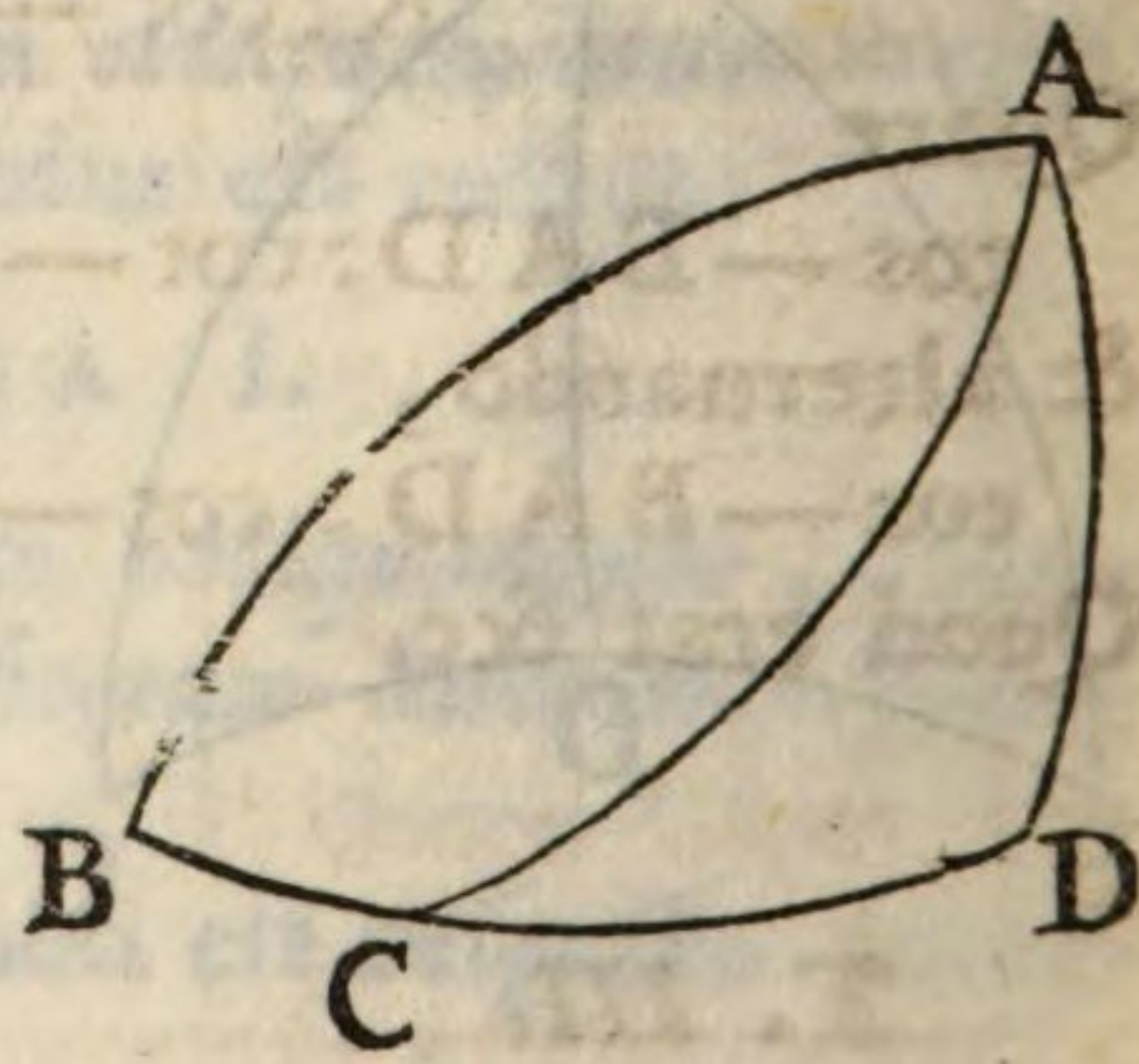
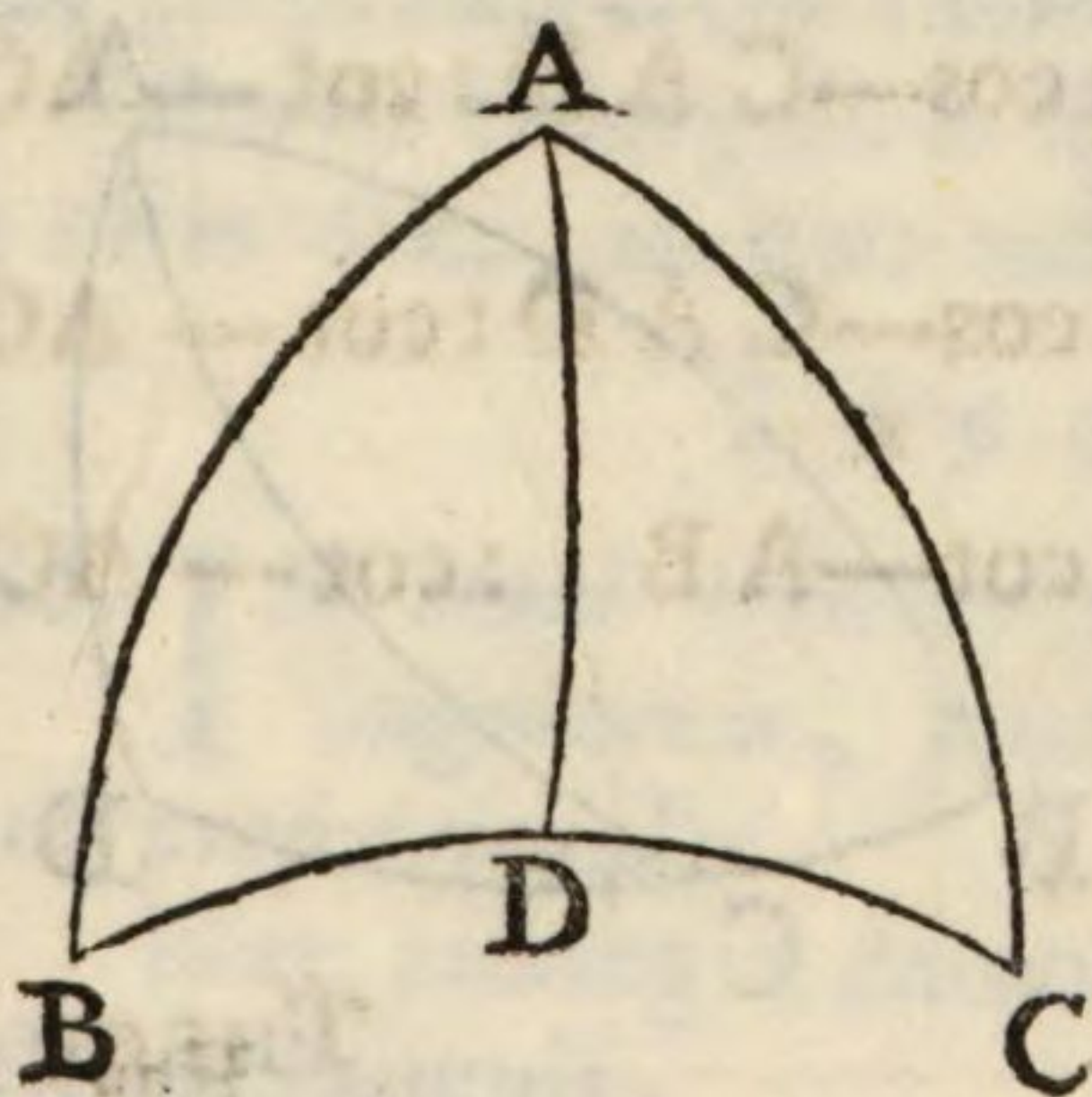
Harum duarum proportionum prima ratio est utrobi-
que eadem; ergo duæ ultimæ rationes erunt inter se
æquales; quare

$$\cos — BD : \cos — AB :: \cos — CD : \cos — AC.$$

Quod erat &c.

Scholion.

QUINQUE hæc, quæ consequuntur, Theoremata suppo-
nunt arcum a vertice anguli in suam basim perpen-
diculariter ductum.



THEO-

THEOREMA III.

388. **I**isdem positis, sinus angulorum verticalium BAD , CAD sunt directè proportionales sinibus secundis, seu cosinibus angulorum B & C ad basim; nimirum,
 $S — BAD : S — CAD :: \cos — B : \cos — C.$

Demonstratio. In triangulo rectangulo ADB habetur proportio (n. 315.),

$$R : \cos — AD :: S — BAD : \cos — ABD.$$

Similiter in altero triangulo ADC ,

$$R : \cos — AD :: S — CAD : \cos — ACD.$$

Ergo $S — BAD : \cos — ABD :: S — CAD : \cos — ACD$;
 & alternando,

$$S — BAD : S — CAD :: \cos — ABD : \cos — ACD.$$

Quod erat &c.

THEOREMA IV.

389. **I**isdem positis, sinus secundi, seu cosinus angulorum verticalium BAD , CAD , sunt directè proportionales cotangentibus laterum AB , AC ; nimirum,
 $\cos — BAD : \cos — CAD :: \cot — AB : \cot — AC.$

Demonstratio. Triangulum ADB exhibet hanc analogiam (n. 321.):

$$R : \cot — AD :: \cos — BAD : \cot — AB.$$

In triangulo pariter ADC ,

$$R : \cot — AD :: \cos — CAD : \cot — AC.$$

Quare

$$\cos — BAD : \cot — AB :: \cos — CAD : \cot — AC;$$

& alternando,

$$\cos — BAD : \cos — CAD :: \cot — AB : \cot — AC.$$

Quod erat &c.

THEOREMA V.

390. **I**isdem positis, cosinus angulorum verticalium BAD , CAD sunt reciproce proportionales tangentibus laterum AB , AC .

Demonstratio. Quoniam
 $\cot — AB : \cot — AC :: T — AC : T — AB$
 (n. 338.), erit per præced.,
 $\cos — BAD : \cos — CAD :: T — AC : T — AB$.
 Quod erat &c.

THEOREMA VI.

391. **I**isdem positis, sinus segmentorum baseos sunt directe proportionales cotangentibus angulorum ad basim; hoc est, $S — BD : S — CD :: \cot — B : \cot — C$.

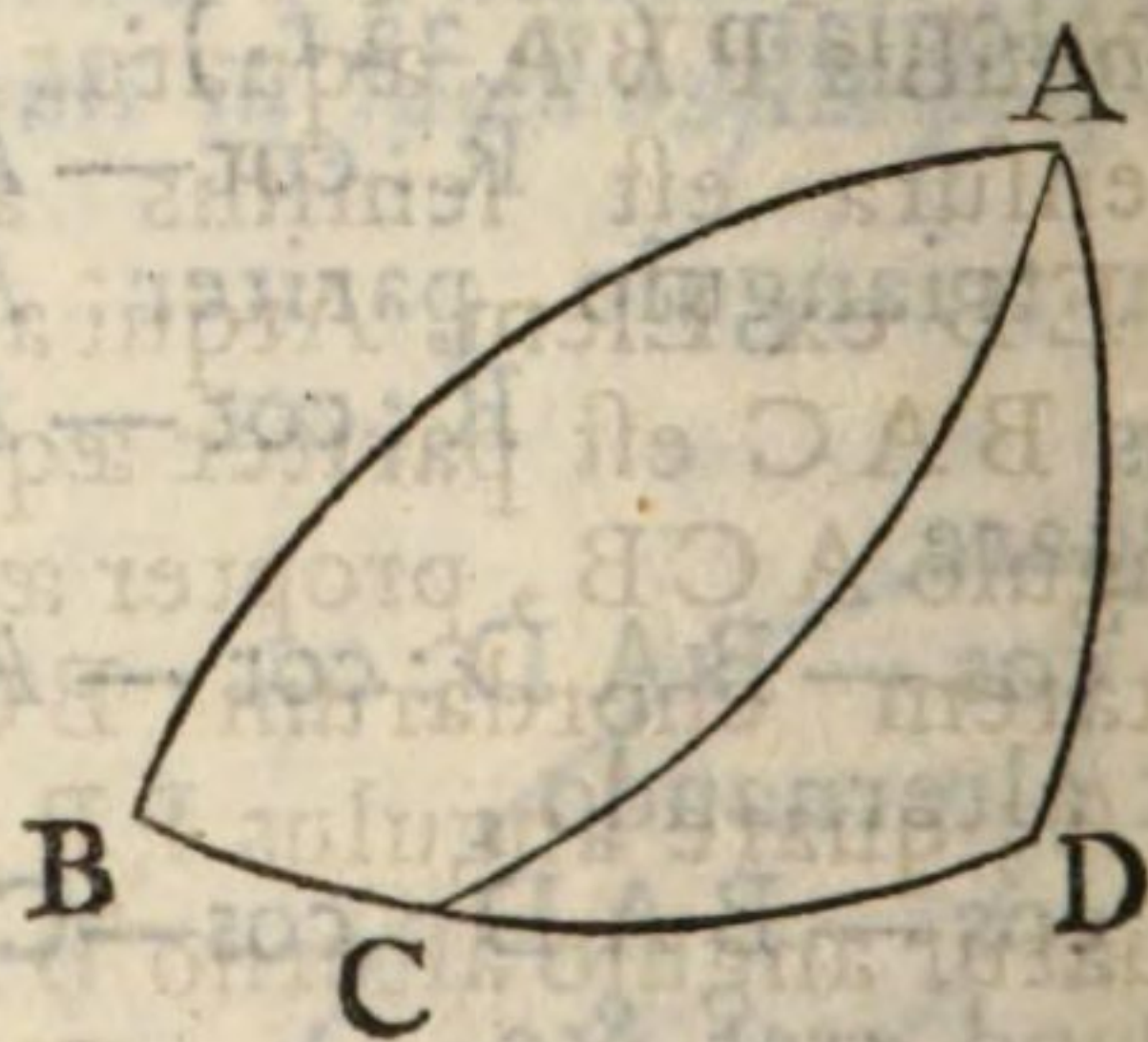
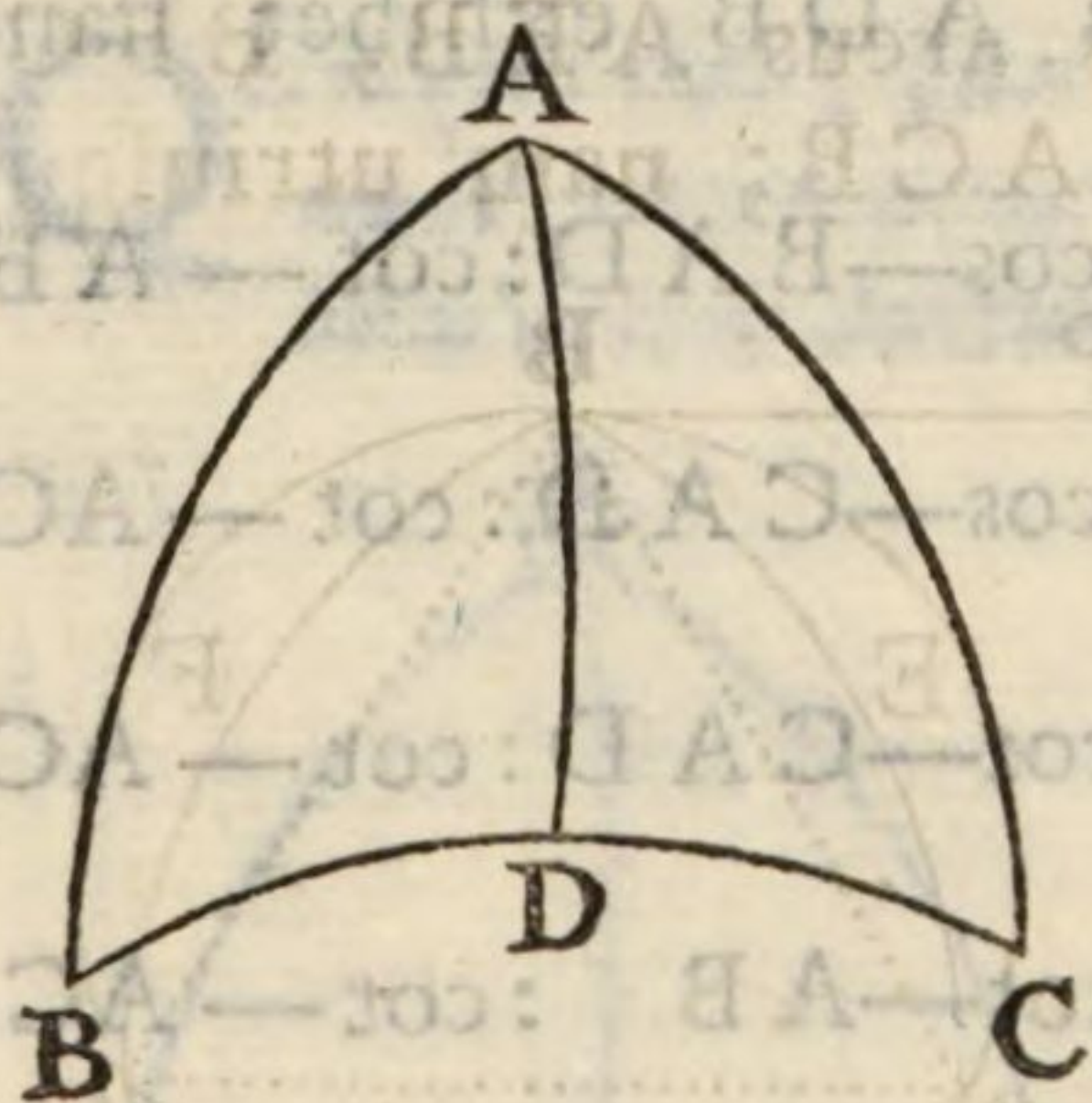
Demonstratio. In triangulo rectangulo ADB nota est hæc proportio (n. 324.):

$$R : \cot — AD :: S — BD : \cot — B.$$

In triangulo quoque ADC ,

$$R : \cot — AD :: S — CD : \cot — C.$$

Quare $S — BD : \cot — B :: S — CD : \cot — C$;
 & alternando, $S — BD : S — CD :: \cot — B : \cot — C$.
 Quod erat &c.



THEOREMA VII.

392. **I**isdem positis, sinus segmentorum baseos sunt recipro-
cè proportionales tangentibus angulorum ad basim.

Demonstratio. Nam (n. 338.)

$$\cot — B : \cot — C :: T — C : T — B$$

Ergo ex præced., $S — BD : S — CD :: T — C : T — B$.

Quod erat &c.

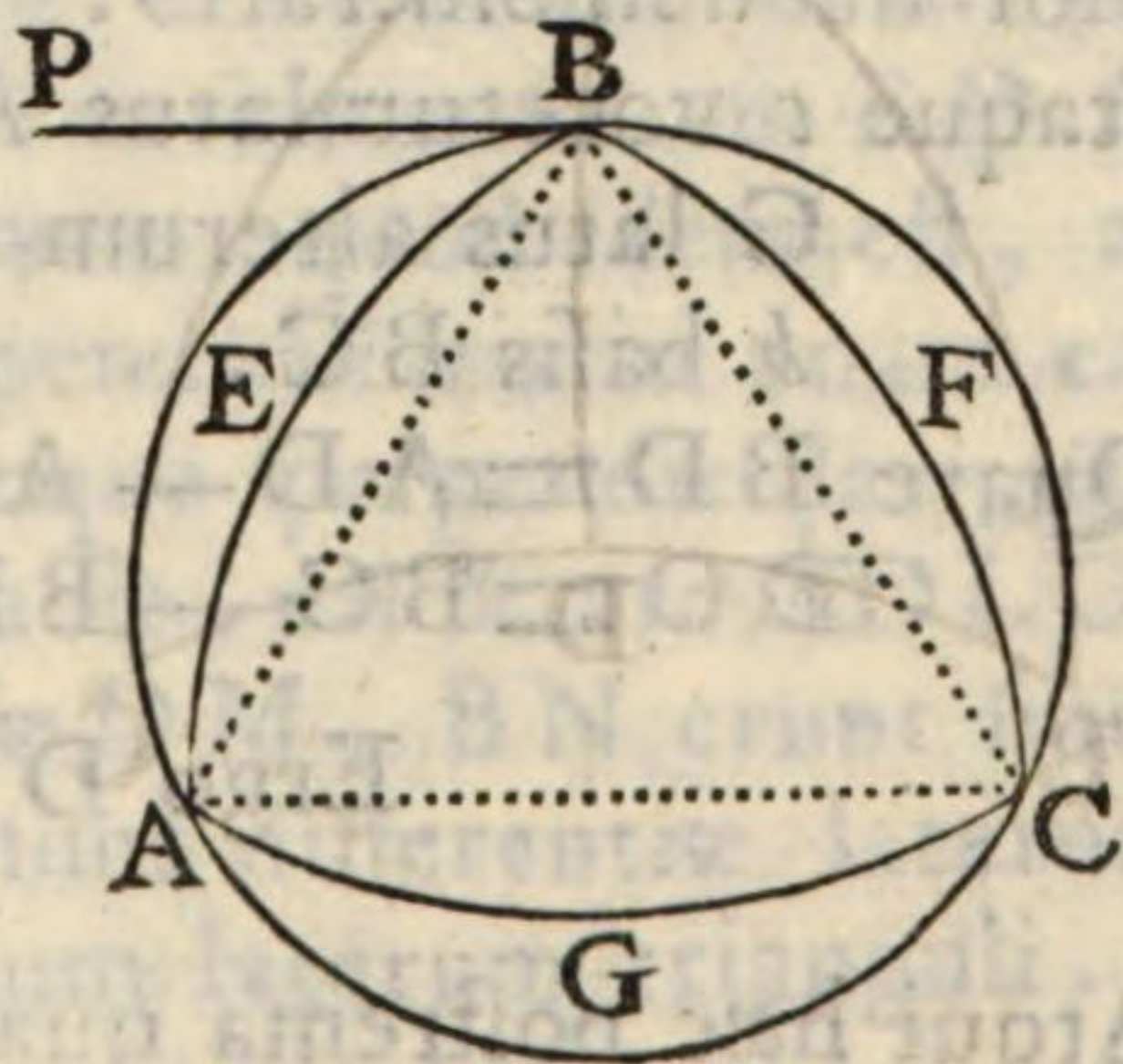
Scholion.

HÆc septem Theoremata conveniunt triangulis sphæ-
ricis obliquangulis, sive eorum partes excedant 90
gradus, sive ab iisdem deficient; uti notavimus n. 326.

LEMMA I.

393. **D**ato triangulo sphærico isoscele ABC, datâque
chordâ AC, quæ vicem basis obit, si per ver-
ticem B ducatur recta BP, quæ sit tangens circuli ABC,
cujus circumferentia transeat per tres vertices dati trian-
guli; Dico hanc rectam BP fore parallelam chordæ AC.

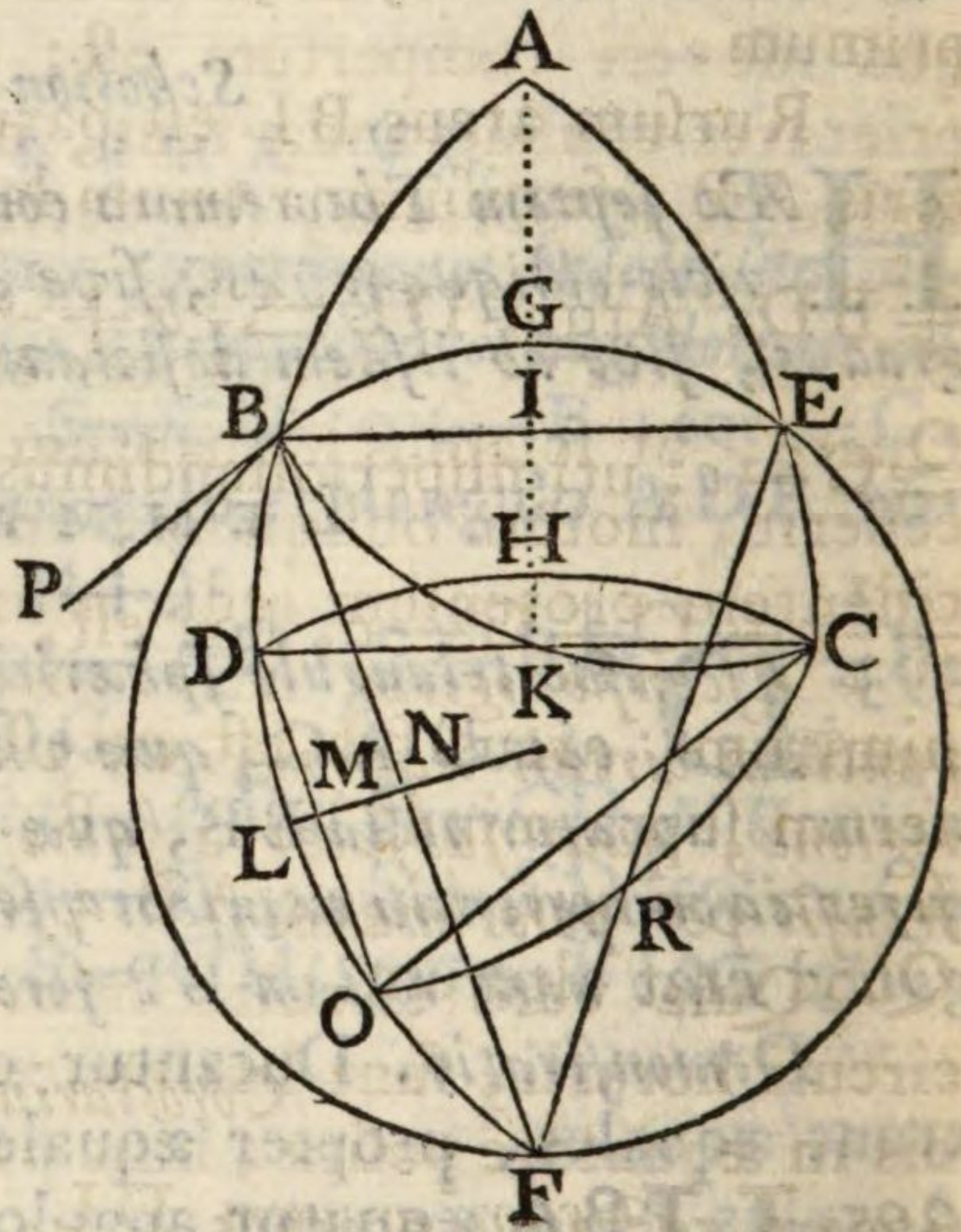
Demonstratio. Ducantur chordæ BA, BC, quæ
erunt æquales, propter æquales arcus AEB, BFC.
Angulus PBA æquatur angulo ACB; nam utriusque
mensura est semissis arcus
AEB ex Elem. Atqui angu-
lus BAC est pariter æqualis
angulo ACB, propter æqua-
litate chordarum BC &
BA; quare angulus PBA æ-
quatur angulo alterno BAC;
& consequenter ex Elem.,
tangens PB est parallela
chordæ AC. Quod &c.



L E M M A II.

394. **D**ato triangulo sphærico obliquangulo ABC , cujus duo latera AB , AC sint inæqualia, determinari potest arcus DL , vel BL , qui sit excessus semisummæ trium laterum vel supra majus latus AC , vel supra minus latus AB .

Demonstratio. In triangulo sphærico ABC producatur minus latus AB ; ac fiat $AD = AC$, & $CE = BD$. Si præterea accipiantur arcus BO & DF , æquales singuli basi BC , erit $BD = OF$, propter partem singulis communem DO ; denique, si arcus DO bifariam secetur in puncto L , erit $BL = FL$.



Ab hisce æqualitatibus progredior jam ad denominationē singularem quantitatum, ope calculi litteralis, ut planior sit demonstratio.

Itaque c vocetur latus AB ;

C latus alterum $AC = AD$;

b basis BC .

Quare $BD = AD - AB$, erit $C - c$;

$DO = BC - BD$, erit $b - C + c$;

Ergo DL erit $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$.

Atqui hæc postrema quantitas æquatur huic $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C$

+

$+\frac{1}{2}c - C$; nam substituendo $+\frac{1}{2}C$ loco $-\frac{1}{2}C$, idem facio, ac si adderem $+C$, quod in fine subtraho, adjiciendo $-C$; Ergo $DL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C$; hoc est, arcus DL est excessus semisummæ trium laterum b , C , c supra majus latus C anguli A ; nimirum, quod eodem recidit, *arcus DL est differentia majoris lateris C a semisumma trium laterum*. Quod erat primum.

Rursum arcus BL est pariter differentia parvi lateris AB a semisumma trium laterum; nam $BL = DL + BD$. Atqui $DL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C$; & $DB = C - c$; uti nuper ostendimus; Ergo $BL = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C + C - c$, hoc est, $= \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - c$; nimirum, arcus BL est excessus semisummæ trium laterum supra minus latus AB, sive, *arcus BL est differentia minoris lateris AB a semisumma trium laterum*. Quod erat alterum.

Corollarium.

395. **H**orum arcuum DL, BL determinari possunt sinus. Nam chordæ DO & BF erunt inter se parallelæ, propter æqualitatem arcuum BD & OF. Quare, si a centro sphæræ, quod idem est, ac centrum arcuum, ducatur perpendicularis in unam earum chordarum, hæc erit quoque perpendicularis alteri, & utramque bifariam secabit, uti & arcus DLO, BLF, ex Elem. Quare rectæ DM, BN erunt sinus arcuum DL, BL; qui arcus sunt differentię laterum anguli BAC a semisumma trium laterum trianguli.

THEOREMA VIII.

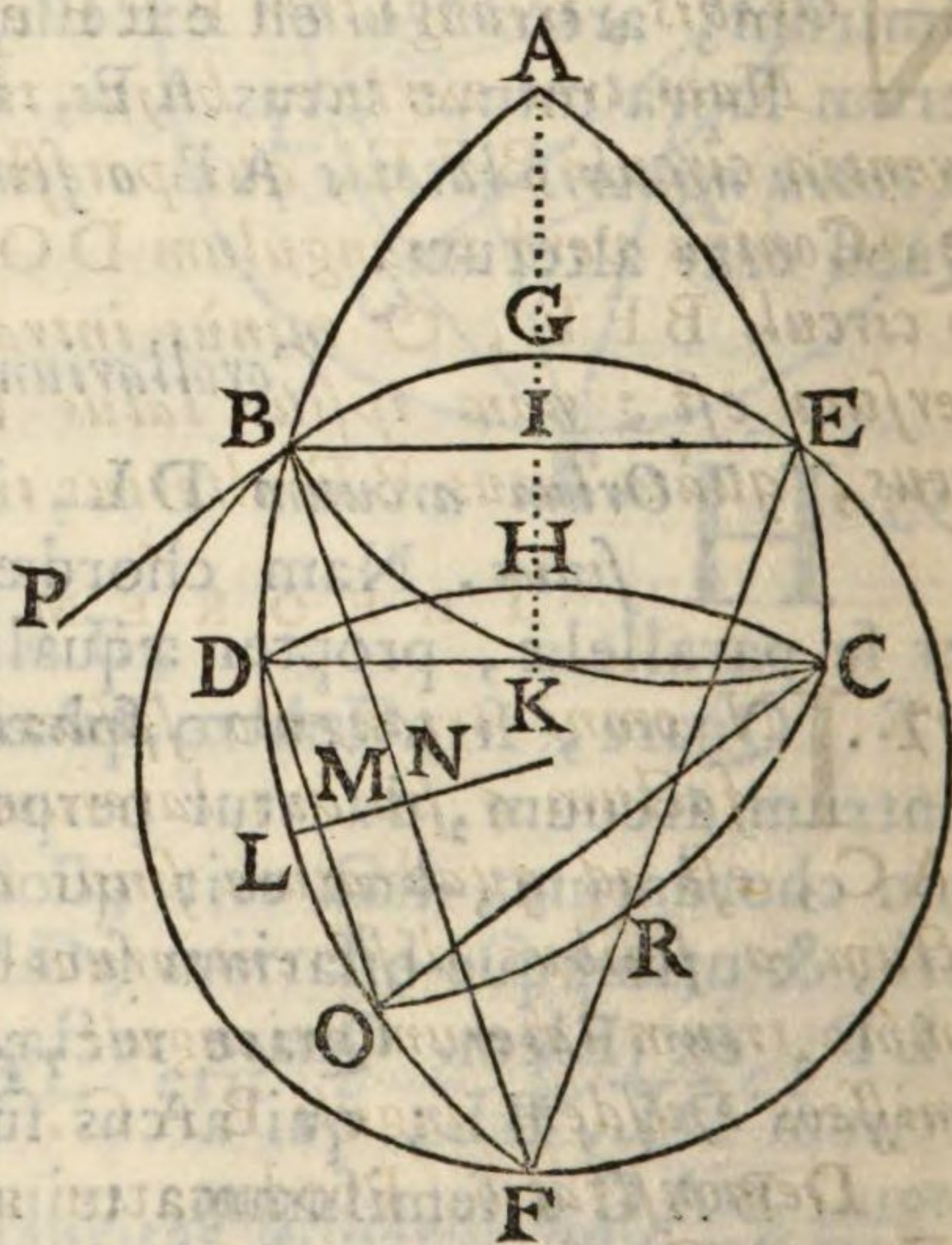
396. **I**isdem stantibus, I. si in triangulo sphærico ABC , quod non sit æquilaterum, producaturs minus latus AB anguli BAC , donec $AD = AC$; II. si a maiori latere AC subducatur portio $CE = BD$; III. si ducantur arcus maximorum circulorum BGE , DHC :

Dico, rectangulum factum a sinibus semissium horum arcuum, æquari rectangulo facto a sinibus differentiarum laterum anguli ABC a semisumma trium laterum.

Demonstratio. Huiusmodi differentiæ sunt arcus DL & BL , quorum sinus sunt DM , BN ex Corol. præced. Itaque demonstrandum est, rectangulum sinuum BI , DK , qui sunt sinus semissium arcuum BGE , DHC , æquari rectangulo facto a $DM \times BN$.

Ducatur enim recta EF , & arcus ORC , & chorda OC : consurgent duo triangula rectilinea BEF & DOC , & insuper triangulum sphæricum OBC . Præterea concipiatur circumferentia BFE descripta in superficie sphæræ, & recta PB tangens huius circuli in puncto B , quæ erit parallela chordæ OC arcus ORC , propter triangulum sphæricum isosceles OBC ex Lem. I., & ex construct. n. 394.

His positis, linea BF est parallela chor-



dæ DO, propter æqualitatem arcuum BD, OF; ut vidimus n. 394. Similiter BE est parallela rectæ DC, propter arcus æquales BD, EC. Quamobrem plana triangulorum BEF, DOC sunt invicem parallela; & anguli in B & D sunt æquales. Præterea, cùm tangens PB sit parallela chordæ OC, & recta BF parallela rectæ DO, erit angulus PBF æqualis angulo DOC. Atqui angulus PBF est pariter æqualis angulo inscripto BEF ex Elem.; ergo angulus BEF = DOC; ergo duo triangula BEF, DOC sunt similia; & consequenter

$$BE : DO :: BF : DC;$$

sumptisque semissibus harum linearum,

$$BI : DM :: BN : DK;$$

atque hinc $BI \times DK = DM \times BN$.

Quare rectangulum factum a sinibus &c.

Scholion.

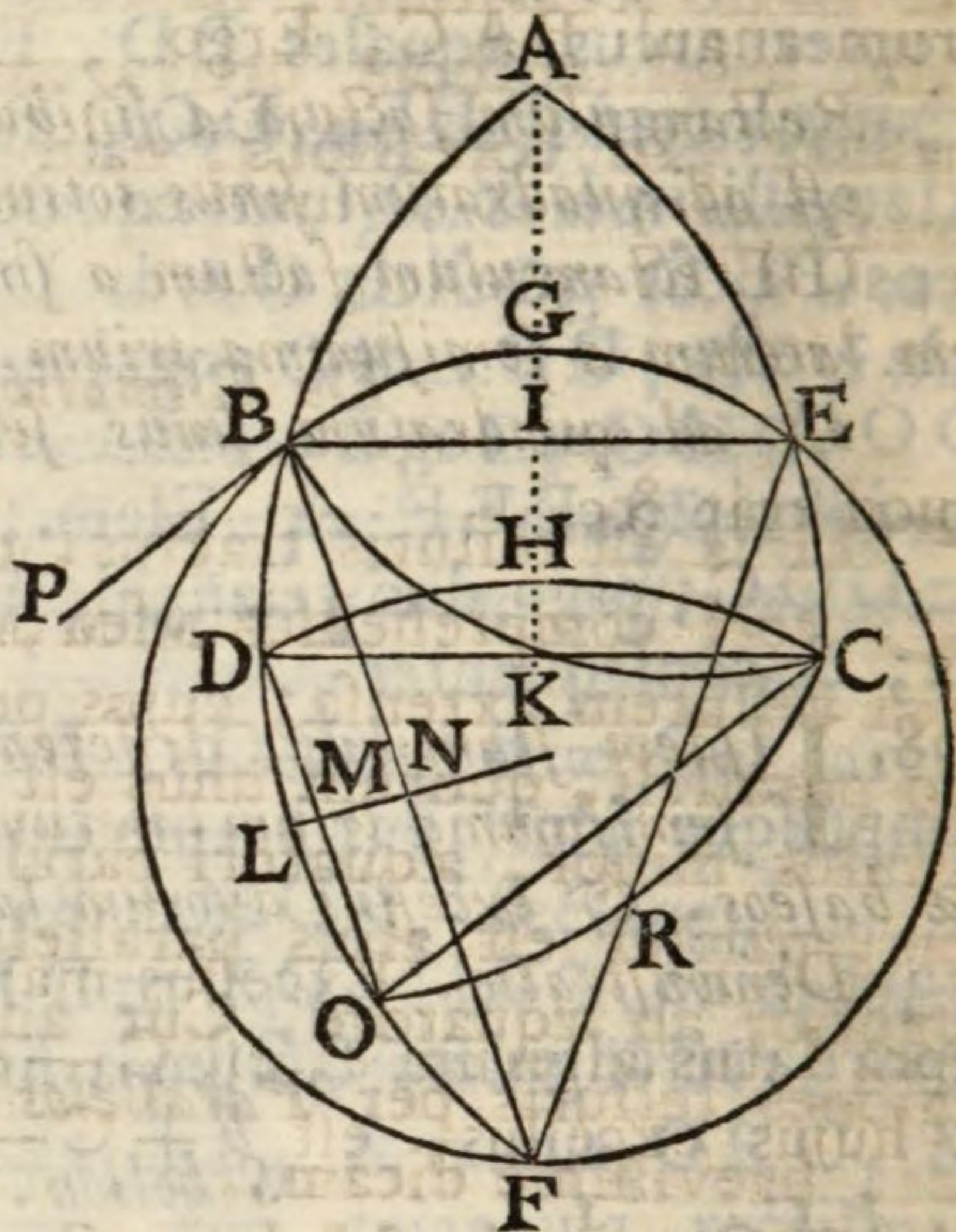
NOtabis, triangulum BEF esse in plano circuli BFE. Nam tres vertices hujus trianguli sunt in circumferentia circuli BFE, qui potest non esse maximus sphærae. Contra verò triangulum DOC non est in eodem plano circuli BFE; & minùs intra soliditatem sphærae demersum est; nam ipsius latus DO est chorda minoris arcus, quàm latus BF alterius trianguli.

THEOREMA IX.

397. **I**N omni triangulo sphærico ABC, rectangulum factum a sinibus laterum anguli cujuscvis, puta, BAC, est ad quadratum sinus totius; Ut rectangulum factum a sinibus differentiarum horum laterum a semisumma trium laterum trianguli, est ad quadratum sinus semisseos ejusdem anguli BAC.

Demonstratio. Producat arcus AB in D; & fiat $AD = AC$; sumaturque $AE = AB$; ducantur insu-

per duo maximorum circularum arcus, quorum unus transeat per B & E, & alter per D & C; denique describatur arcus perpendicularis AGH, qui secabit angulum BAC bifariam, perinde ac quemlibet eorum arcuum BGE, DHC. Duo triacula AGB, AGE erunt perfectè æqualia, uti duo reliqua AHD, AHC (n. 265.).



His positis, habebitur in triangulo rectangulo AGB hæc proportio (n. 304.):

Sinus totus est ad sinum lateris AB;

Uti sinus anguli BAG est ad sinum BG.

Similiter in triangulo AHD, erit

Sinus totus ad sinum AD, seu AC;

Uti sinus anguli DAH, seu BAG, est ad sinum lat. DH;

tum multiplicatis inter se terminis primæ proportionis per terminos secundæ, confurget hæc tertia proportio:

Quadratum sinus totius

est ad rectangulum factum a sinibus laterum AB, AC;

Uti quadratum sinus ang. BAG, qui est semissis ang. BAC,

est ad rectangulum factum a sinibus arcuum BG, DH.

Et invertendo,

Rectangulum factum a sinibus laterum AB, AC,

est ad quadratum sinus totius;

Uti rectangulum factum a sinibus arcuum BG, DH,

est ad quadratum sinus semisseos anguli BAC.

Atqui

Atqui rectangulum factum a sinibus arcuum BG, DH æquatur rectangulo facto a sinibus differentiarum laterum anguli BAC; Ergo

Rectangulum factum a sinibus laterum AB, AC, est ad quadratum sinus totius;

Uti rectangulum factum a sinibus differentiarum horum laterum a semisumma trium laterum trianguli, est ad quadratum sinus semisseos anguli BAC.

Quod erat &c.

LEMMA.

398. **I**isdem stantibus, differentia majoris lateris C a semisumma trium laterum, æquatur semidifferentiæ baseos, & excessus duorum laterum $C - c$.

Demonstratio. Excessus majoris lateris C anguli A supra latus alterum c, est $C - c$; ergo summa baseos, & hujus excessus, est $b + C - c$; cujus semissis est $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$. Subducatur a basi excessus $C - c$:

fiet $b - C + c$; cujus semissis est $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$.

Itaque semisumma baseos, & excessus unius lateris anguli A supra latus alterum, est $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$.

Semidifferentia baseos, & ejusdem excessus, est $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$.

Atqui quantitas litteralis $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$ exprimit pariter differentiam minoris lateris c a semisumma trium laterum trianguli; nam hæc differentia, sive excessus semisummæ $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$ supra latus c, est

$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}c$; Ergo differen-

tia

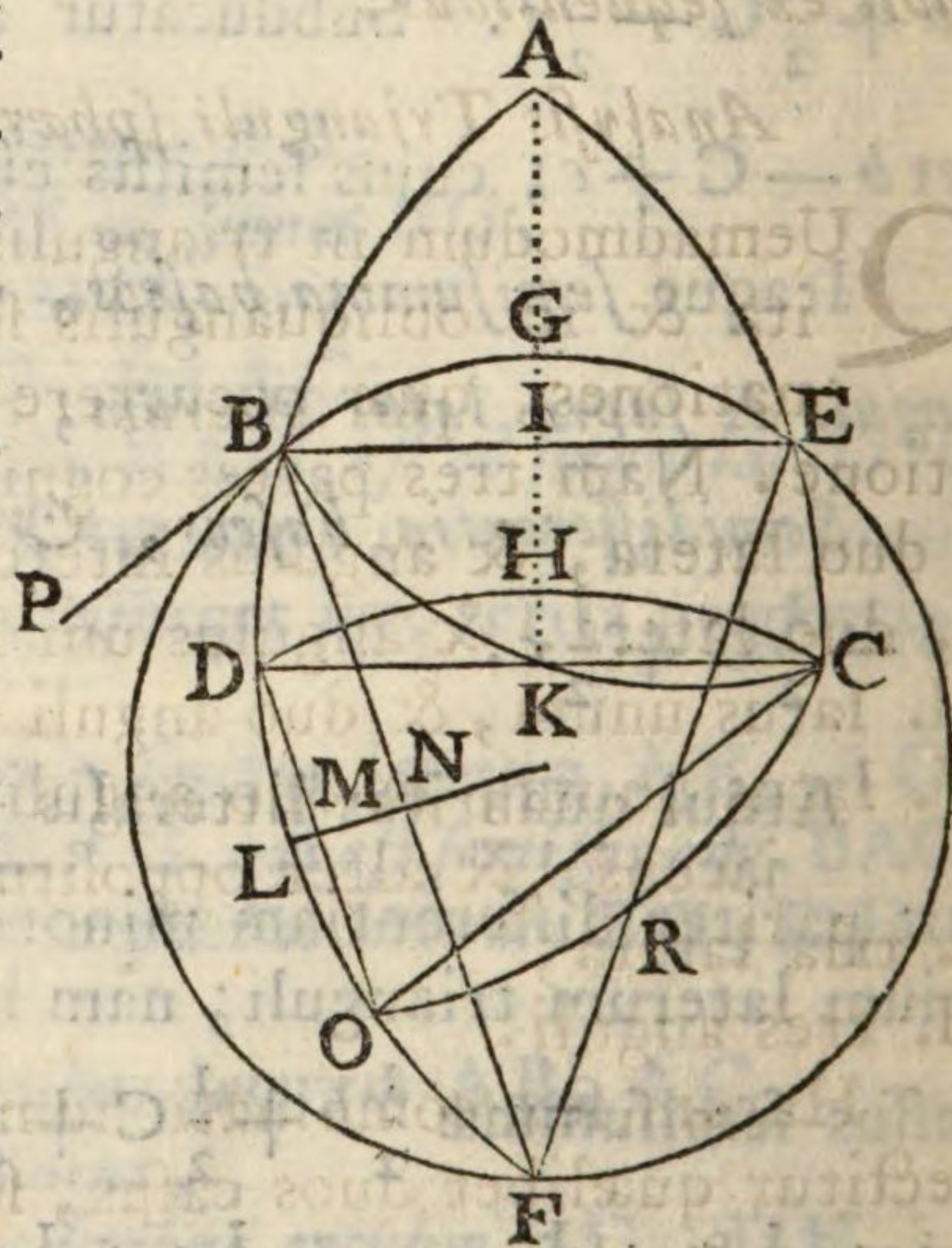
tia minoris lateris c a semisumma trium laterum, æquatur semisummæ baseos b , & excessus $C - c$.

Similiter quantitas altera litteralis $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$, quæ repræsentat semidifferentiam baseos, & ejusdem excessus $C - c$, exprimit pariter differentiam majoris lateris C a semisumma trium laterum trianguli; nam hæc differentia est $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c - C = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}c$. Ergo differentia majoris lateris C a semisumma trium laterum, æquatur semidifferentiæ baseos b , & excessus $C - c$. Quod erat &c.

THEOREMA X.

399. **R**ectangulum factum a sinibus laterum anguli A , est ad rectangulum factum a sinu semisummæ baseos, & excessus $C - c$, in sinum semidifferentiæ baseos, & ejusdem excessus; Utî quadratum sinus totius est ad quadratum sinus semisseos anguli A .

Demonstratio. Nam per Lemma præced., substitui poterit in analogia Theorematis n. 397. P rectangulum factum a sinu semisummæ baseos, & excessus $C - c$, in sinum semidifferentiæ ejusdem baseos, & ejusdem excessus; substitui, inquam, poterit loco rectanguli facti a sinibus differentiarum laterum



anguli

anguli A, a semisumma trium laterum trianguli. Atqui hinc obtinebitur dicta proportio; constat itaque propositum.

Scholion.

400. **D**iximus, logarithmos esse numeros artificiales, substitutos pro naturalibus, aptos ad solvendam multiplicationem sola additione, & divisionem sola subtractione. Itaque, ut facile inveniatur angulus trianguli cujusvis, cujus tria latera sint cognita, opus erit, simul addere logarithmos sinuum, qui sunt radices reſtangiuli constituentis secundum terminum analogiæ Theorematis, ac rursus hanc summam addere logarithmo tertii termini, sive duplo logarithmo radii. Si ab hac ultima summa subducatur summa logarithmorum sinuum primi termini, residui semissis, erit logarithmus sinus semisseos anguli quæſiti. Hæc methodus, ejusque usus clariùs constabit ex sequentibus.

Analysis Trianguli sphærici obliquanguli.

Quemadmodum in triangulis sphæricis reſtangulis, ita & in obliquangulis sex sunt diversæ combinationes, quæ occurrere possunt in eorum resolutione. Nam tres partes cognitæ possunt esse

- I. duo latera, & angulus interceptus;
- II. duo latera, & angulus uni laterum oppositus;
- III. latus unum, & duo anguli eidem lateri adjacentes;
- IV. latus unum, & duo anguli, quorum unus sit adjacentis, & alter oppositus eidem lateri;
- V. tria latera;
- VI. tres anguli.

Harum sex combinationum prima, & tertia complectitur quælibet duos casus; secunda, & quarta tres; quinta, & ultima casum unicum. Hinc duodecim casuum resolutio comprehendetur sex sequentibus Problematis,

matibus, quibus faciem præferent regulæ quædam generales, quas subjicio.

Monitum.

401. **H**anc hypotesim ut rite concipias, meminisse debes, triangulum sphæricum illud unicè a nobis considerari, & definiri, quod tribus arcibus maximorum circulorum in sphæræ superficie continetur. Et si enim arcus circulorum non maximorum, tam angulos, quàm triangula sphærica constituent, nibilo tamen minus hujusmodi anguli, atque triangula a Trigonometricis non considerantur, ut aliàs diximus.

REGULÆ GENERALES

In Triangulis obliquangulis.

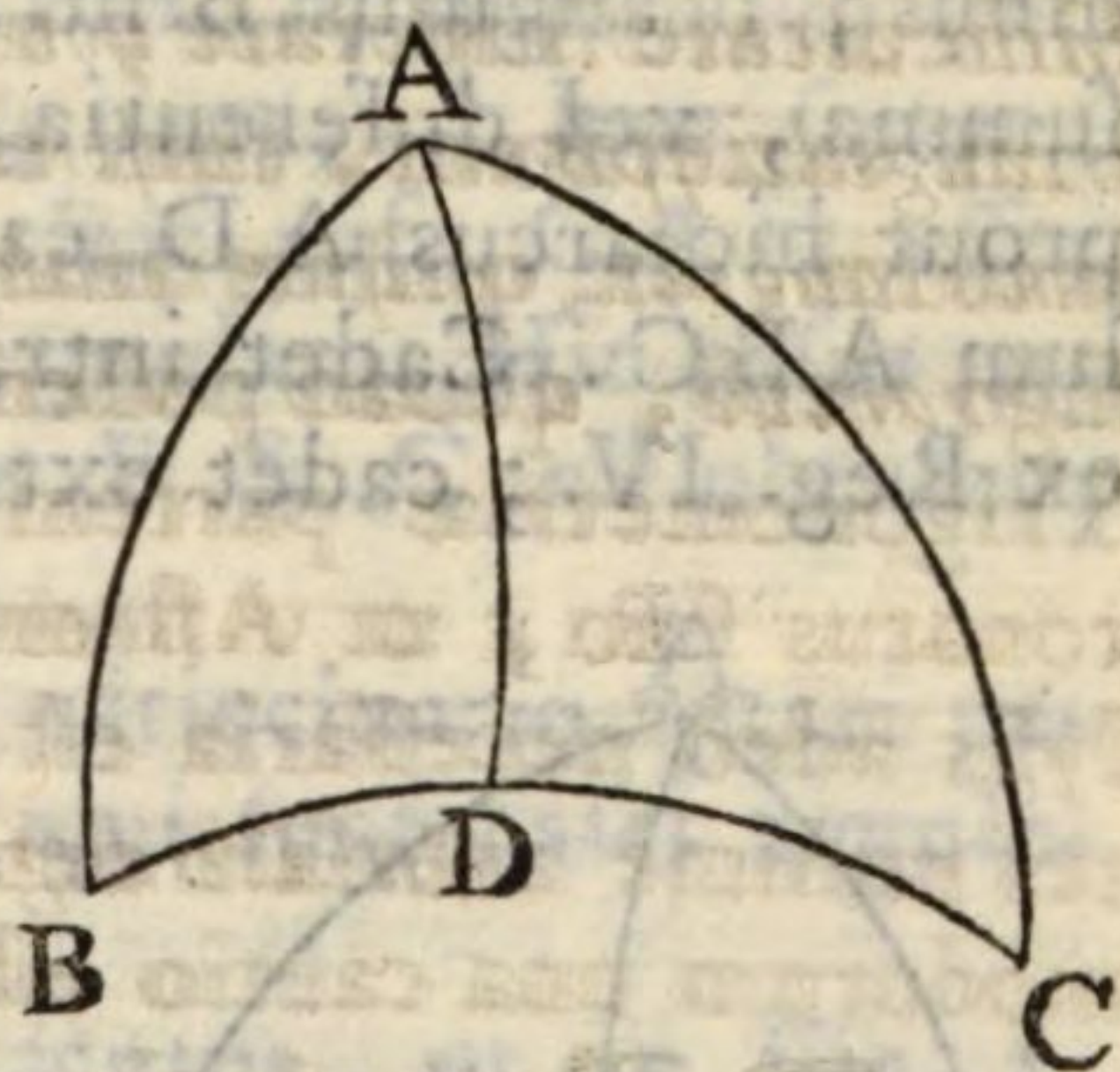
402. **R**egula I. In omni triangulo sphærico concipi semper poterit semicircumferentia maximi circuli, quæ transeat per verticem anguli sphærici, & sit perpendicularis ipsius basi, utrinque productæ, si opus sit. Licebit itaque semper imaginari duos arcus ductos a vertice perpendiculariter in hanc basim, quorum unus sit supplementum alterius ad semicircumferentiam, ita ut unus minor sit, alter major quadrante circuli; nam hujusmodi arcus sunt partes semicircumferentiæ divisæ in vertice anguli.

403. *Regula II.* Quando duo anguli basi adjacentes, sunt ejusdem speciei, vel ambo acuti, vel ambo obtusi, alteruter duorum arcuum perpendicularium cadit intra triangulum (n. 277.). Et reciprocè, si unus horum duorum arcuum cadat intra triangulum, duo anguli ad basim sunt ejusdem speciei (n. 276.). Sin autem duorum arcuum perpendicularium neuter cadat intra triangulum, duo anguli ad basim sunt diversæ speciei.

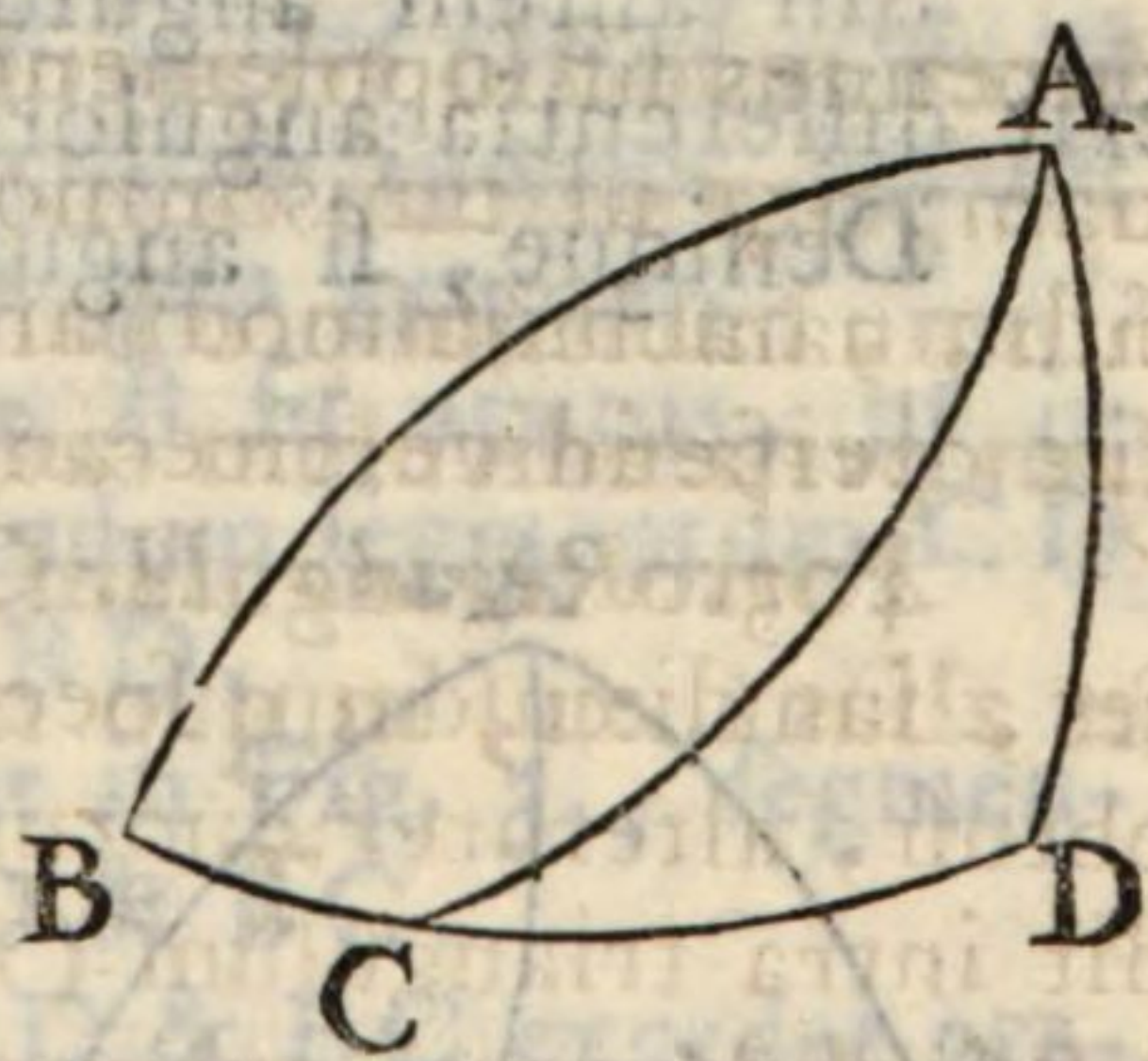
Scholion.

404. **I**N hisce regulis supponitur, summitatem anguli basi oppositi, non esse polum hujus basis; aliter omnes arcus ab hoc vertice in basim ducti, perpendiculares forent eidem basi, perinde ac duo latera (n. 232.).

405. *Regula III.* Si duo anguli B & C ad basim sint acuti, arcus perpendicularis A D, qui intra triangulum cadit, minor est quadrante circuli. Nam in triangulo A D B, rectangulo in D, latus A D sequitur speciem anguli B oppositi (n. 274. 275.). Eadem de causa, si duo anguli ad basim sint obtusi, arcus perpendicularis, qui intra triangulum cadit, major erit quadrante circuli.



406. *Regula IV.* Arcus a vertice anguli perpendiculariter in suam basim ductus, & qui cadit versùs partem anguli acuti ejusdem basis, minor est quadrante circuli. Et arcus alter perpendicularis basi, qui cadit ad partes anguli obtusi ejusdem baseos, major est quadrante circuli. In triangulo B A C angulus B sit acutus, & angulus C obtusus; perspicuum est arcum perpendicularem A D, qui cadit versùs partes anguli acuti B, minorem esse quadrante circuli.

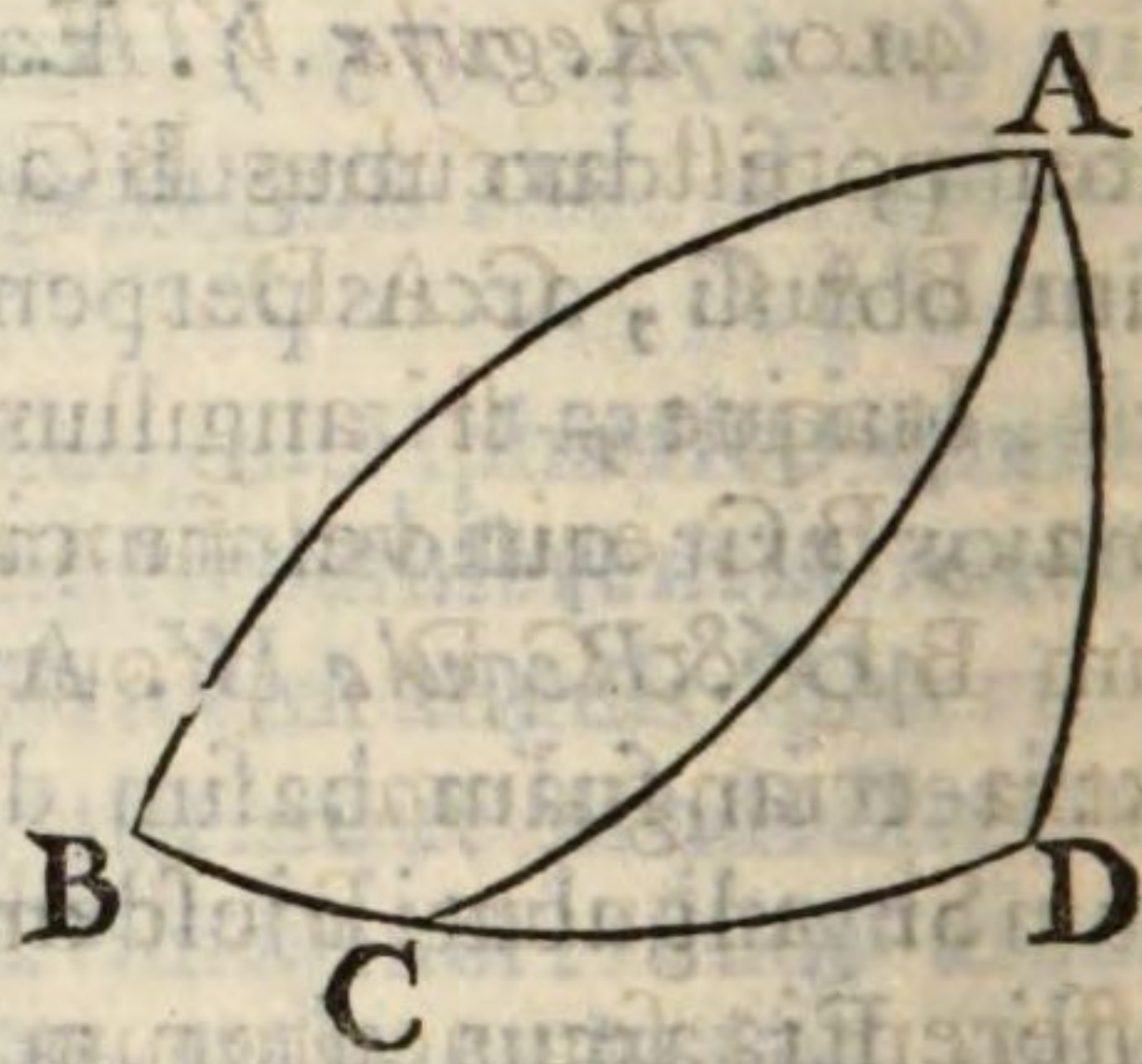
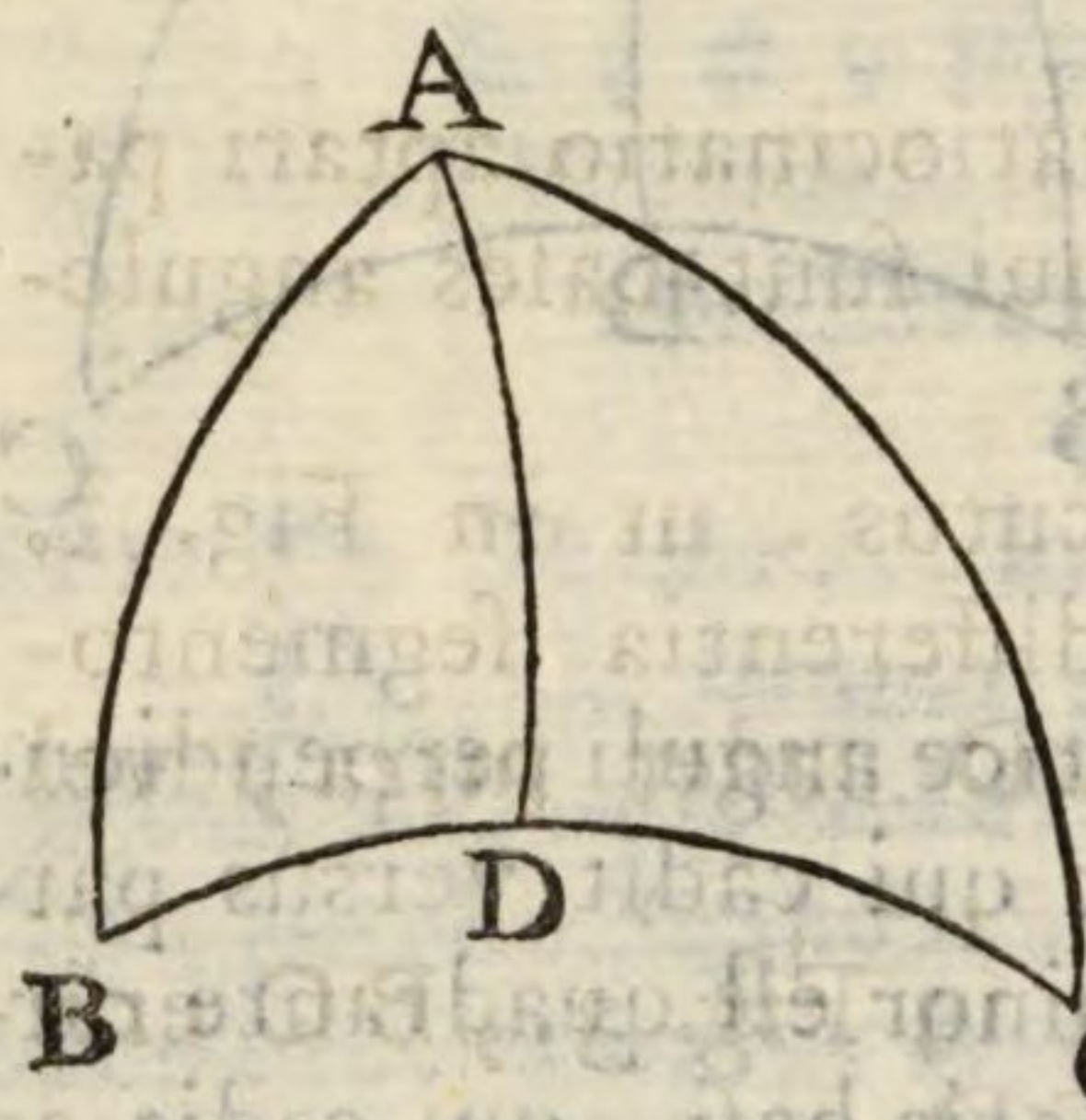


407. *Regula V.* Quamobrem, quando duo anguli B & C sunt acuti, uterque flectitur versùs minorem arcum perpendicularem A D, qui proinde cadit intra triangulum B A C. Si duo anguli sint obtusi, ambo respi-

respiciunt majorem arcum perpendicularem, qui pariter cadit intra triangulum.

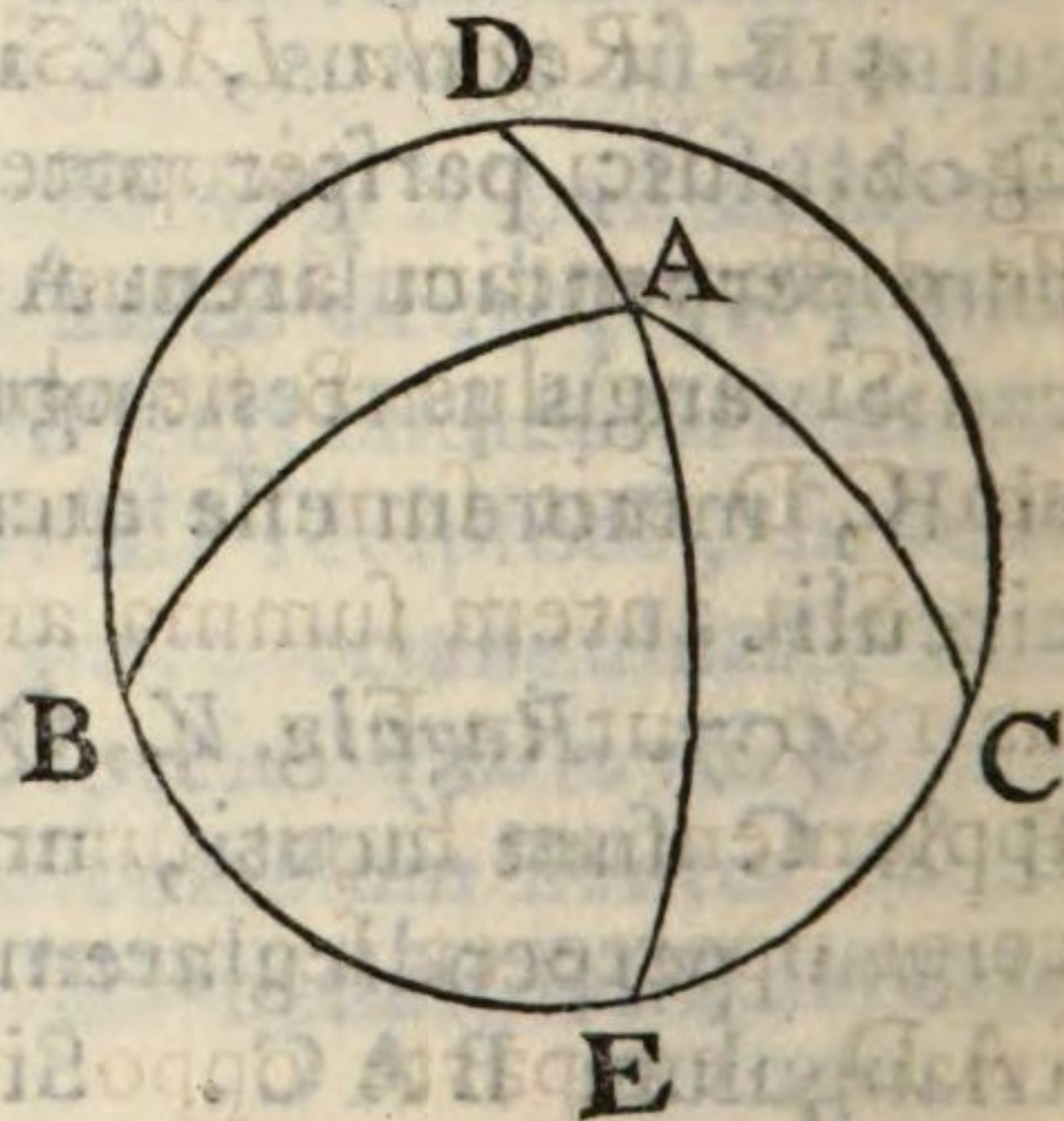
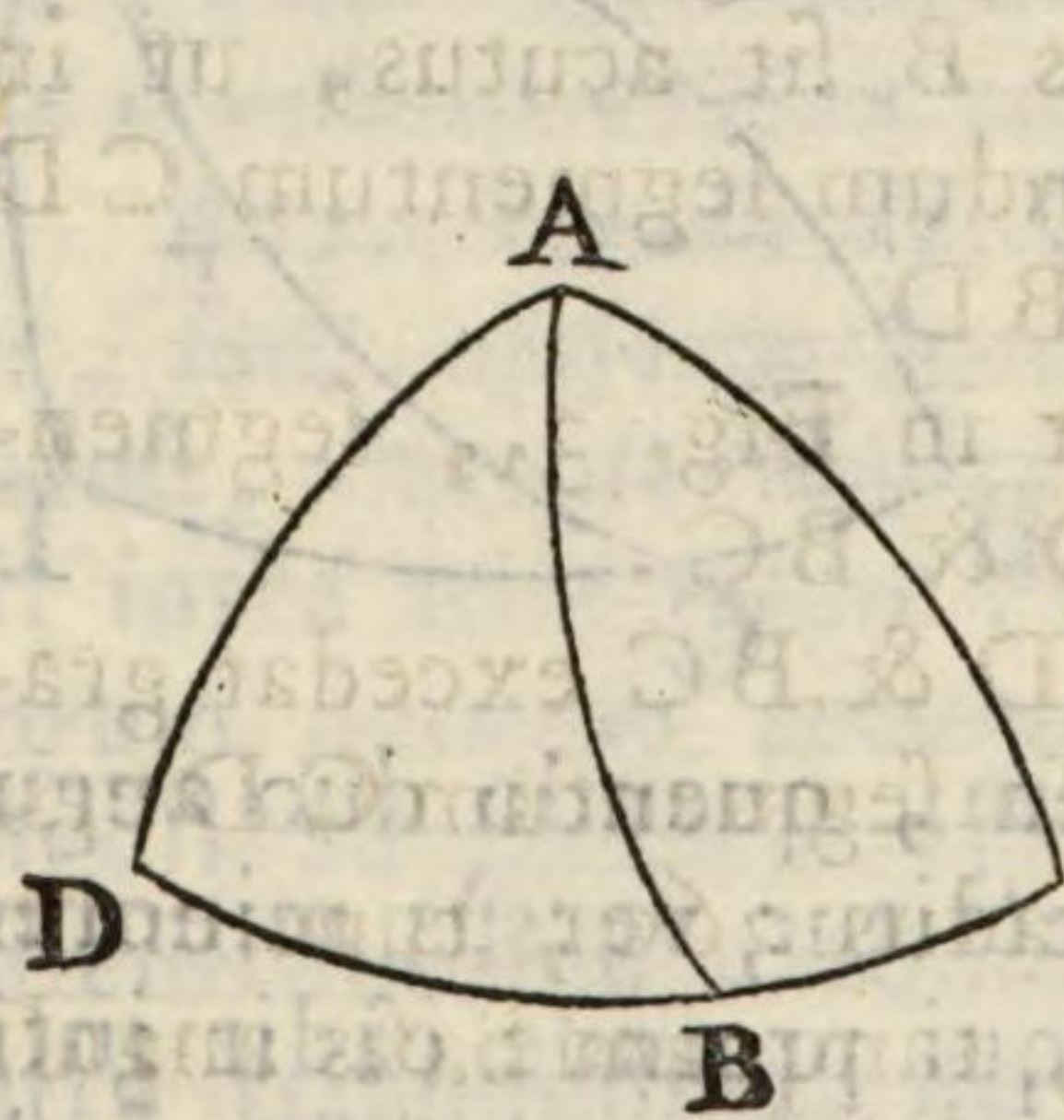
Denique, si angulorum alter sit obtusus, & alter acutus, neuter duorum arcum perpendicularem cadit intra triangulum (n. 277.). Conversæ harum regularum sunt similiter veræ (n. 276.).

408. *Regula VI.* Quoniam angulus acutus semper respicit arcum perpendicularem AD , minorem 90 gradibus; si angulus B sit acutus, erit angulus BAC vel summa, vel differentia angulorum BAD & CAD , prout hic arcus AD cadet intra, vel extra triangulum ABC . Cadet intra, si angulus C sit etiam acutus ex Reg. IV.; cadet extra, si angulus C sit obtusus.



Sin autem angulus B sit obtusus, angulus BAC erit differentia angulorum BAD , CAD .

Denique, si angulus C sit pariter obtusus, erit



angu-

angulus BAC supplementum summæ horum duorum angulorum BAD , CAD ad gradus 360. In hoc casu major arcus perpendicularis AE cadet intra triangulum ABC .

409. *Regula VII.* Dici pariter potest, quod, quando angulus B est acutus, ut in Fig. 2., CAD est differentia angulorum BAC , BAD .

Si angulus B sit obtusus, ut in Fig. 3., CAD erit summa angulorum BAC , BAD ; dummodo hæc summa sit minor gradibus 180; nam, si hæc summa esset major 180 gradibus, in hoc casu CAD esset supplementum summæ ad 360 gradus. Hic casus occurrit, quando uterque angulus B & C est obtusus, ut in Figura 4.

410. *Regula VIII.* Eadem ratiocinatio aptari pariter potest arcibus BC , CD , qui sunt bases angulorum BAC , CAD .

Itaque, si angulus B est acutus, ut in Fig. 1. & 2., BC erit vel summa, vel differentia segmentorum BD & CD , prout arcus AD cadet intra, vel extra triangulum.

Si angulus B est obtusus, ut in Fig. 3., BC erit differentia segmentorum BD & CD .

Denique, si duo anguli B & C sint obtusi, ut in Fig. 4., arcus BC erit supplementum summæ horum duorum arcuum BD & CD , ad 360 gradus.

411. *Regula IX.* Si angulus B sit acutus, ut in Fig. 2., dici pariter potest, secundum segmentum CD esse differentiam arcuum BC & BD .

Si angulus B sit obtusus, ut in Fig. 3., segmentum CD erit summa arcuum BD & BC .

Sin autem summa arcuum BD & BC excedat gradus 180, ut in Fig. 4., in hoc casu segmentum CD erit supplementum hujus summæ ad gradus 360; tunc enim accipi oporteret segmentum CD , tanquam basis anguli CAD , ex parte opposita arcui AB .

Scholion.

HÆc omnia palam constant, si rite concipiatur positio laterum AB & AC respectu perpendicularis AD ; hæc autem positio pender a specie angulorum B & C .

Monitum I.

412. **S**I quando tres partes datæ in analysi trianguli, sint vel tria latera, vel tres anguli; vel tres partes datæ, & quæsitæ, sint oppositæ, binæ binis, necesse non est, ut concipiatur arcus perpendicularis ab uno trium angulorum ductus; qui tamen necessarius erit in reliquis casibus; uti mox constabit.

Si tres partes cognitæ sese invicem consequantur, arcus perpendicularis duci debet ab una trium partium, quæ sit extrema, quin transeat per quæsitam. Voco autem partem extremam, primam, & tertiam.

Contra verò, si trium partium datarum duæ dumtaxat sint deinceps consequentes, arcus perpendicularis transire debet per partem quæsitam. Hæc omnia subjectis exemplis multò planius constabunt.

Monitum II.

413. **I**N sequentibus Problematis arcum basi perpendicularem nos semper illum usurpabimus, qui cadit versùs partes anguli acuti, ac proinde qui minor est gradibus 90 ; sive hic arcus cadat intra, sive extra triangulum.

PROBLEMA I.

414. **D**Atis duobus lateribus BA , BC trianguli sphaerici BAC , & angulo B ab iisdem intercepto, invenire I. duos reliquos angulos C & A , II. tertium latus AC .

Re-

Resolutio. Quoniam hujus Problematis tres partes cognitæ sese immediatè consequuntur, concipiatur arcus perpendicularis AD , ab una extremarum cognitarum ductus (*n.* 413.), qui necessariò cadet in alteram extremam partem cognitam, & productam, si opus sit.

In triangulo rectangulo ADB , in quo datur angulus rectus D , hypotenusa AB , & angulus ABD , qui est semper acutus, sive sit idem angulus B primi trianguli ABC , sive sit ejus supplementum; in hoc, inquam, triangulo ADB , quærat segmentum, sive latus BD , per hanc analogiam, quæ est inversa illius, quæ exhibetur *n.* 321.

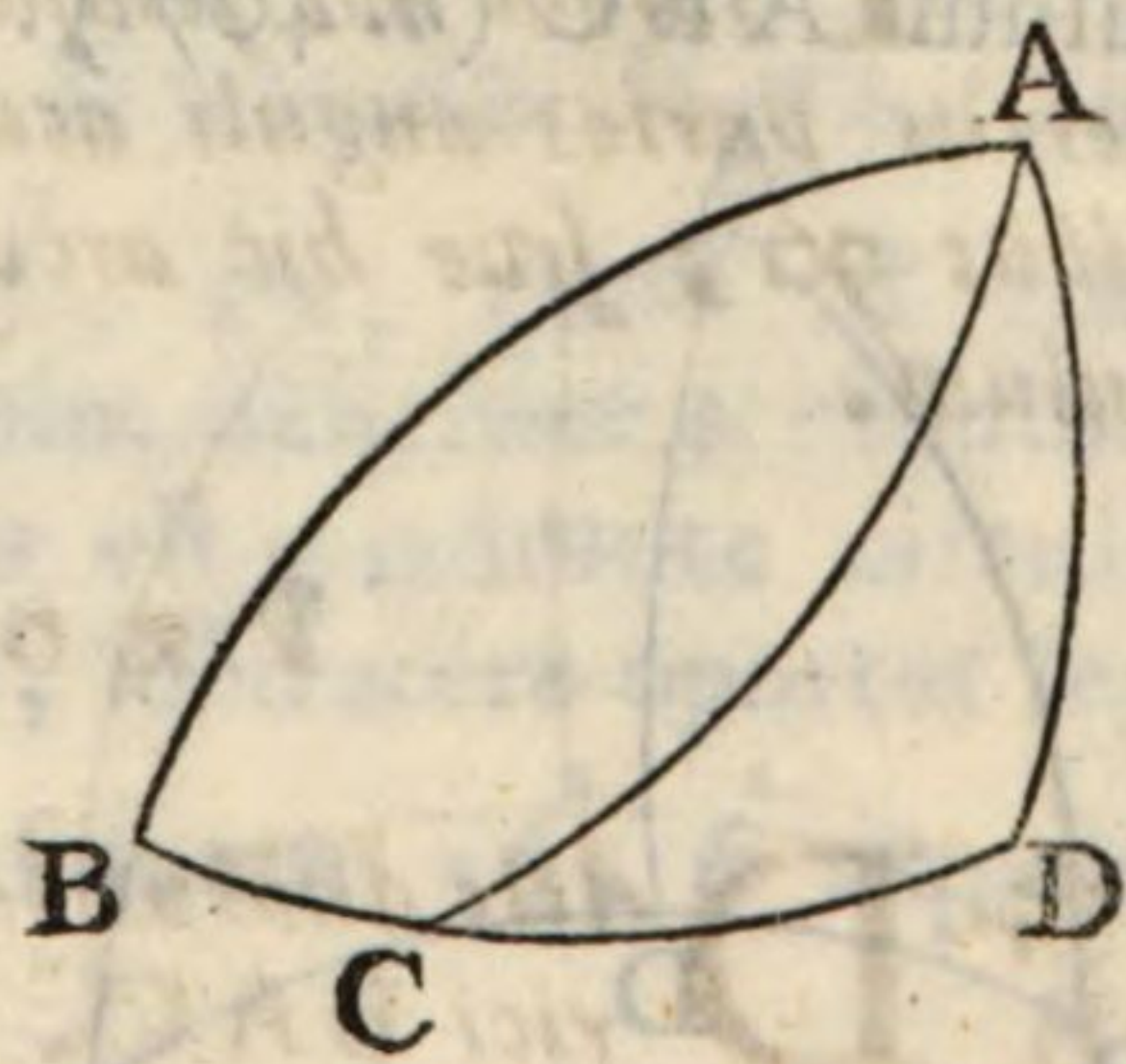
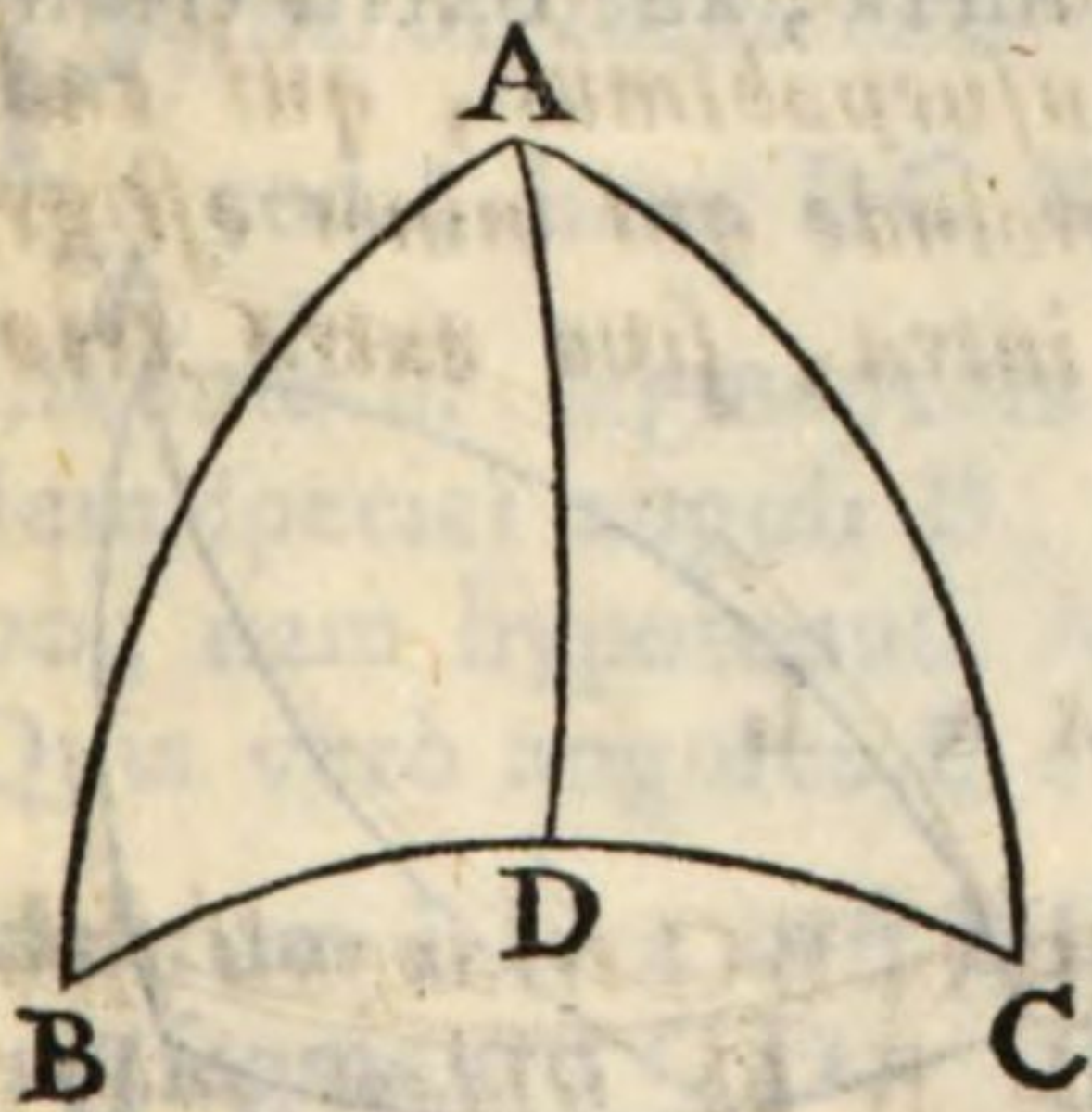
Cosinus anguli cogniti B
est ad sinum totum;

Ut cotangens hypotenusæ AB

est ad cotangentem lateris quæsiti BD;

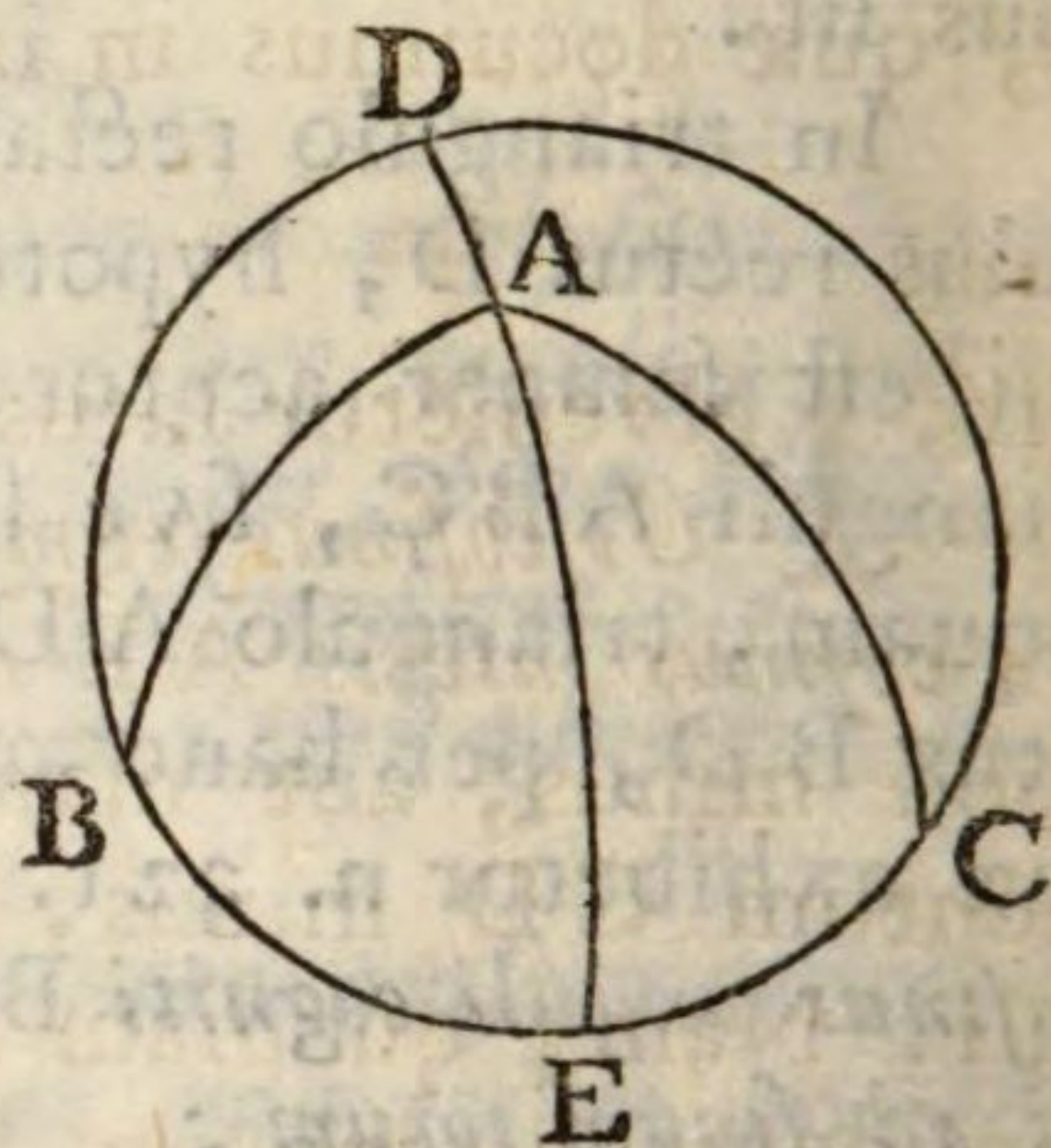
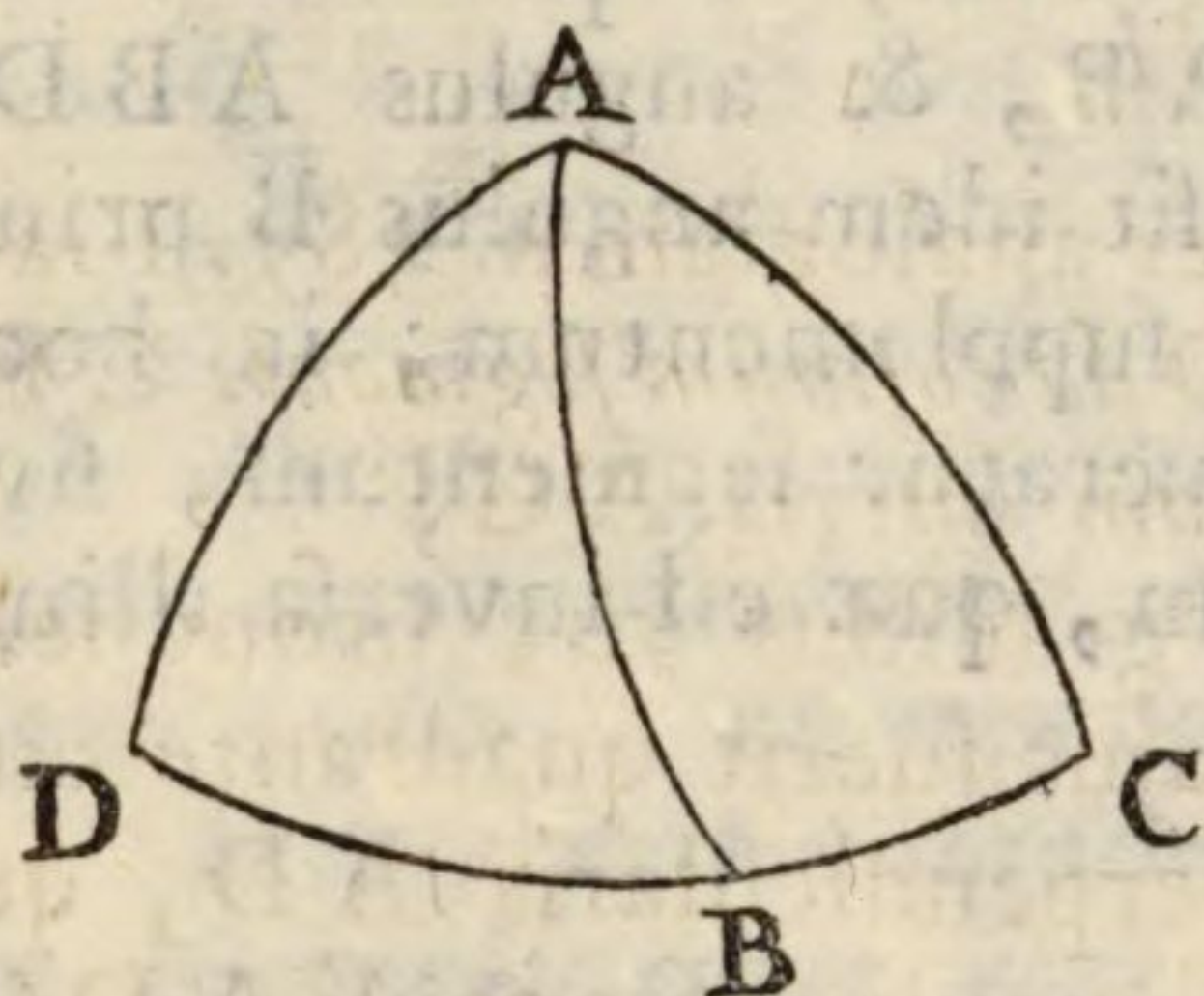
quod erit ejusdem speciei, in qua est hypotenusa AB (*n.* 296.); nam angulus ABD est semper acutus.

Cognito primo segmento BD , invenietur aliud segmentum CD , quod erit differentia inter BC , BD , si angulus ABC sit acutus (*n.* 411.).



Sin autem angulus ABC fit obtusus, segmentum CD erit summa laterum BC , BD , quoties hæc summa non excedit gradus 180 .

Quòd si excedat gradus 180 , segmentum CD est supplementum summæ ad 360 gradus (*n.* 411.). His animadversis, fit



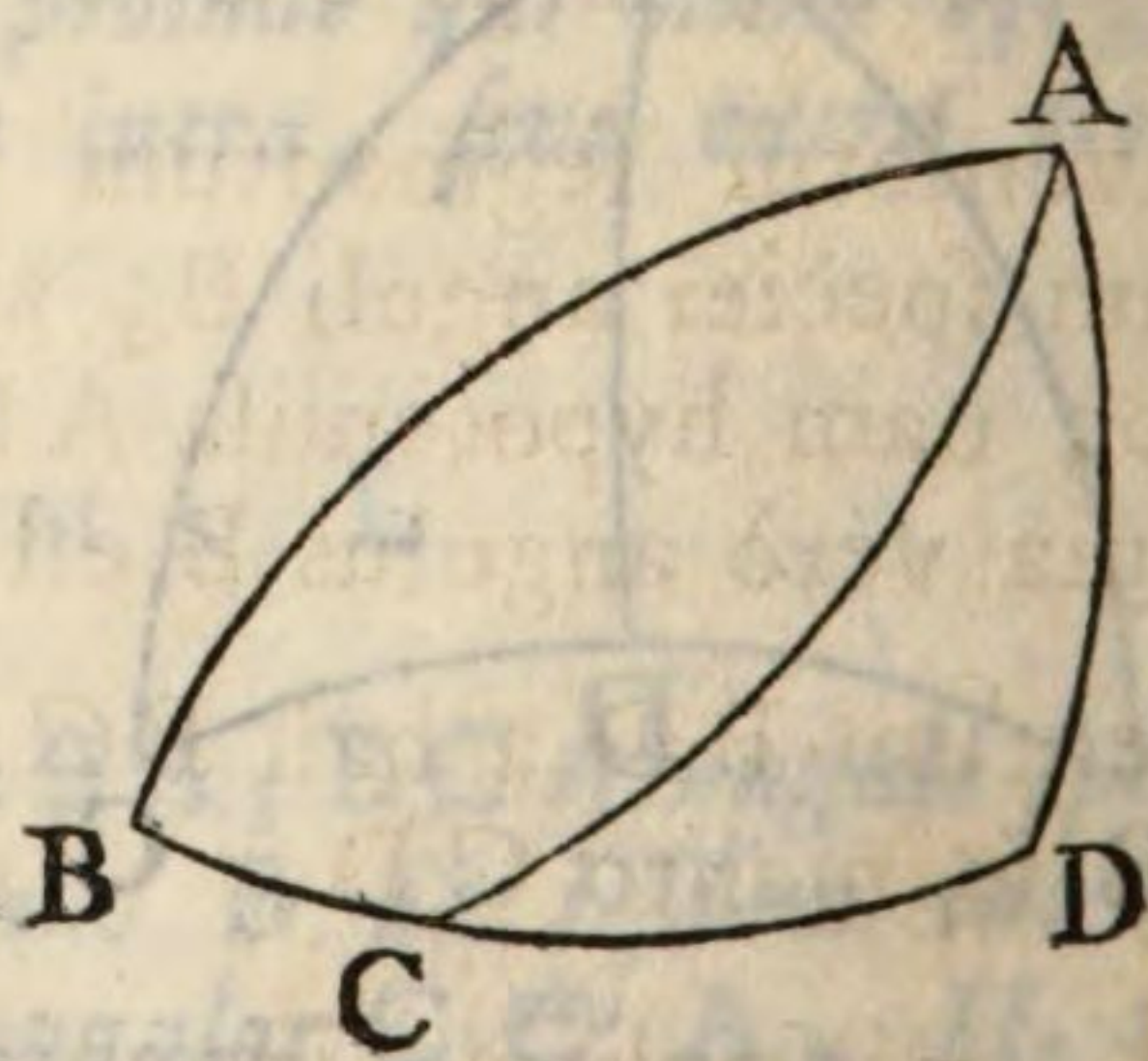
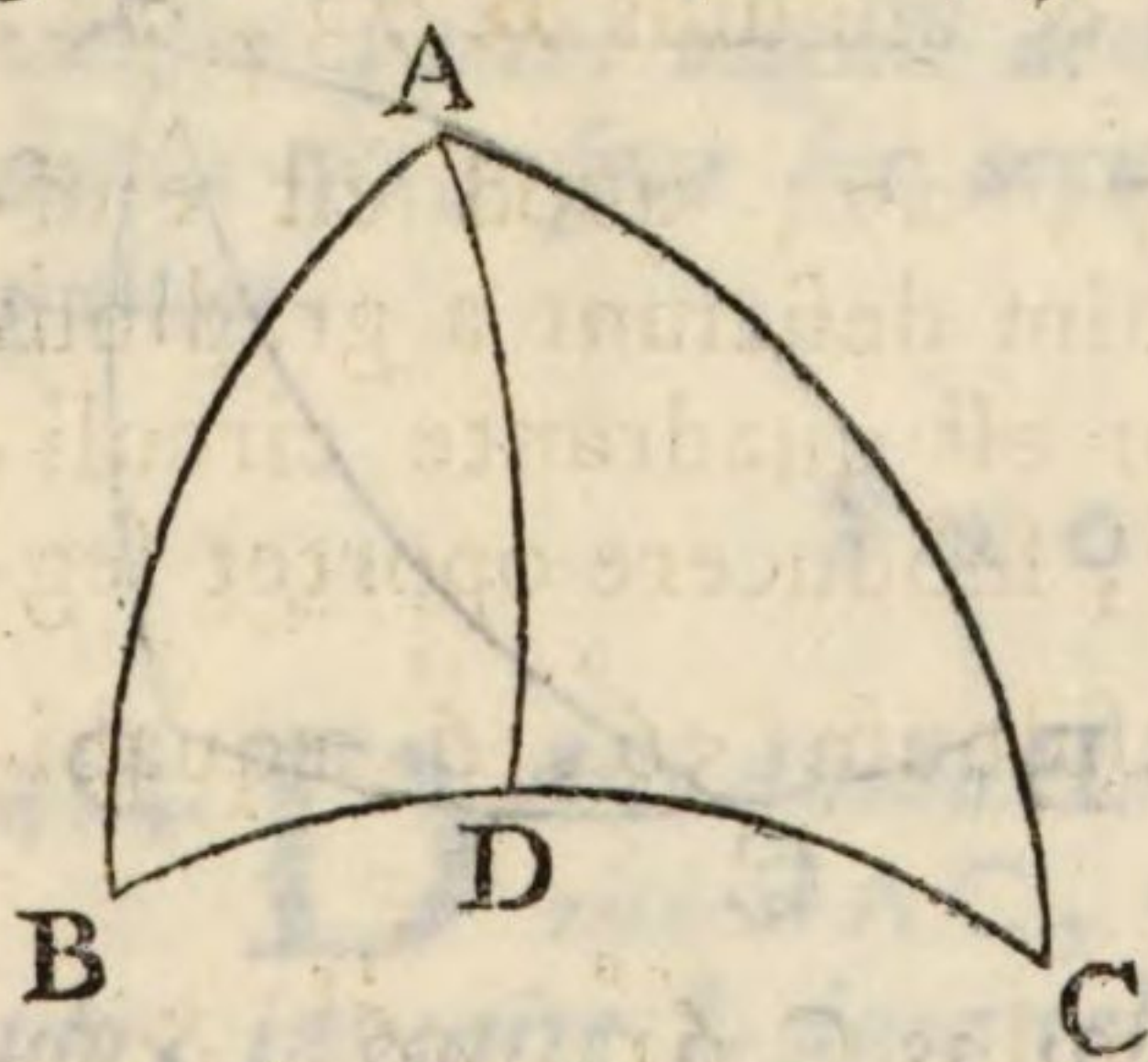
Casus I.

415. **I**Nvenietur angulus C , adjacens basi AC , per hanc analogiam (*n.* 392.):

Sinus segmenti CD est ad sinum segmenti BD ;

Ut tangens anguli B est ad tangentem anguli C .

Si angulus B deficit a 90 gradibus, angulus C erit acutus, vel obtusus, prout latus BC majus, minusve fuerit segmento BD ; vel, quod eòdem recidit, prout arcus perpendicularis AD cadit intra, aut extra triangulum ABC (*n.* 407.).



Si angulus B excedit 90 gradus, ut in Fig. 1. & 2., angulus C erit acutus, vel obtusus, prout summa segmen-

mentorum BC , BD minor erit, aut major grad. 180.

Corollarium.

Simili discursu reperietur angulus BAC , si concipiatur arcus ductus a puncto C perpendiculariter in latus AB , ac reliqua peragantur pro eodem angulo A , quæ docuimus in inventione anguli C .

Casus II.

416. **I**nvenietur latus AC per analogiam n. 387. Fiat;
Ut cosinus segmenti BD ad cosinum segmenti CD ;
Ita cosinus lateris AB ad cosinum lateris AC ;
 quod minus, aut majus erit gradibus 90, prout segmentum CD minus, aut majus fuerit quadrante circuli. Nam, quoniam arcus perpendicularis AD , qui consideratur tanquam latus trianguli rectanguli ADC , minor est gradibus 90 (n. 413.), hypotenusa AC debet esse ejusdem speciei, in qua est latus alterum CD (n. 278.); quod perinde verum est, si ponatur angulus B acutus, sive obtusus.

Si segmentum CD esset quadrans circuli, hypotenusa AC esset pariter quadrans circuli (n. 282.).

Exemplum.

Ponatur latus AB 61° , $11'$, ut in Fig. 3. pag. præced.; latus BC 83° , $33'$; & angulus B 73° , $24'$.
 Invenietur segmentum BD 27° , $27'$; quod est ejusdem speciei anguli B ; ambo enim deficiunt a gradibus 90; nam hypotenusa AB minor est quadrante circuli. Quia verò angulus B est acutus, subducere oportet segmentum BD a basi BC ; & residuum 56° , $6'$ æquabitur segmento CD .

His positis, invenietur angulus C 61° , $46\frac{1}{2}'$, & latus AC 72° , $22'$, per analogias expositas.

Inventio anguli C.

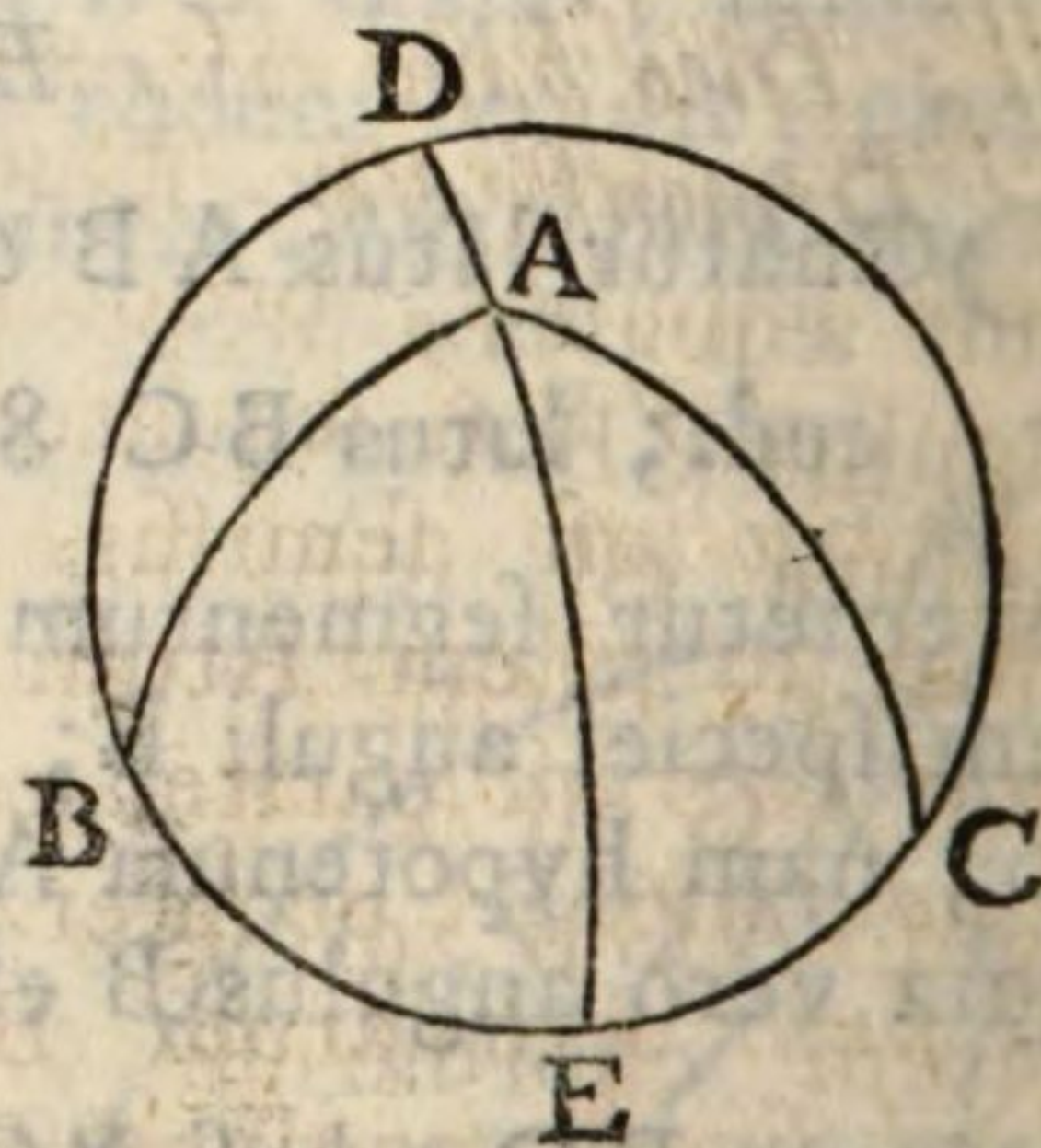
966368	logarithmus sinus $27^{\circ}, 27'$ BD.
1052562	log. tangentis $73^{\circ}, 24'$ anguli B.
2018930	summa.
991908	log. subducendus sinus $56^{\circ}, 6'$ CD.
1027022	resid. pro log. tang. $61^{\circ}, 46\frac{1}{2}'$ ang. quæsit C.

Inventio lateris AC.

974644	log. cosinus $56^{\circ}, 6'$ segmenti CD.
968305	log. cosinus $61^{\circ}, 11'$ lateris AB.
1942949	summa.
994813	log. subducendus cos. $27^{\circ}, 27'$ segmenti BD.
948136	resid. pro log. cos. $72^{\circ}, 22'$ lat. quæsit AC.

Sin autem ponatur latus AB $91^{\circ}, 17'$; BC $123^{\circ}, 58'$; & angulus B $117^{\circ}, 28'$,
invenietur segmentum BD $92^{\circ}, 47'$; atque hinc elicietur CD
 $143^{\circ}, 15'$.

His positis, invenietur an-
gulus C $107^{\circ}, 18'$; & latus AC
 $111^{\circ}, 41'$ circiter.



Inventio anguli C.

999949	log. sin. $87^{\circ}, 13^{\prime}$ suppl. BD.
1028414	log. tang. $62^{\circ}, 32^{\prime}$ suppl. anguli B.
2028363	summa.
977694	log. subducendus sin. $36^{\circ}, 45^{\prime}$ suppl. CD.
1050669	resid. pro log. tang. $72^{\circ}, 42^{\prime}$ sup. $107^{\circ}, 18^{\prime} = \text{ang. C.}$

Inventio lateris AC.

990377	log. cosin. $36^{\circ}, 45^{\prime}$ suppl. CD.
835018	log. cosin. $88^{\circ}, 43^{\prime}$ suppl. AB.
1825395	summa.
868627	log. subd. cosin. $87^{\circ}, 13^{\prime}$ suppl. BD.
956768	resid. pro log. cos. $68^{\circ}, 19^{\prime}$ sup. $111^{\circ}, 41^{\prime} = \text{AC.}$

P R O B L E M A II.

417. **D** Atis lateribus duobus, & angulo uni eorum opposito, invenire I. angulum alteri lateri cognito oppositum, II. angulum a lateribus datis comprehensum, III. latus tertium.

Casus I.

R Esolutio. Per analogiam n. 386. invenietur angulus oppositus alteri lateri cognito; nimirum, Sinus lateris oppositi angulo cognito, est ad sinum hujus anguli; Ut si sinus alterius lateris cogniti est ad sinum anguli quæsiti; cujus species potest esse indeterminata, si dumtaxat habeatur ratio partium cognitarum; sed hujus species determinari poterit, aut præcognosci ex particulari

quæstione, ad quam hæc analogia accommodabitur; ut alibi dictum est.

Casus II.

418. **U**T inveniatur angulus a lateribus datis interceptus, concipiatur arcus perpendiculariter ductus a vertice hujus anguli in latus oppositum (*n.* 412.). Itaque, si ponantur duo latera cognita AB , AC , ducatur oportet arcus AD perpendiculariter in BC ; tum, dato pariter angulo B , opposito lateri AC , quærat^rur angulus BAD trianguli rectanguli ADB per analogiam *n.* 322.

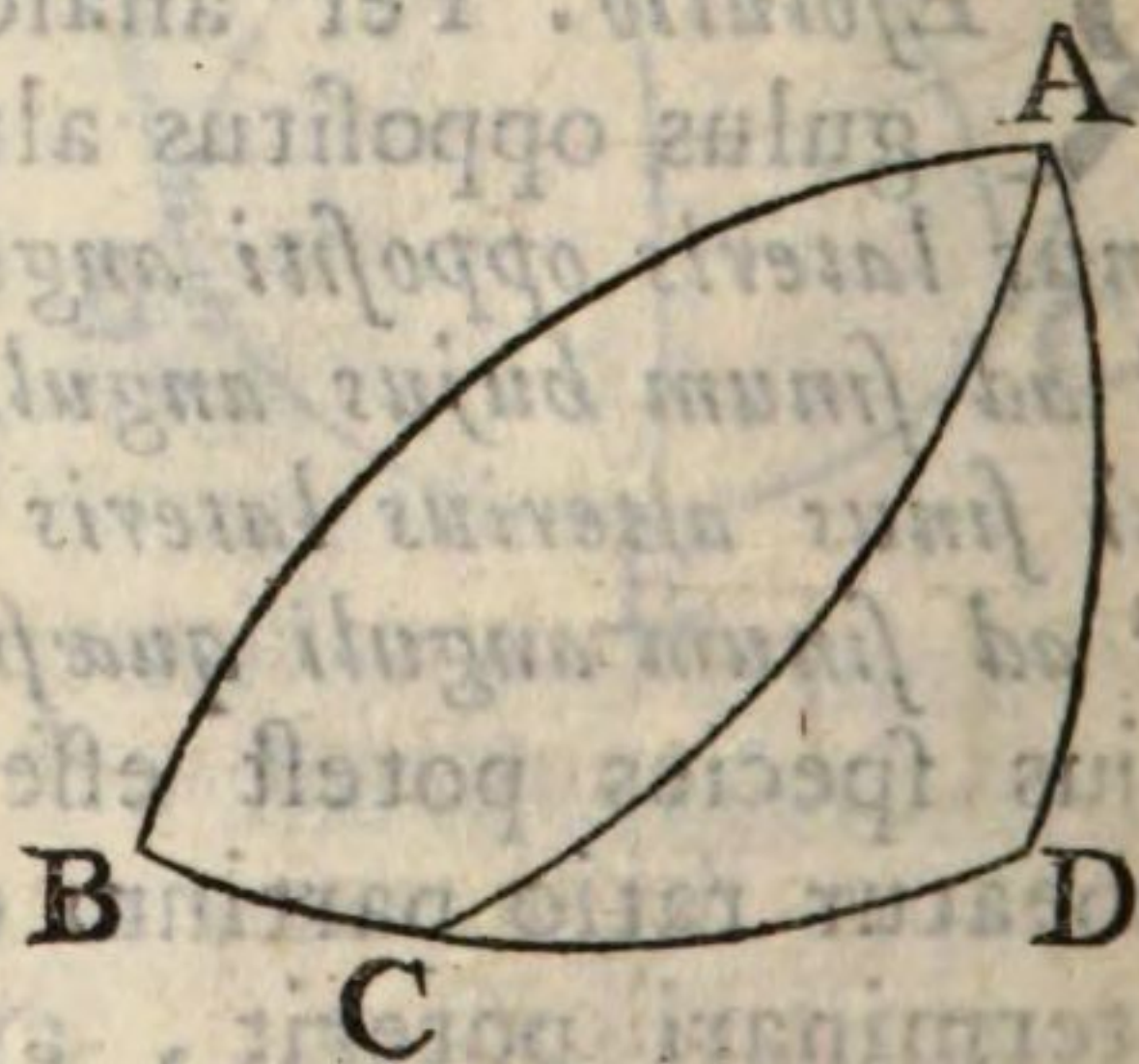
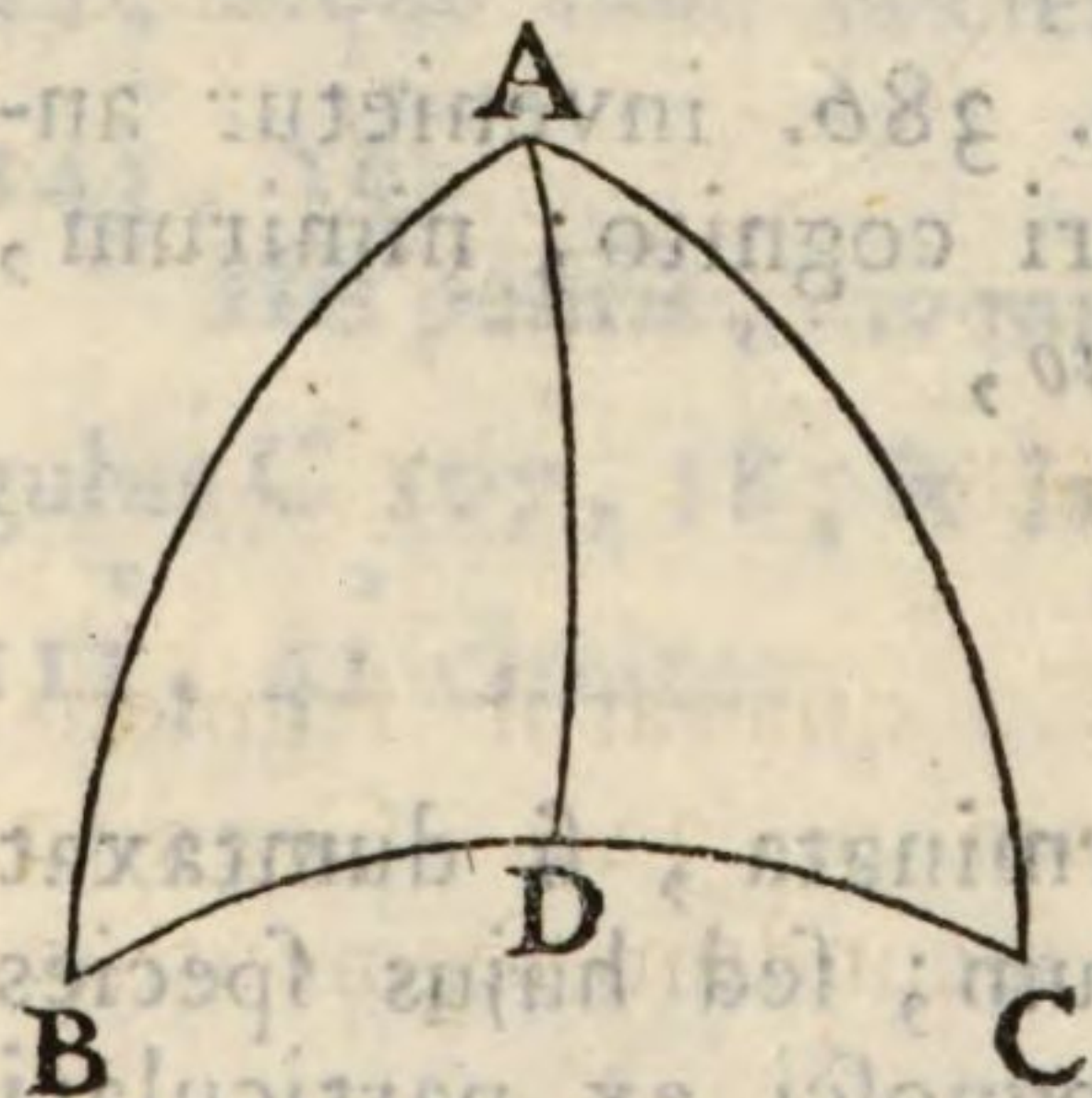
Sinus totus est ad cosinum hypotenusæ AB ;

Ut tangens anguli B est ad cotangentem anguli BAD ; qui erit acutus, aut obtusus (*n.* 294.), prout hypotenusa AB minor, majorve fuerit quadrante circuli; ponitur enim latus AD minus gradibus 90 (*n.* 413.).

Cognito angulo BAD invenietur angulus CAD per analogiam *n.* 389. Fiat

Cotangens lateris AB ad cotangentem lateris AC ;

Ut cosinus anguli BAD ad cosinum anguli CAD ; qui erit acutus, aut obtusus, prout hypotenusa AC minor est, aut major quadrante circuli (*n.* 294.). Nam angulus CAD adjacet lateri, seu arcui perpendiculari AD , qui semper minor est quadrante circuli



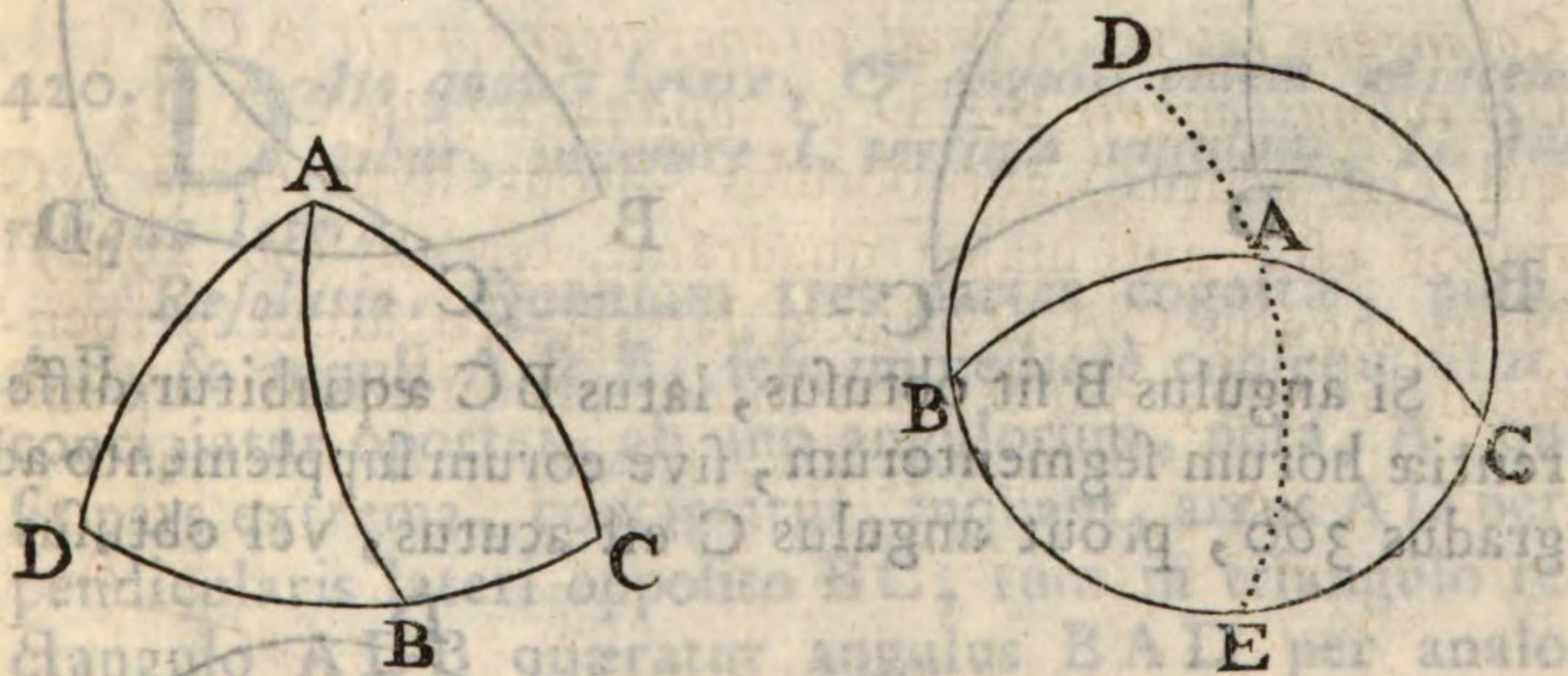
(*n.*

(*n.* 413.). Si hypotenusa AC sit æqualis quadranti circuli, angulus CAD erit rectus. Nam in hoc casu latus CD trianguli rectanguli ADC erit quadrans circuli (*n.* 284.); & aliunde angulus CAD sequitur speciem lateris oppositi CD (*n.* 274.).

Quæ hæcenus demonstrata sunt, nondum determinant angulum BAC a notis lateribus comprehensum.

Nam, si angulus datus B est acutus, ut in præcedentibus Figuris, BAC potest esse vel summa, vel differentia angulorum BAD & CAD , prout arcus perpendicularis AD cadit intra, vel extra triangulum ABC ; five, prout angulus C est acutus, vel obtusus (*n.* 408.).

Si angulus datus B sit obtusus, BAC erit differentia angulorum BAD & CAD ; vel idem angulus BAC erit supplementum eorundem angulorum BAD & CAD ad gradus 360, prout angulus C est acutus, vel obtusus. Quamobrem, ut determinari possit angulus BAC , præcognoscenda erit species anguli C .



Casus III.

419. **U**T inveniatur latus BC , quærat segmentum BD per analogiam *n.* 321. Cognito hoc primo segmento, inveniatur secundum segmentum CD per analogiam *n.* 387.

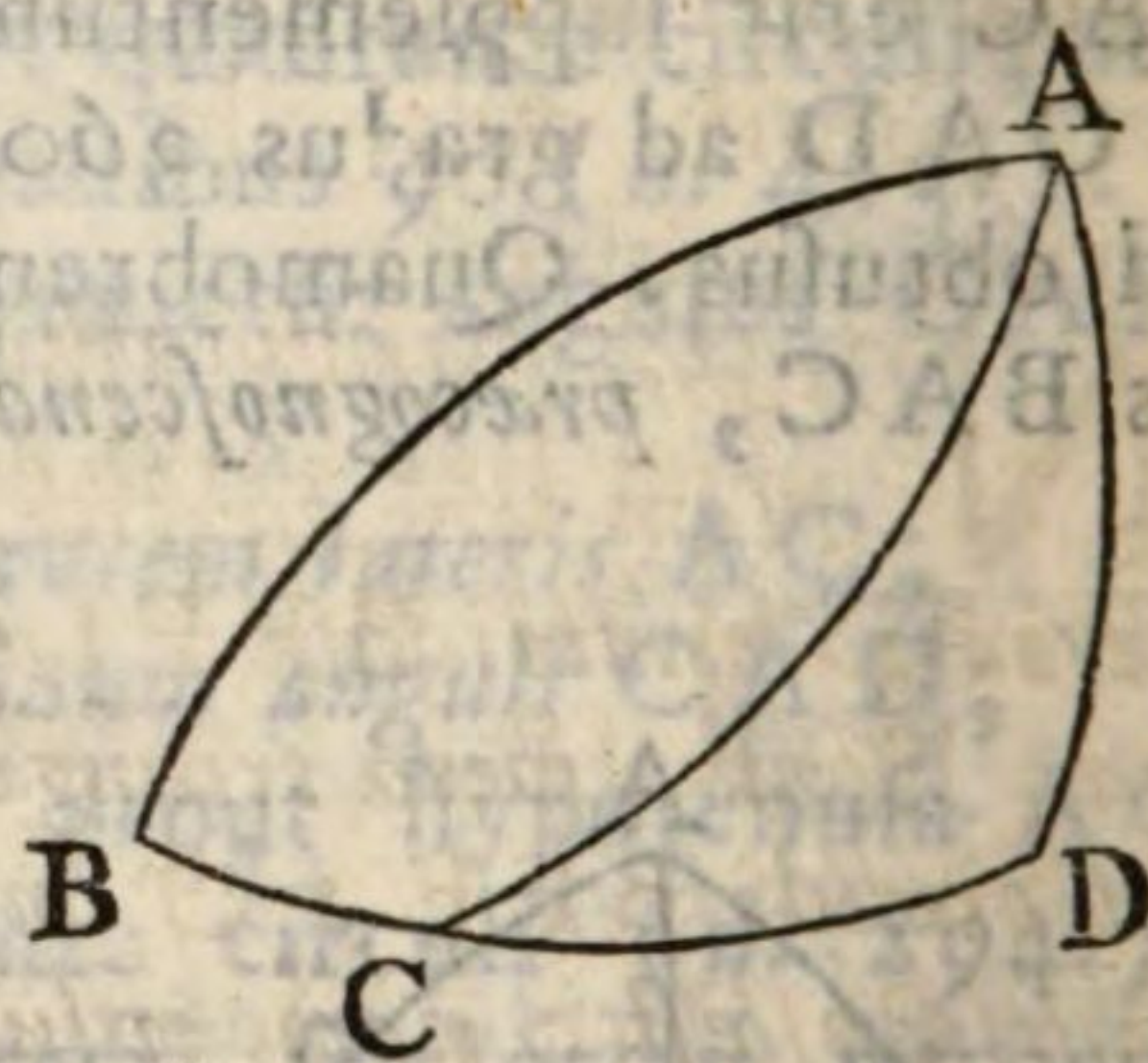
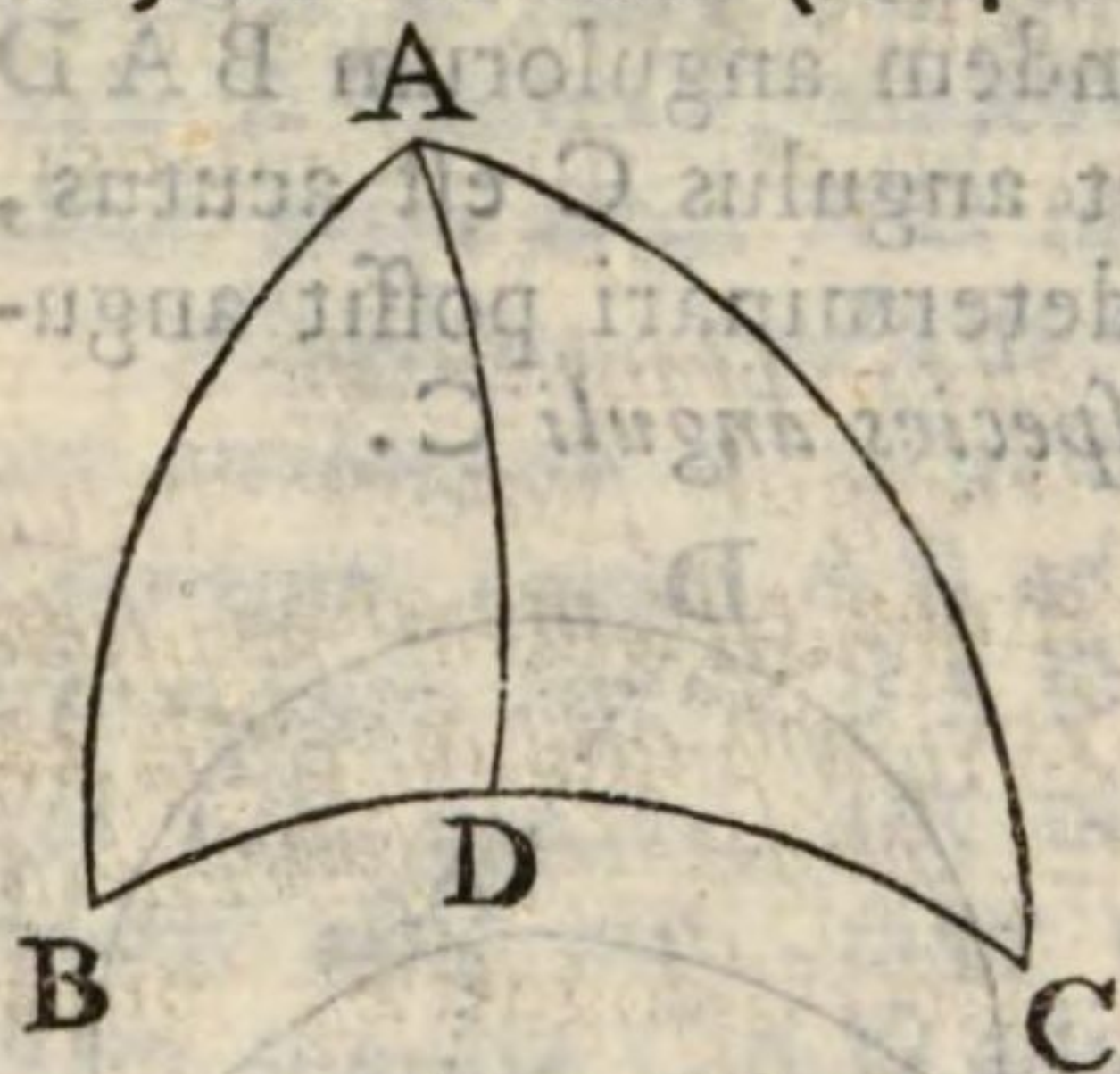
X 4

Cos-

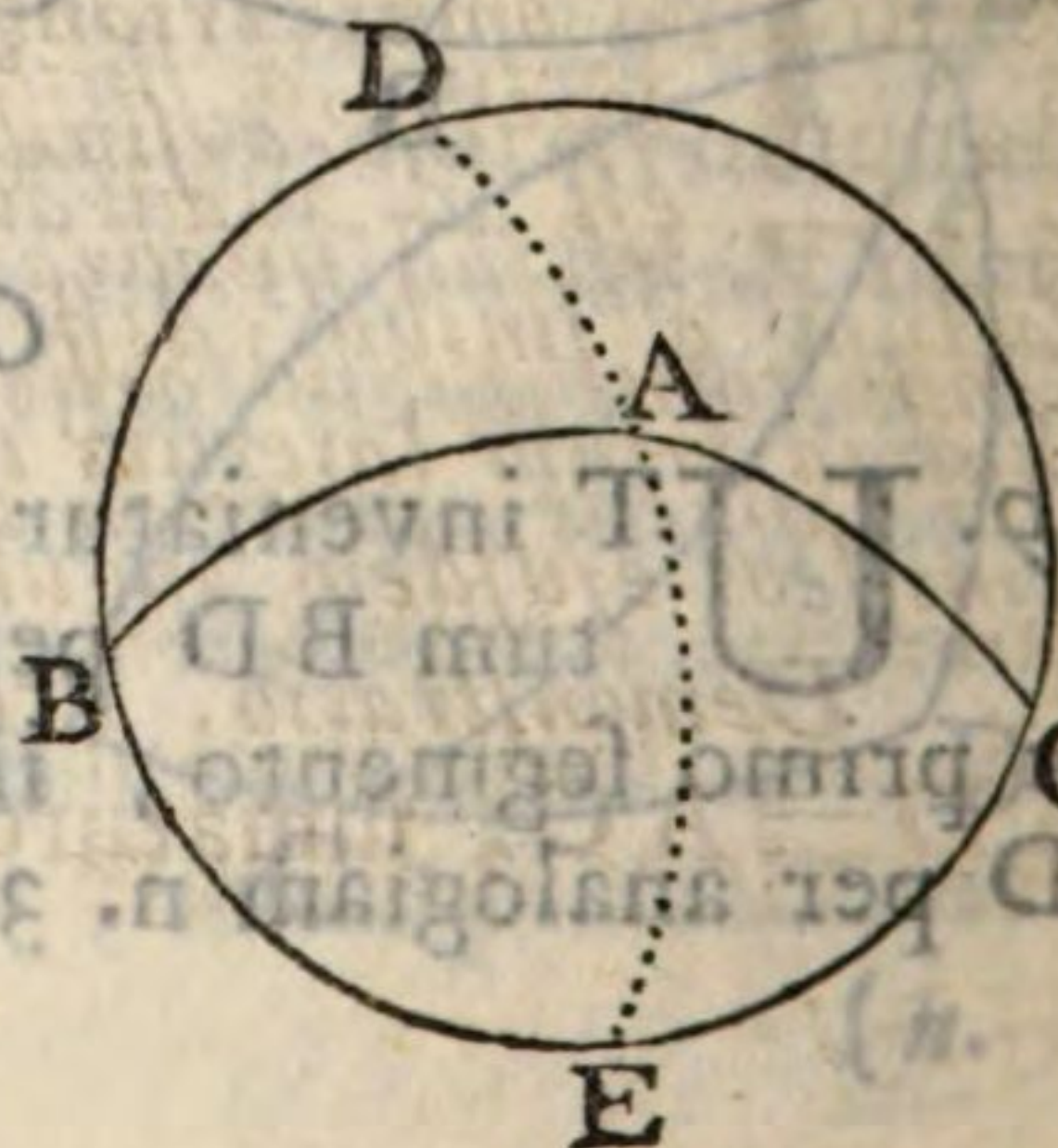
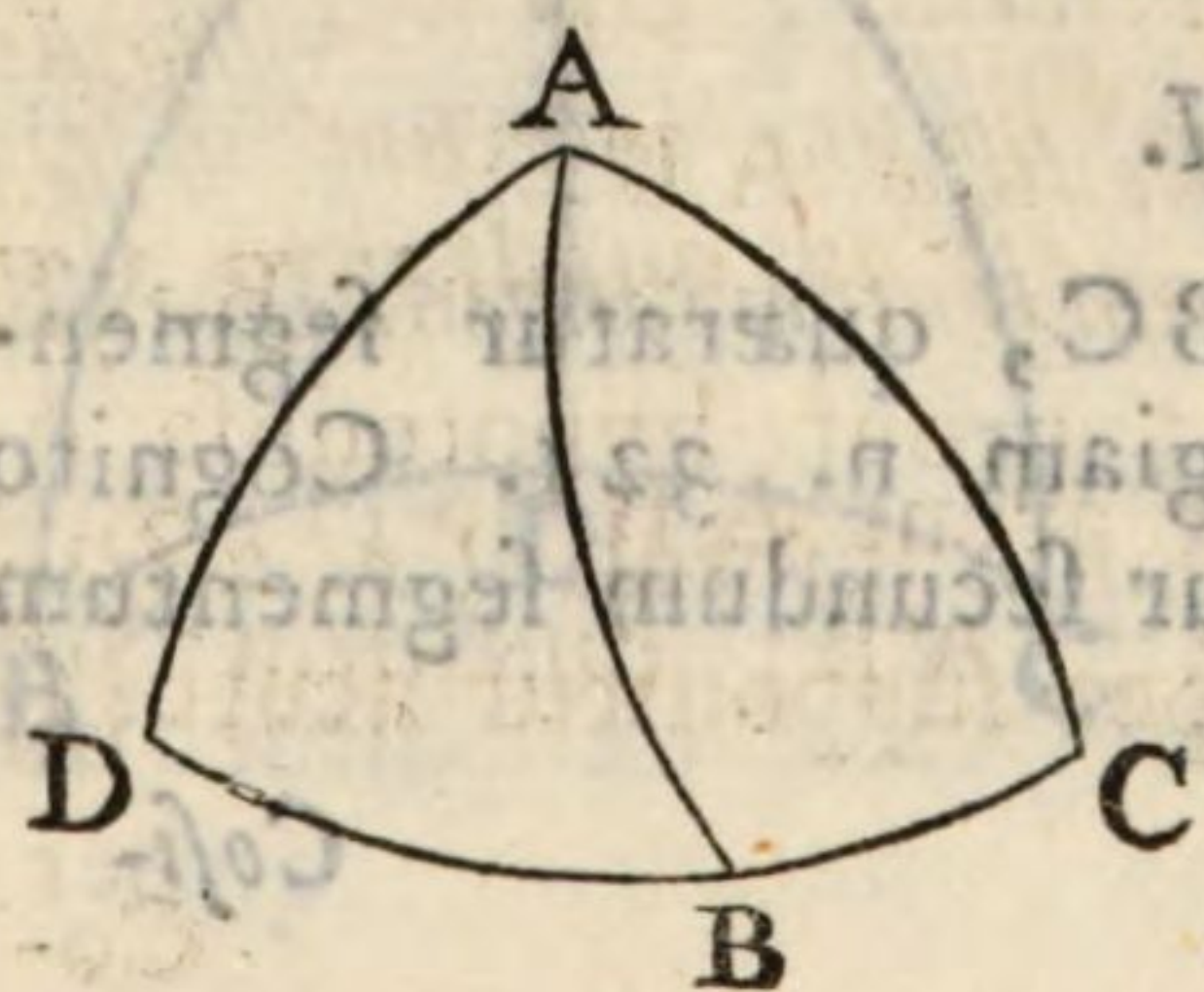
Cosinus lateris AB est ad cosinum lateris AC;
Ut cosinus segmenti BD est ad cosinum segmenti CD;
 quod minus erit, aut majus 90 gradibus, prout hypotenusa AC trianguli rectanguli ADC minor, aut major erit quadrante circuli (n. 283.); nam latus alterum AD semper supponitur minus 90 gradibus.

Si hypotenusa AC est quadrans circuli, segmentum CD erit quoque quadrans circuli (n. 284.); & in hoc casu absque analogia innotescet.

Hinc tamen determinari nondum poterit species lateris BC. Nam, si angulus B sit acutus, latus BC æquabitur summæ, vel differentiæ segmentorum BD & CD, prout arcus perpendicularis AD cadit intra, vel extra triangulum ABC, five, prout angulus C est acutus, vel obtusus (n. 410.).



Si angulus B sit obtusus, latus BC æquabitur differentiæ horum segmentorum, five eorum supplemento ad gradus 360, prout angulus C est acutus, vel obtusus.



Exemplum.

POnatur latus AB $61^{\circ}, 11'$, ut in Fig. 1.; latus AC $72^{\circ}, 22'$; & angulus B $73^{\circ}, 24'$. Invenietur I. angulus C $61^{\circ}, 46'$; II. angulus BAC $92^{\circ}, 18'$; III. latus BC $83^{\circ}, 33'$.

Inventio anguli C.

998151 logar. sinus $73^{\circ}, 24'$ anguli B .

994259 logar. sinus $61^{\circ}, 11'$ lateris AB .

1992410 summa.

997910 logar. subd. sinus $72^{\circ}, 22'$ lateris AC .

994500 resid. pro log. sinus $61^{\circ}, 46'$ ang. quæsit C .

Simili methodo reliqua invenies, quæ continentur in Problemate.

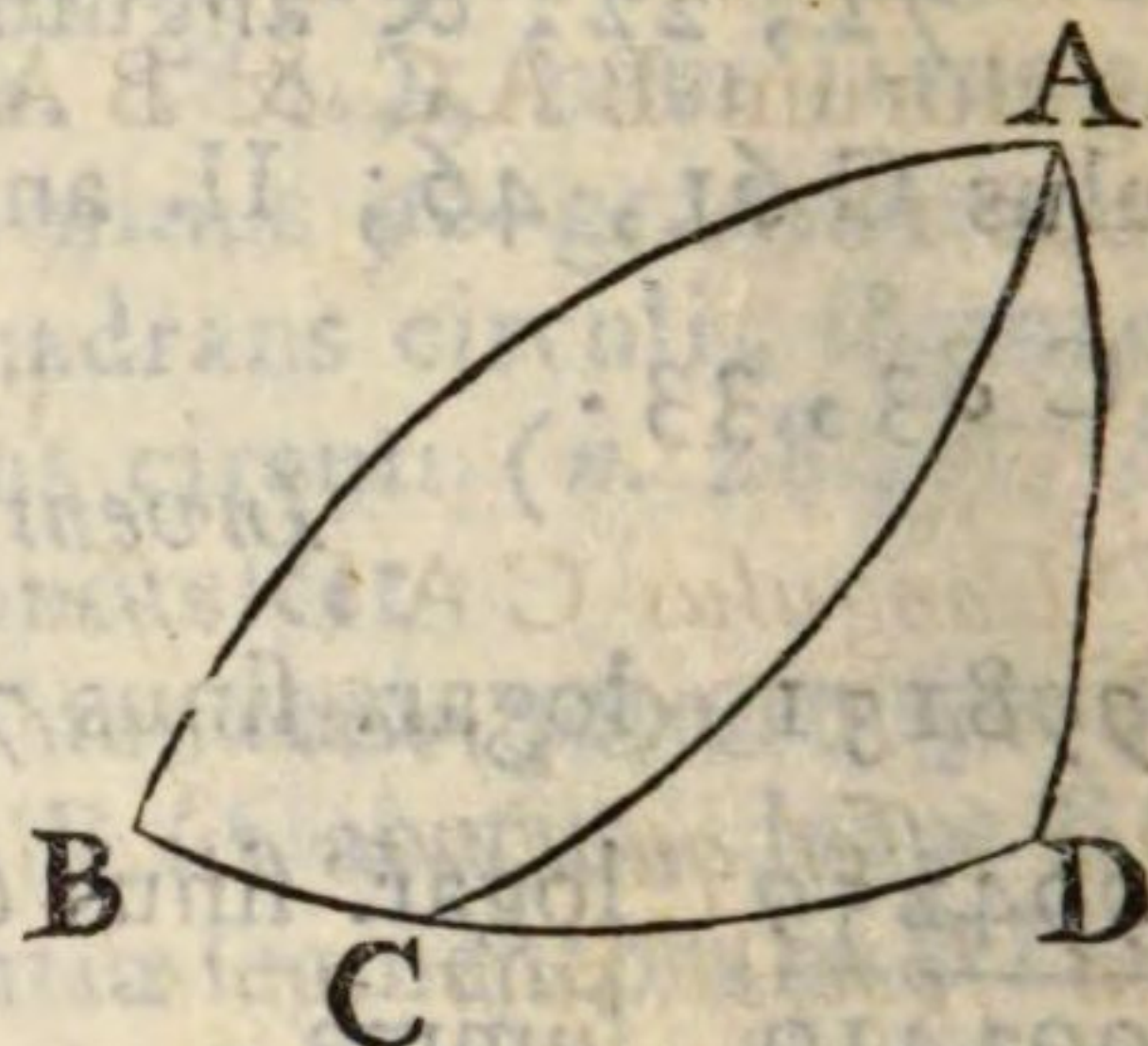
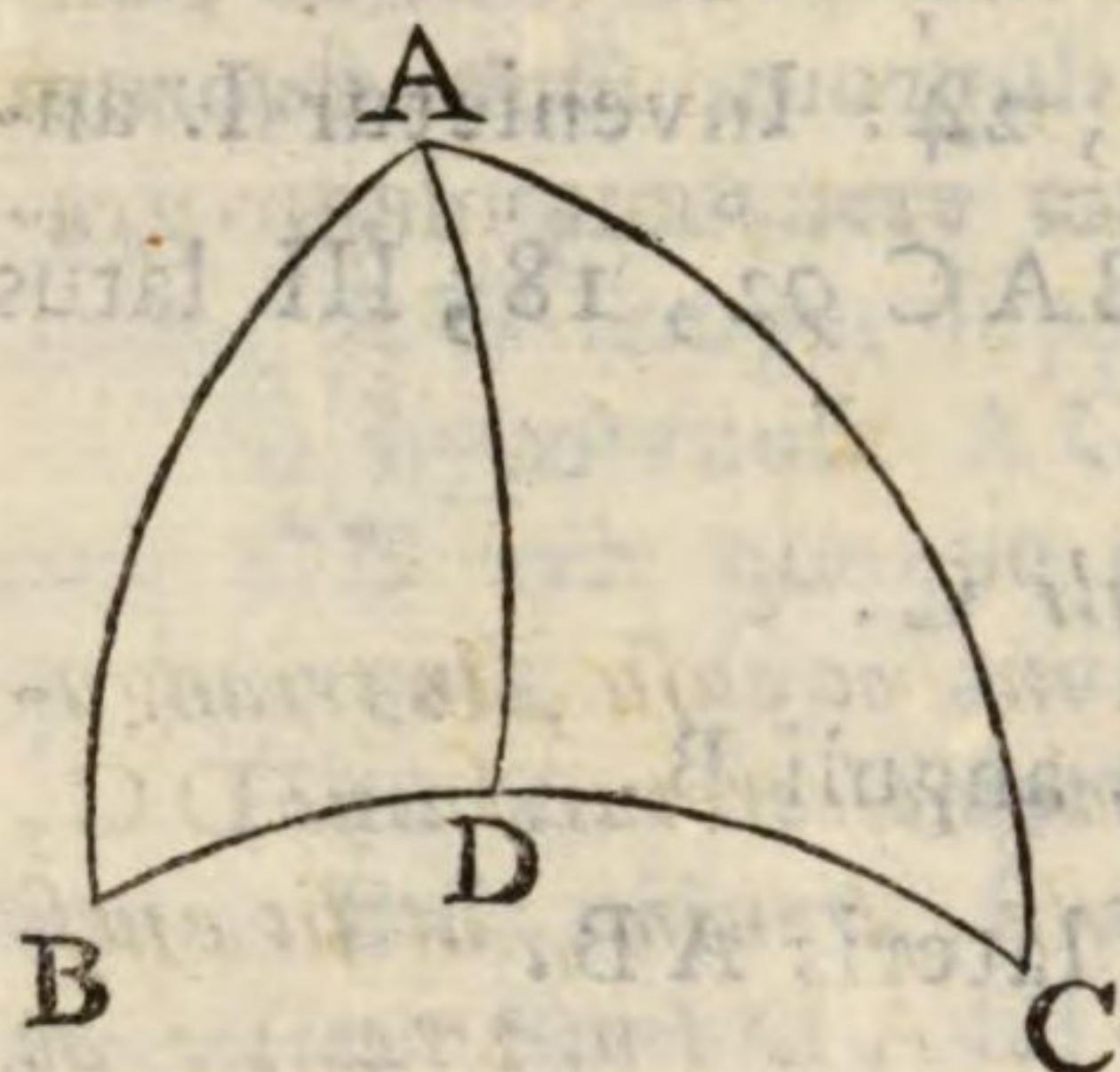
P R O B L E M A III.

420. **D**ato quovis latere, & angulis eidem adjacentibus, invenire I. tertium angulum, II. duo reliqua latera.

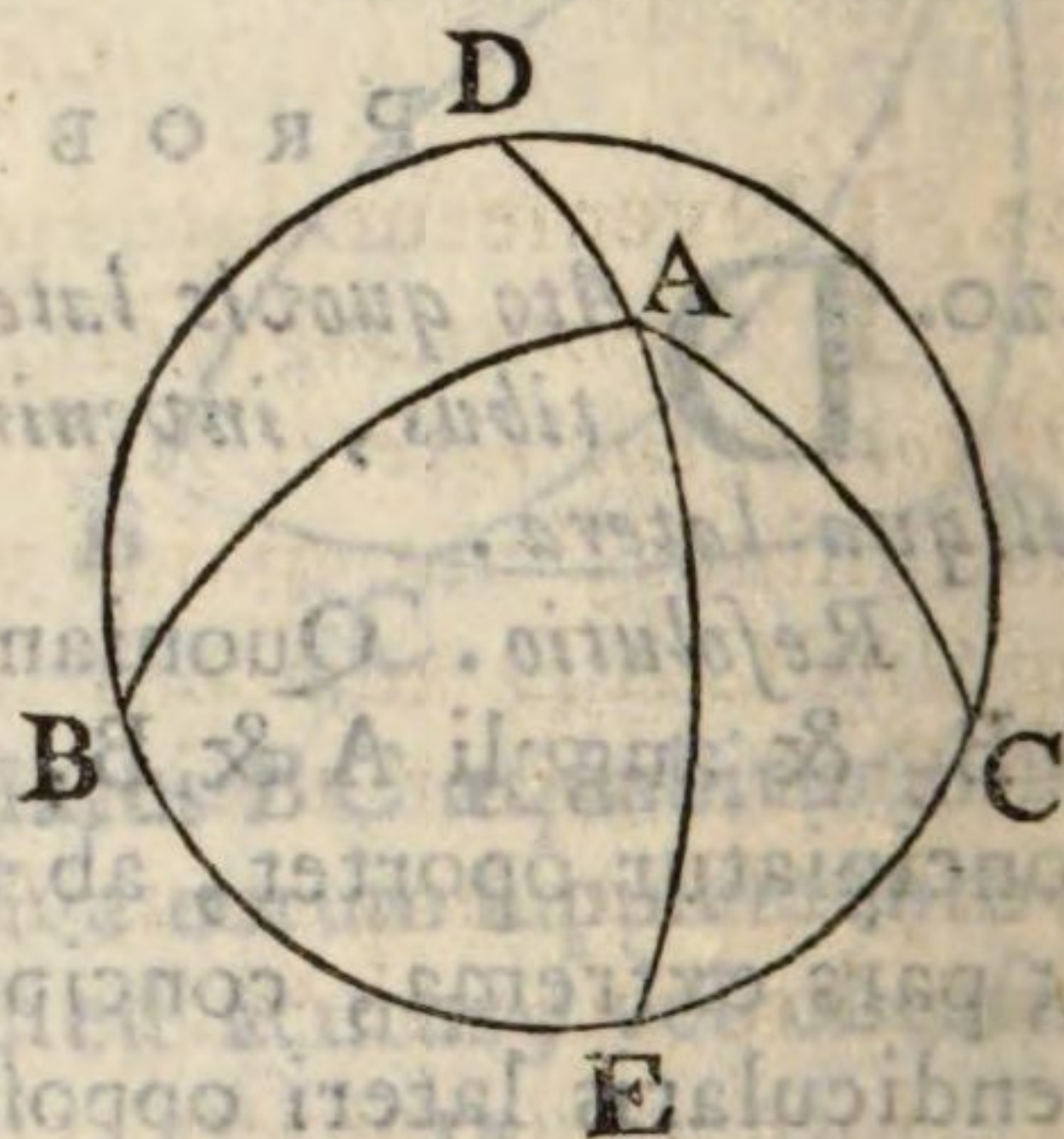
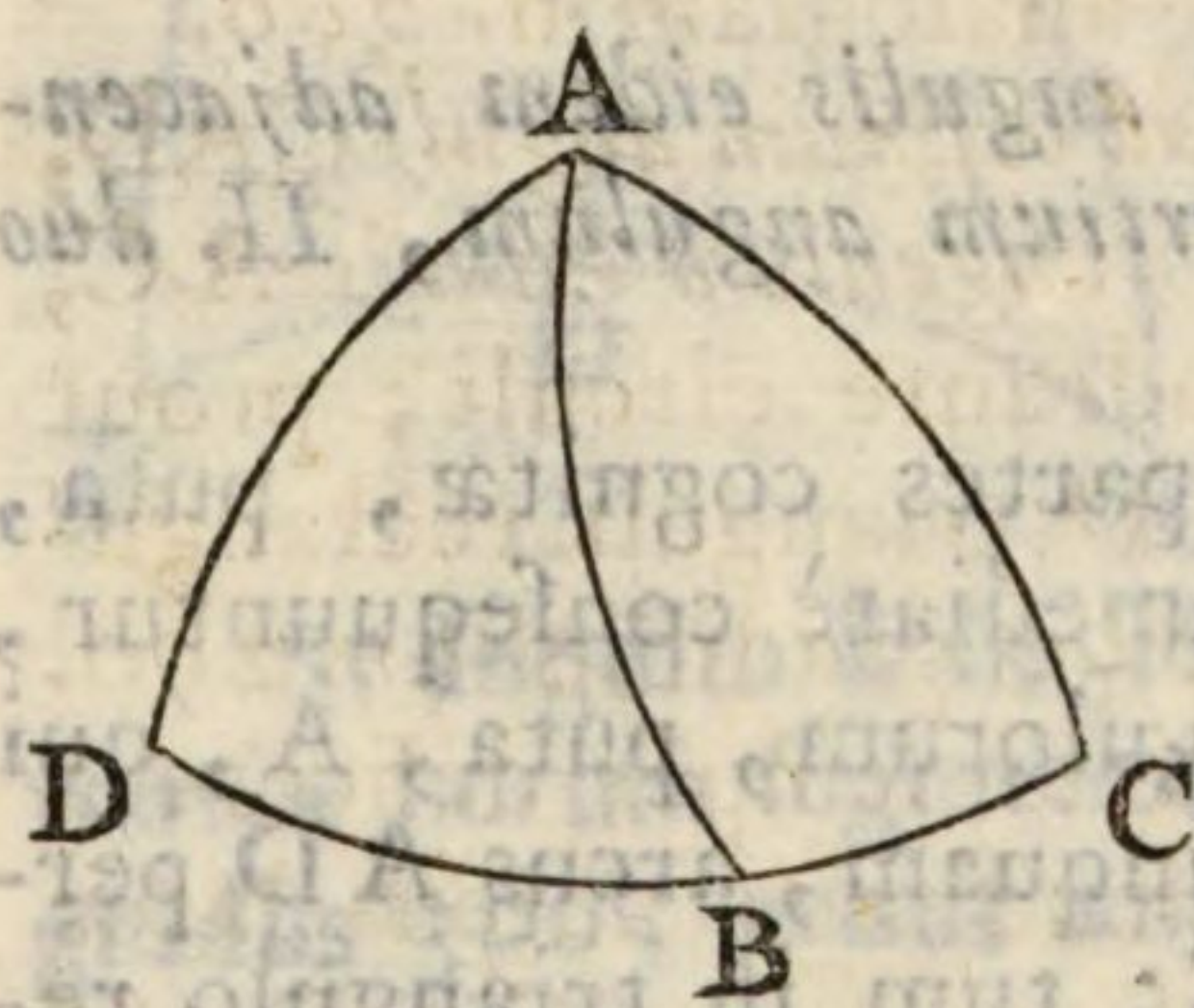
Resolutio. Quoniam tres partes cognitæ, puta, AB , & anguli A & B , sese immediatè consequuntur, concipiatur oportet, ab uno angulorum, puta, A , qui sit pars extrema, concipiatur, inquam, arcus AD perpendicularis lateri opposito BC ; tum in triangulo re-ctangulo ADB quærat^r angulus BAD per analogiam n. 322.

Sinus totus est ad cosinum hypotenusæ AB ;
Ut tangens anguli B est ad cotangentem anguli BAD ;
 qui erit acutus, vel obtusus, prout hypotenusa AB minor, majorve fuerit quadrante circuli (n. 289.); nam alter angulus ABD semper supponitur acutus (n. 413.).

Cognito angulo BAD , facile invenietur angulus CAD . Nam, si angulus B est acutus, angulus CAD erit differentia angulorum BAC & BAD (n. 409.).



Si angulus B sit obtusus, angulus CAD erit summa angulorum BAC & BAD ; excepto tamen eo casu, in quo hæc summa excederet gradus 180; tunc enim angulus CAD esset supplementum summæ ad gradus 360. His animadversis,



Casus I.

421. **I**Nvenietur angulus C per analogiam n. 388.

*Sinus anguli BAD est ad sinum anguli CAD ;
Ut cosinus anguli B est ad cosinum anguli C .*

Si angulus B sit acutus, ut in Fig. 1. & 2., angulus ACB erit acutus, vel obtusus, prout angulus BAC

BAC major minorve fuerit angulo BAD , five, prout perpendicularis AD cadet intra, vel extra triangulum.

Si angulus B est obtusus, ut in Fig. 3. & 4., angulus C erit acutus, vel obtusus, prout summa duorum angulorum BAC & BAD minor erit, aut major gradibus 180.

Scholion.

SI angulus CAD esset rectus, in hoc casu, in triangulo ADC , rectangulo in D , cognosceretur latus DC , quod esset quadrans circuli; necesse est enim, ut sit ejusdem speciei cum angulo opposito CAD (n. 274.); ac proinde hypotenusæ AC esset pariter quadrans circuli (n. 182.); atque hinc angulus C æquaretur lateri opposito AD (n. 334.). Jam vero in triangulo ADB , rectangulo in D , cognoscetur latus AD per analogiam n. 304.

Casus II.

422. **I**Nvenietur latus AC per analogiam n. 389.

Cosinus anguli BAD est ad cosinum anguli CAD ; Utque cotangens lateris AB est ad cotangentem lateris AC ; quod minus, aut majus erit quadrante circuli, prout angulus CAD adjacens lateri AD trianguli rectanguli ADC , minor majorve fuerit 90 gradibus (n. 290. 292.). Nam hoc latus AD ponitur semper deficere a quadrante circuli (n. 413.). Ostendimus autem latus AC fore quadrantem circuli, si angulus CAD sit rectus.

Invenietur latus alterum BC , si a puncto B ducatur arcus perpendicularis in latus oppositum AC , productum, si opus sit; nam hic arcus transire non debet per latus quæsitum (n. 412.); tum reliqua peragenda, ut ante.

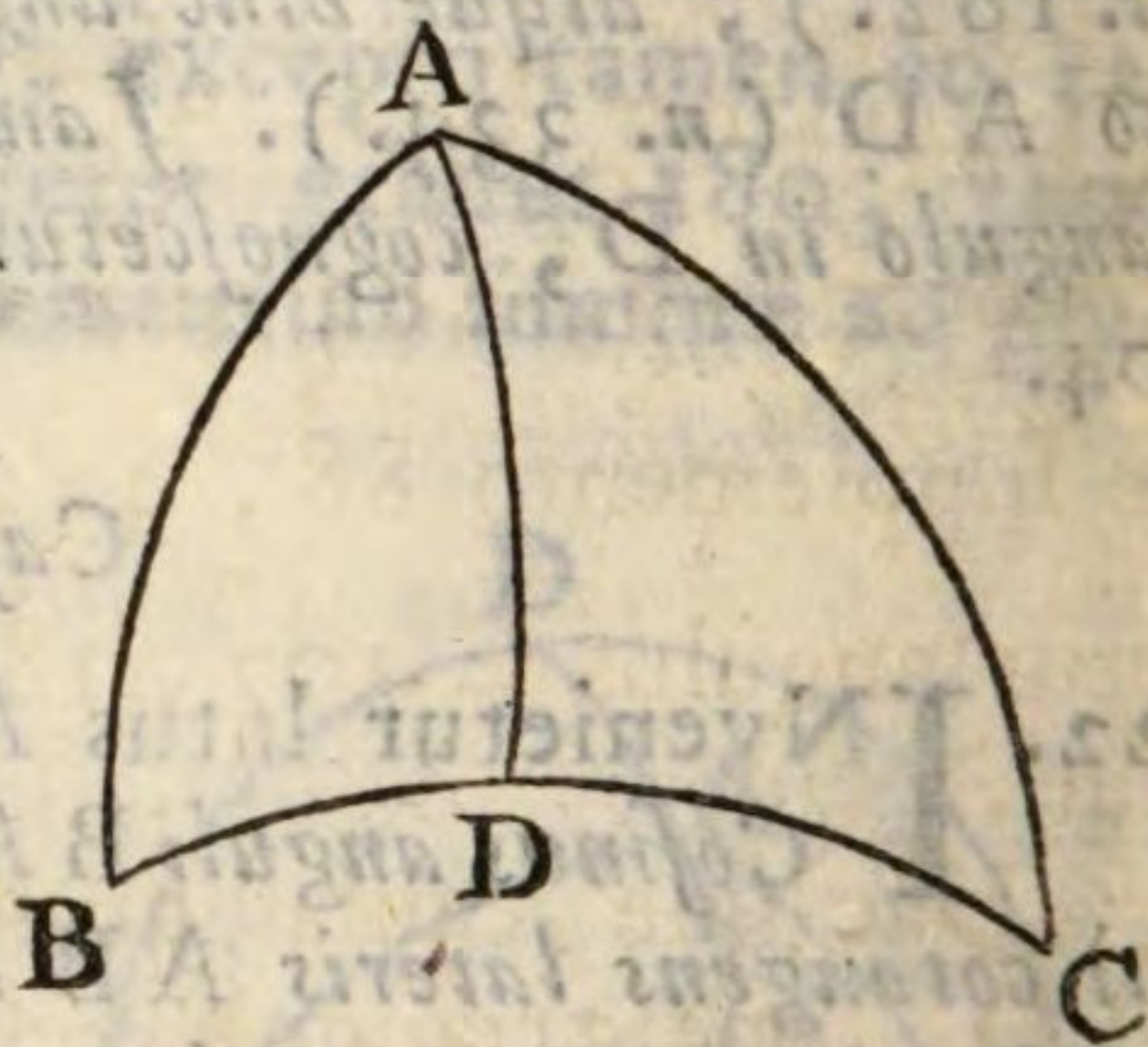
Scholion.

S*I sola inventio anguli C proponeretur, posset indifferenter duci arcus perpendicularis vel ab angulo A, vel ab angulo B.*

Exemplum I.

ESto latus $AB = 61^{\circ}, 11'$; angulus $A = 92^{\circ}, 18'$; $B = 73^{\circ}, 24'$. Reperietur angulus $C = 61^{\circ}, 46'$; & $AC = 72^{\circ}, 22'$.

Ac primò inquiratur angulus BAD , ope trianguli rectanguli ADB , qui reperietur esse $31^{\circ}, 44'$; ac subtrahatur ab angulo A : residuum $60^{\circ}, 34'$ erit valor anguli CAD . His positis,

*Inventio anguli C.*

993998	logar. sin. $60^{\circ}, 34'$ anguli CAD .
945589	logar. cos. $73^{\circ}, 24'$ anguli B .
1939587	summa.
972096	logar. subd. sinus $31^{\circ}, 44'$ anguli BAD .
967491	resid. pro log. cos. $61^{\circ}, 46'$ ang. quæsit C .

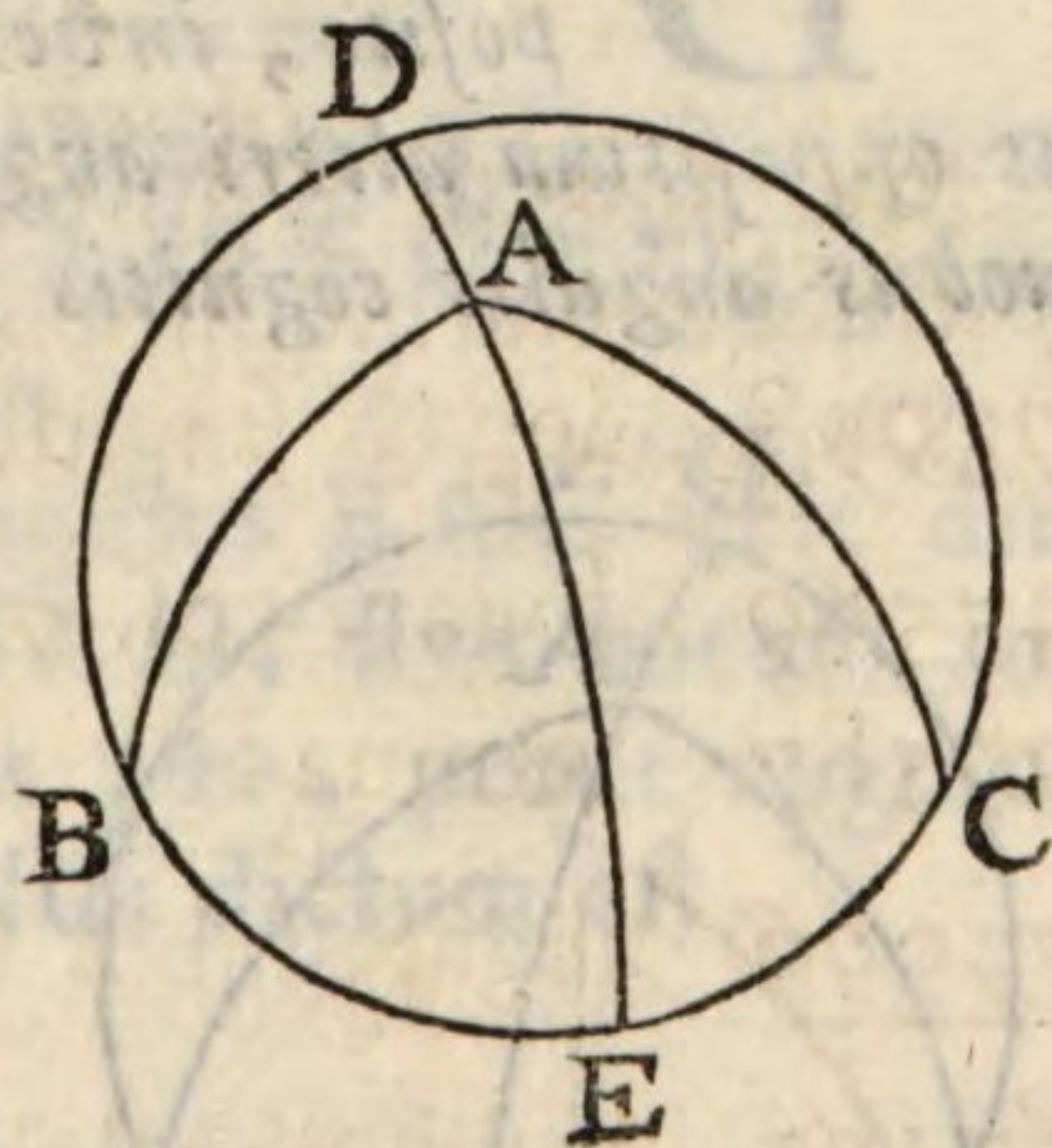
Inventio lateris AC.

969144	logar. cosin. 60° , 34° anguli CAD.
974047	logar. cotang. 61° , 11° lateris AB.
1943191	summa.
992968	logar. subd. cosin. 31° , 44° anguli BAD.
950223	resid. pro logar. tang. 72° , 22° lateris AC.

Exemplum II.

SI ponatur latus $AC = 91^{\circ}$, $17'$; $A = 127^{\circ}$, $38'$; $B = 117^{\circ}$, $28'$; quæ quantitates habent respectivè pro supplemento 88° , $43'$; 52° , $22'$; & 62° , $32'$; reperietur angulus $C = 107^{\circ}$, $18'$; & latus $AC = 111^{\circ}$, $42'$ circiter.

Hac de causa quærere prius oportet angulum BAD , ope trianguli rectanguli ADB ; hic angulus BAD reperietur 92° , $28'$; qui additus angulo $BAC = 127^{\circ}$, $38'$, dabit summam 220° , $6'$, quæ subducenda erit a 360° ; residuum 139° , $54'$ erit angulus CAD , quippe qui est supplementum hujus summæ ad gradus 360 .



Inventio anguli C.

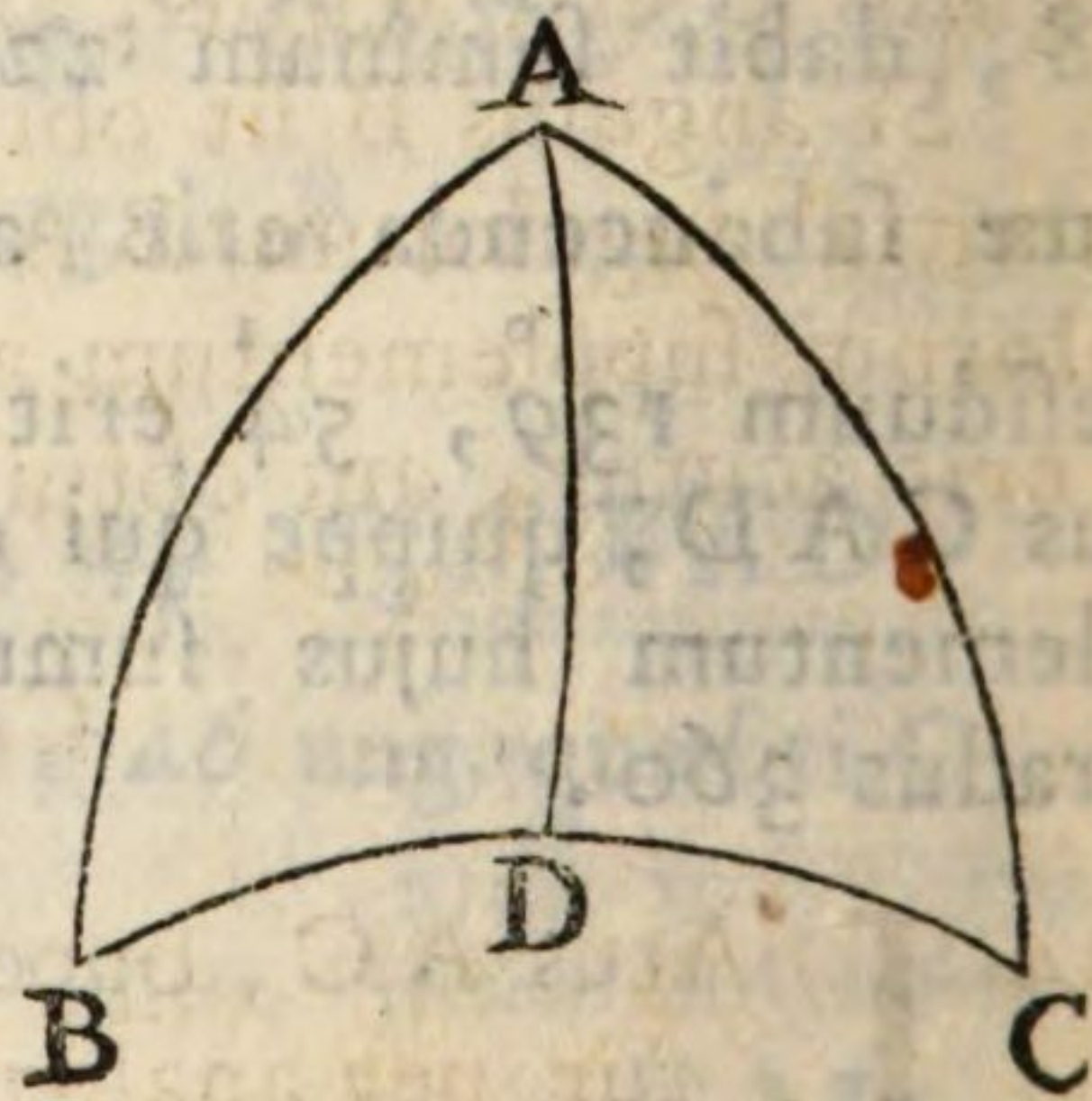
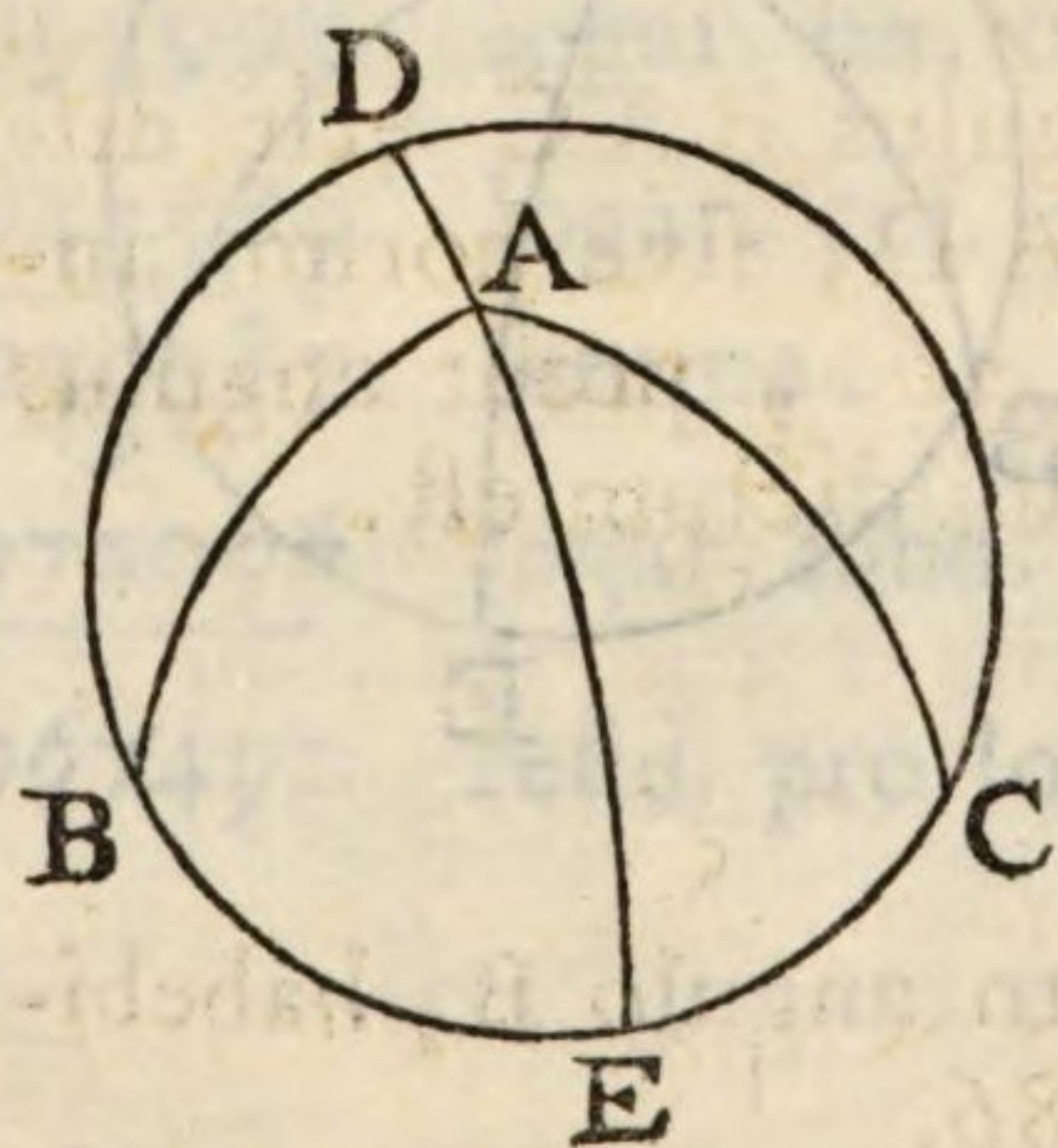
980897	logar. sinus 40° , 6° suppl. ang. CAD.
966392	logar. cosin. 62° , 32° suppl. ang. B.
1947289	summa.
999960	logar. sin. 87° , 32° suppl. ang. BAD.
947329	res. pro log. cos. 72° , 42° sup. 107° , 18° ang. quæf. C.

Inventio lateris AC.

988362	log. cos. 40° , 6° suppl. ang. CAD.
835029	log. cot. 88° , 43° suppl. lat. AB.
1823391	summa.
863385	log. cos. 87° , 32° suppl. ang. BAD.
960006	resid. pro logar. cotang. 68° , 17° circiter suppl. III. 43° circiter lateris quæfiti AC.

PROBLEMA IV.

423. **D** Atis duobus angulis, & latere uni eorum opposito, invenire I. tertium angulum, II. latus oppositum alteri angulo cognito, III. latus, quod a duobus angulis cognitis intercipitur.



Casus I.

Ponantur dati duo anguli B & C , & latus AB oppositum angulo C . Ut inveniatur angulus A , concipiatur oportet arcus perpendicularis AD ductus a vertice hujusmet anguli, qui quæritur (*n.* 412.); nam tres partes cognitæ sese immediatè non consequuntur; mox quærat^rur angulus BAD per analogiam jam adhibitam in Probl. III. *n.* 420. Si AB hypotenusa trianguli rectanguli ADB , esset quadrans circuli, latus BD esset pariter quadrans circuli (*n.* 284.); nam arcus AD semper supponitur infra 90 gradus (*n.* 413.); & consequenter angulus oppositus BAD contineret 90 gradus (*n.* 274.). Deinceps, ut inveniatur angulus CAD , instituetur analogia *n.* 388.

Cosinus anguli B est ad cosinum anguli C;

Ut sinus anguli inventi BAD, ad sinum anguli CAD; cujus species poterit esse indeterminata, si generatim dumtaxat considerentur partes cognitæ. Præcognosci tamen poterit, aut determinari species anguli CAD , ex particulari quæstione, cui præcedens analogia applicetur; quod idem intelligendum est de partibus quæsitis, in iis, qui consequuntur, casibus.

Si angulus B sit acutus, angulus BAC erit summa, vel differentia angulorum BAD & CAD ; prout angulus C erit acutus, aut obtusus.

Si angulus B sit obtusus, angulus BAC erit differentia angulorum BAD & CAD , five horum angulorum supplementum ad gradus 360, prout angulus C erit acutus, aut obtusus; ut alibi dictum est.

Casus II.

424. **L**atus AC , oppositum dato angulo B , habebitur per analogiam *n.* 386.

Ut

*Uti sinus anguli oppositi lateri cognito,
est ad sinum hujus lateris;*

*Ita sinus alterius anguli cogniti,
est ad sinum lateris, quod eidem opponitur;
cujus species poterit esse indeterminata, spectatis dum-
taxat tribus partibus cognitis.*

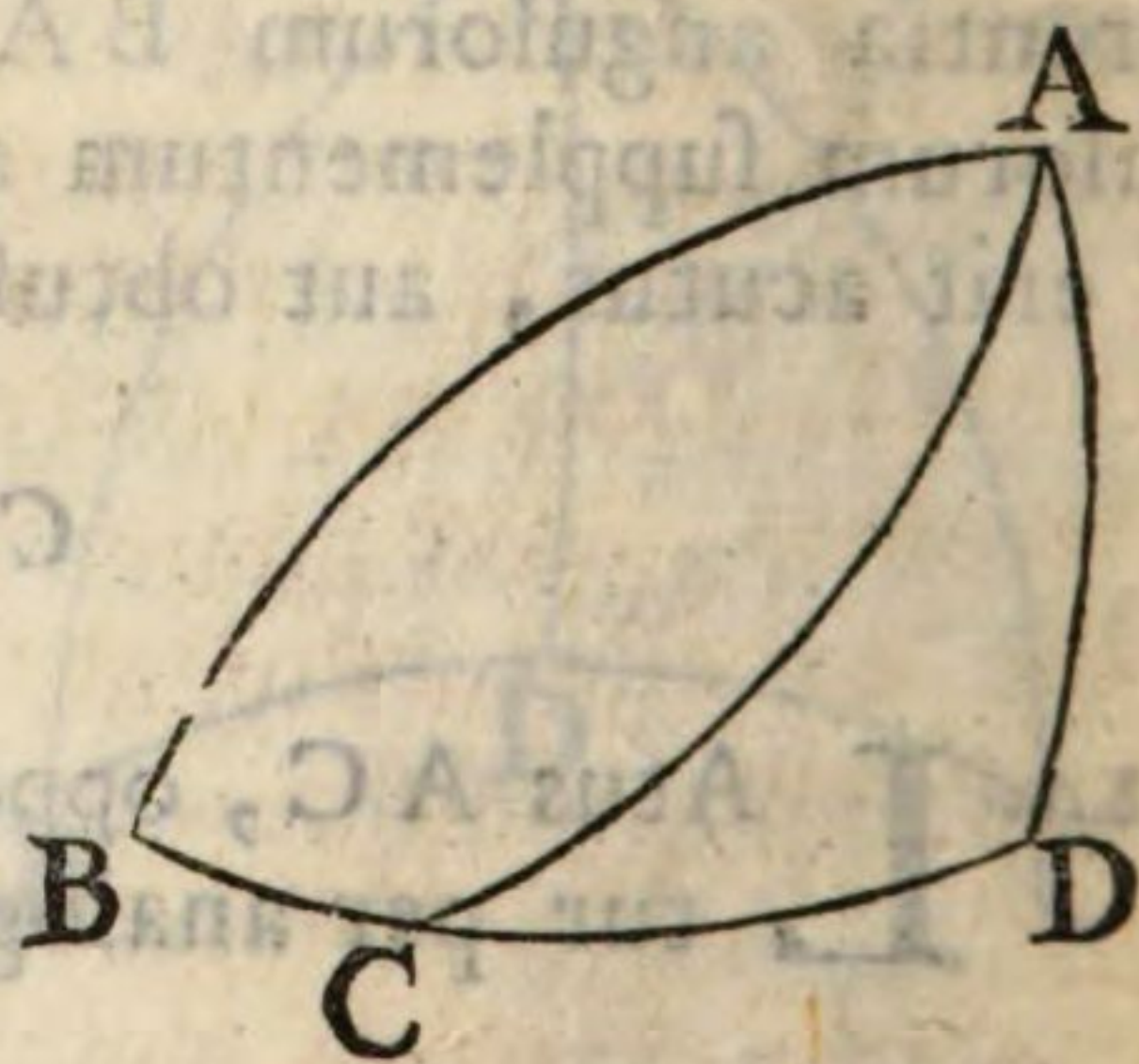
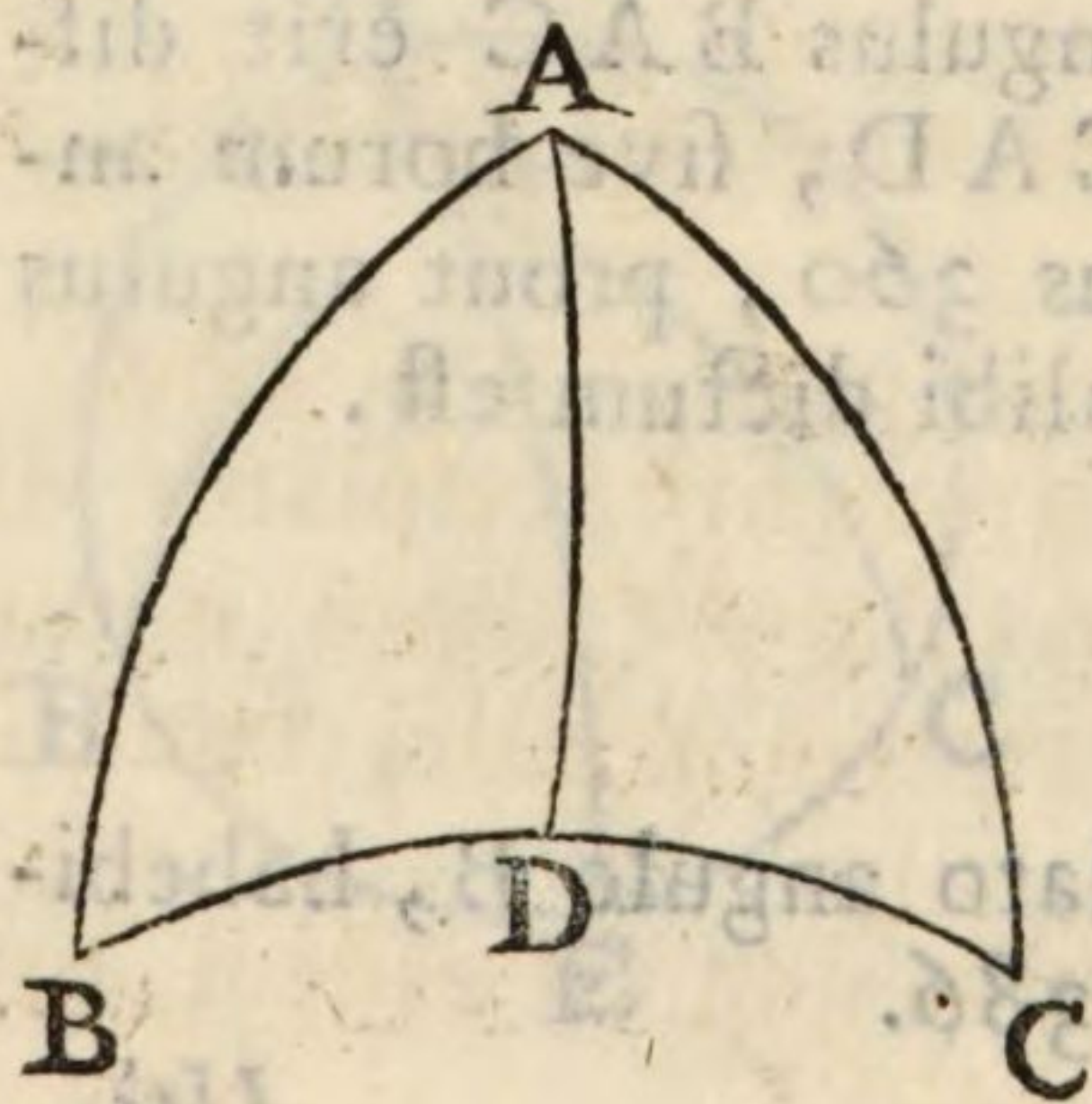
Si angulus CAD esset rectus, latus oppositum CD esset quadrans circuli (*n.* 274.); & hypotenusa AC trianguli ADC , similiter esset quadrans circuli (*n.* 282.). In hoc casu arcus perpendicularis AD totidem contineret gradus, quot angulus oppositus C (*n.* 334. 335.).

Casus III.

425. **U**T habeatur latus BC , quæratur oportet segmentum BD per analogiam *n.* 321., deductam a triangulo rectangulo ADB , cujus hypotenusa AB cognoscitur, & angulus ABD eidem adjacens, hoc pacto:

Cosinus anguli dati B est ad sinum totum;

*Uti cotangens hypotenusæ AB est ad cotang. segmenti BD ;
quod erit in eadem specie, in qua est hypotenusa AB ;
cùm enim arcus perpendicularis ponatur minor qua-
drante circuli, angulus adjacens ABD est semper acu-
tus, sive spectet ad triangulum ABC , sive eidem sit
exterior.*



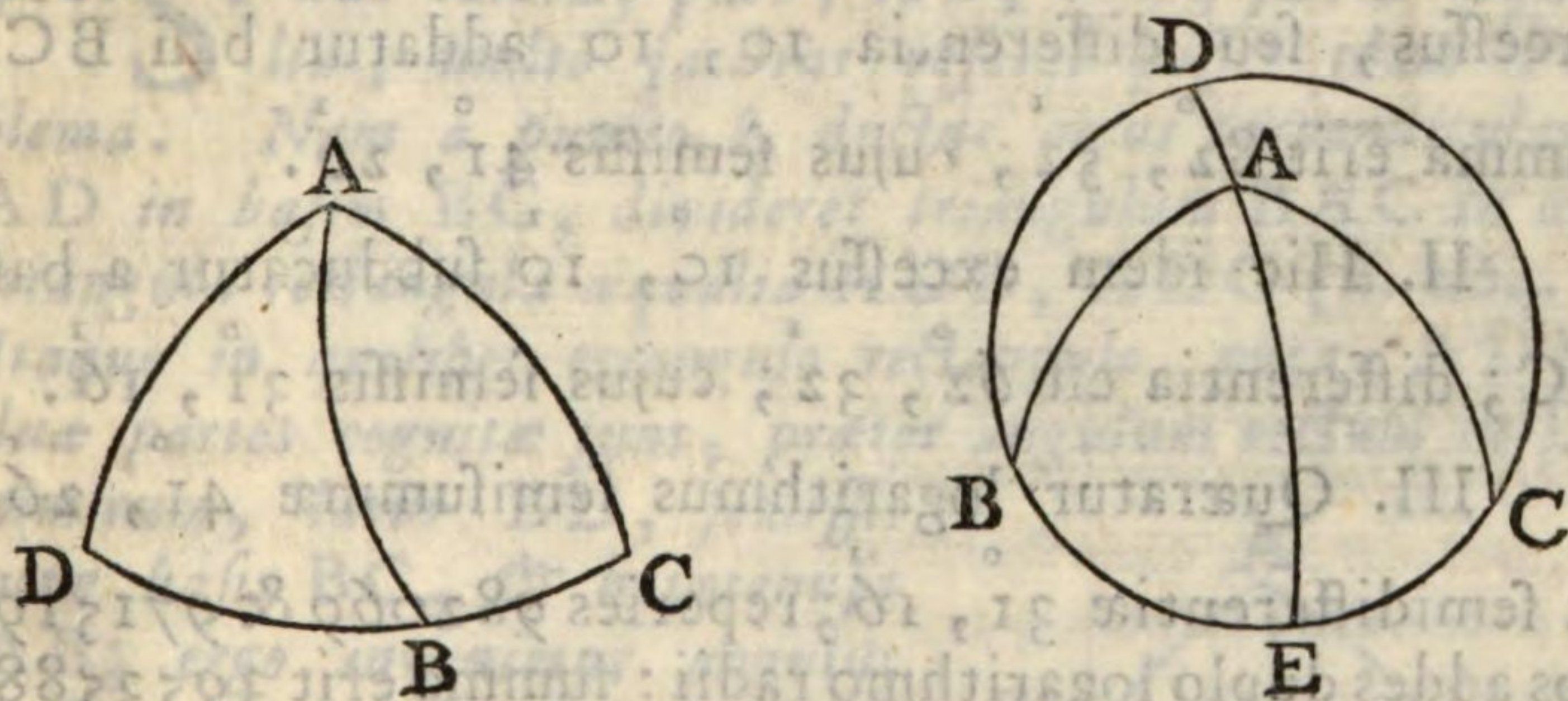
Dein-

Deinceps invenietur segmentum alterum CD per analogiam n. 392.

Tangens anguli C est ad tangentem anguli B ;
Uti sinus segmenti BD est ad sinum segmenti CD ;
 cujus species potest non esse determinata a tribus partibus cognitis.

Itaque, si angulus B sit acutus, ut in Figuris præcedentibus, latus BC erit summa, vel differentia segmentorum BD & CD , prout arcus perpendicularis AD cadet intra, vel extra triangulum ABC .

Si angulus B sit obtusus, latus BC erit differentia eorundem segmentorum BD & CD , five supplementum horum arcuum ad 360 gradus, prout angulus C erit acutus, vel obtusus (n. 410.).



PROBLEMA V.

426. **C**ognitis tribus lateribus trianguli sphærici, invenire angulos.

Hujus resolutionis methodus pendet a n. 400.

I. Duorum laterum anguli quæsit accipiatur differentia, five excessus majoris lateris supra minus: hic excessus adjiciatur basi ejusdem anguli; sumaturque semisumma.

II. Hic idem excessus subducatur ab eadem basi;

T. III.

Y

suma-

sumaturque residui semissis, sive semidifferentia.

III. Quærat^r logarithmus semisummæ, & logarithmus semidifferentiæ; hi duo logarithmi simul sumpti, addantur duplo logarithmo radii, seu sinus totius, ut habeatur summa.

IV. Ab hac summa subducatur summa logarithmorum duorum laterum angulum quæsitum comprehendentium; residui semissis, erit logarithmus semisseos ejusdem anguli.

Exemplum. In triangulo ABC sit $AB = 52^{\circ}, 22'$; $AC = 62^{\circ}, 32'$; $BC = 72^{\circ}, 42'$; quærat^rque angulus A .

I. Subducatur latus minus AB a majore AC ; & excessus, seu differentia $10^{\circ}, 10'$ addatur basi BC ; summa erit $82^{\circ}, 52'$; cujus semissis $41^{\circ}, 26'$.

II. Hic idem excessus $10^{\circ}, 10'$ subducatur a basi BC ; differentia est $62^{\circ}, 32'$; cujus semissis $31^{\circ}, 16'$.

III. Quærat^r logarithmus semisummæ $41^{\circ}, 26'$, & semidifferentiæ $31^{\circ}, 16'$; reperies 982069 & 971519 : hos addes duplo logarithmo radii: summa erit 3953588 .

IV. Ab hac summa subduces summam numerorum 989869 & 994806 , qui sunt logarithmi laterum AB, AC , nimirum, summam 1984675 ;

& residuum erit 1968913 ;

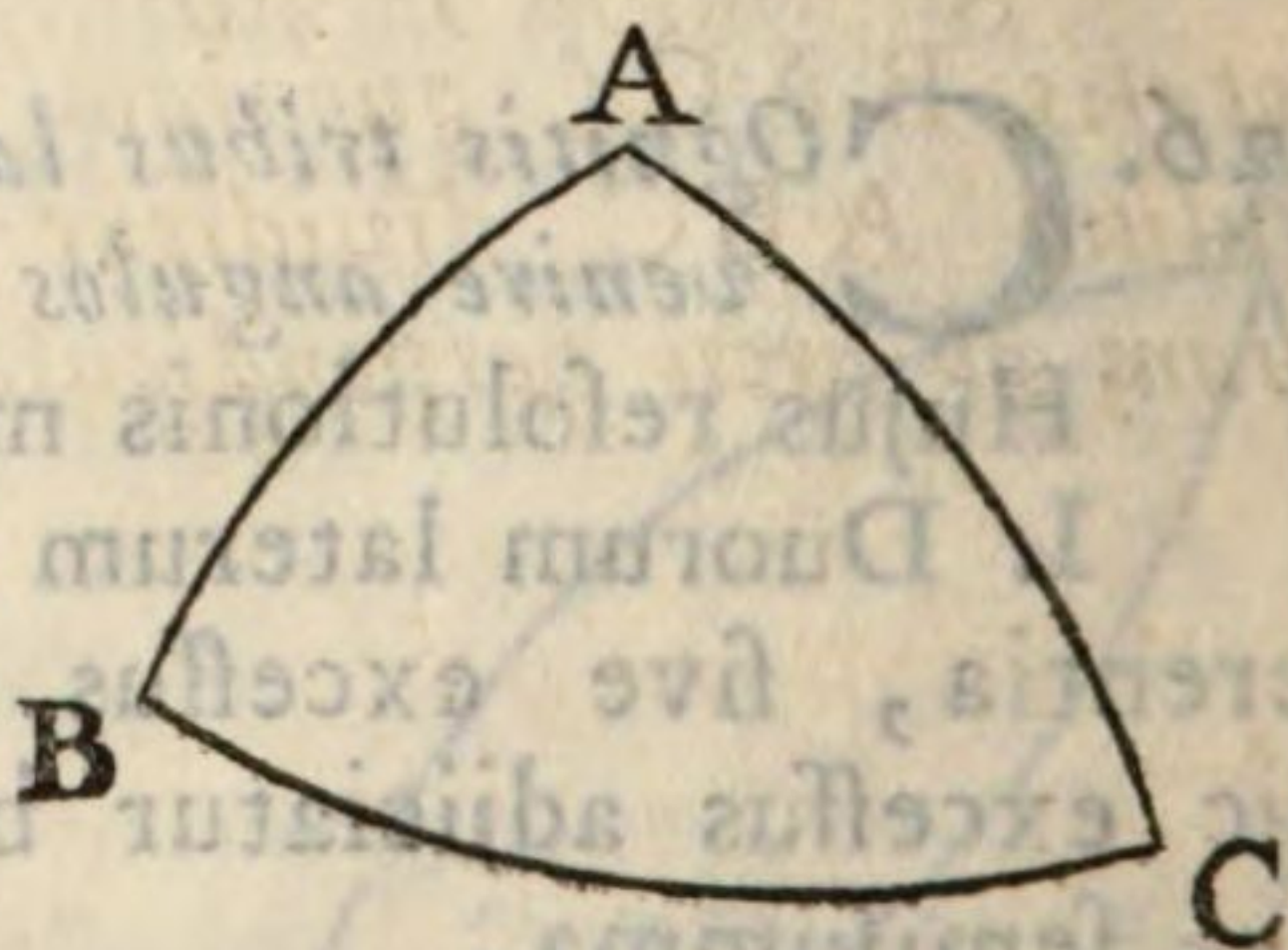
cujus semissis 984456 est lo-

garithmus $44^{\circ}, 21\frac{1}{2}'$, hoc est,

logarithmus semisseos anguli

A ; Ergo angulus A est $88^{\circ},$

$43'$.



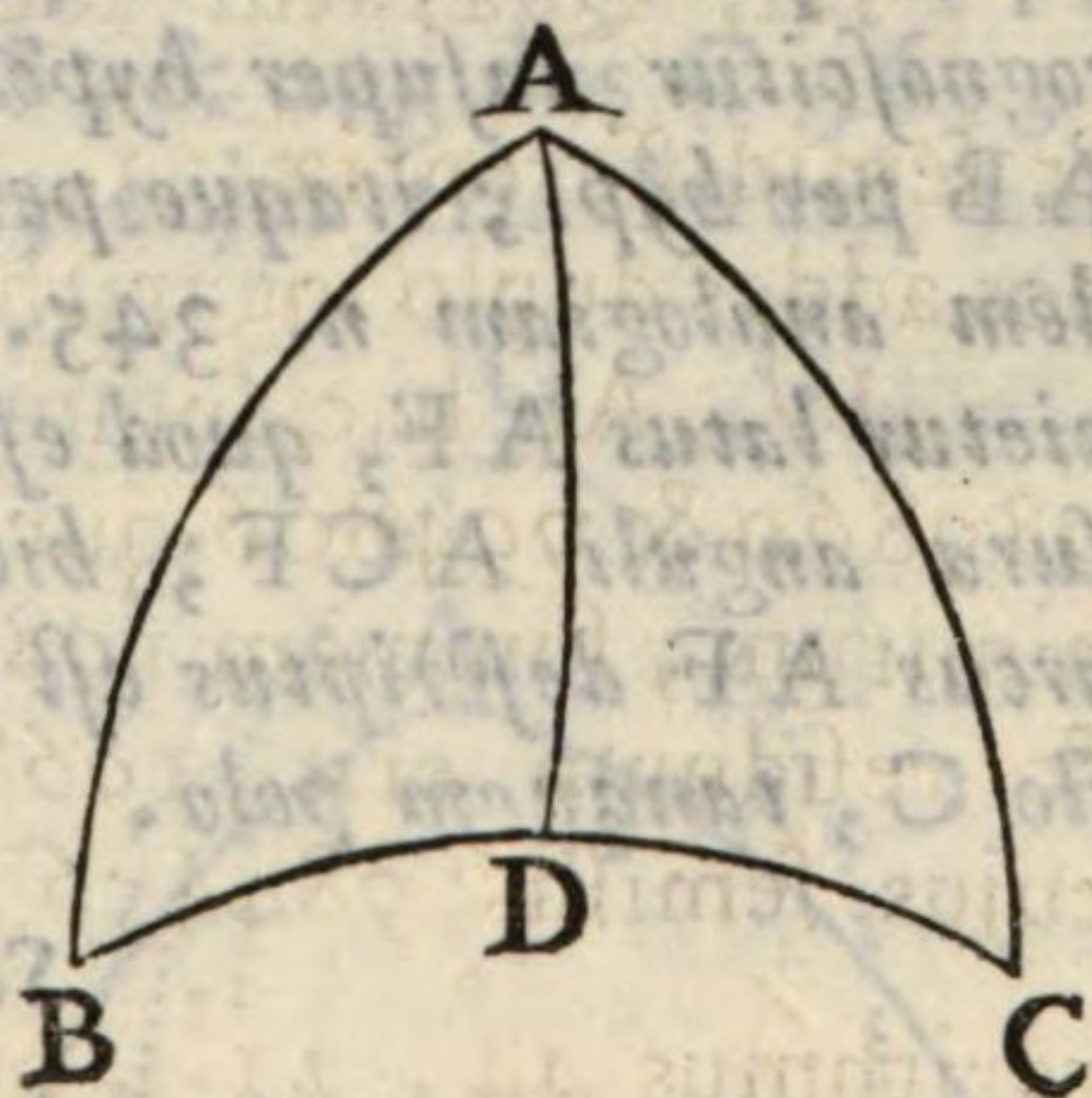
Eodem artificio reperientur duo reliqui anguli B & C.

Scholion I.

427. **H**Ujus operationis certitudo constare poterit per regressum demonstrativum, si nimirum, dato angulo A, qui nuper inventus est, $88^{\circ} 43'$, quærat per Problema I. latus BC, inveniaturque idem valor, qui reipsa respondet huic lateri BC.

Scholion II.

428. **S**I duo latera, puta, AB, AC, forent æqualia, multò facilius resolveri posset idem Problema. Nam a puncto A ductus arcus perpendicularis AD in basim BC, divideret triangulum BAC in duo triangula rectangula æqualia ADB, ADC (n. 264.). Itaque in quolibet triangulo rectangulo, puta, ADB, duæ partes cognitæ sunt, præter angulum rectum in D; nimirum, latus BD, semissis notæ basis BC, & hypotenua AB; ergo invenietur angulus B (n. 344.). Rursum invenietur angulus BAD (n. 343.); qui angulus est semissis anguli totalis BAC; quoniam triangulum ABC dividitur bifariam ab arcu perpendiculari.

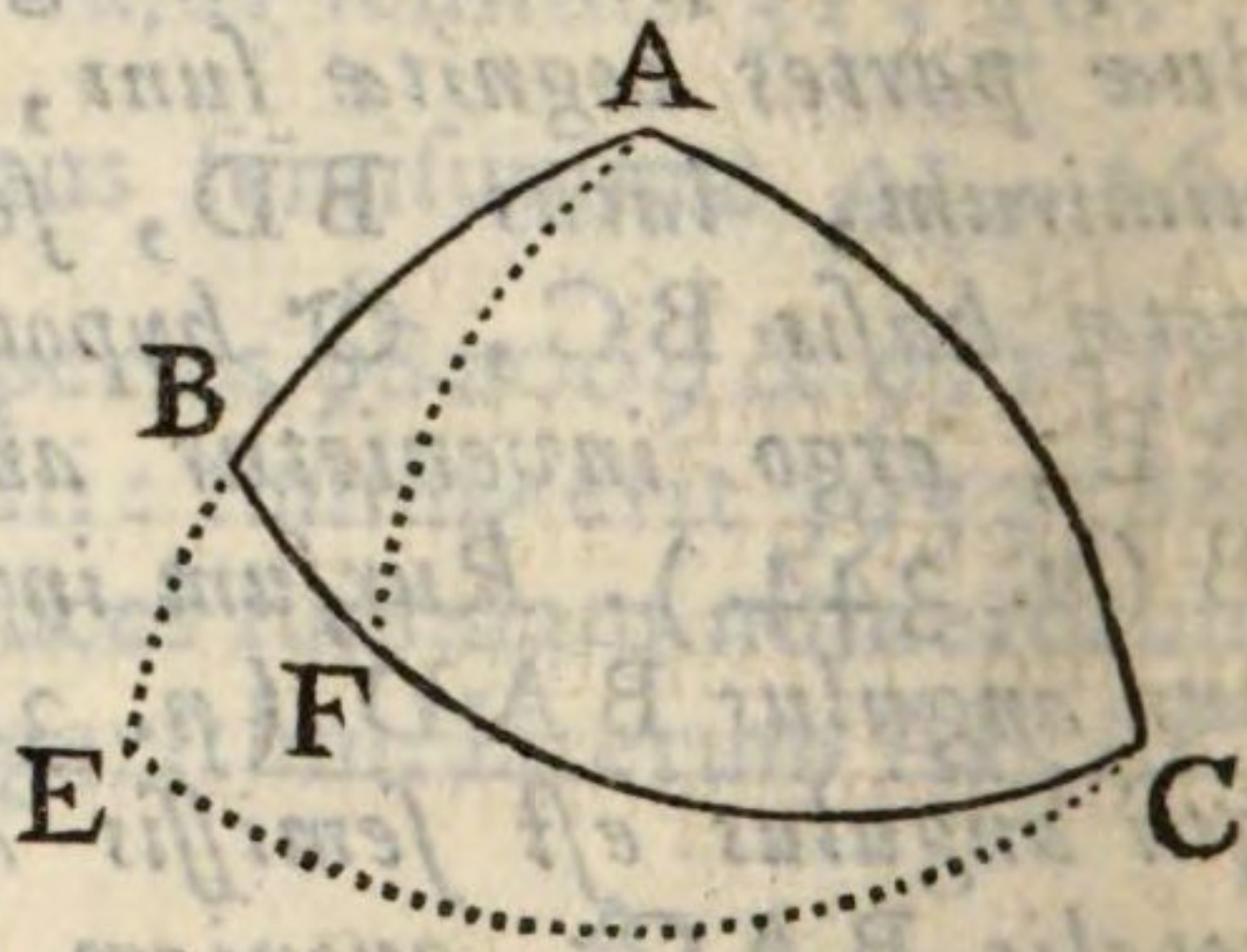


Scholion III.

429. **S**imiliter, si unum laterum, puta, AC , sit quadrans circuli, multò faciliùs resolvitur Problema.

Ab uno lateris AC extremo A , vel C , tanquam polo, & intervallo hujus lateris, describatur arcus CE , aut AF . Si describatur arcus CE , producatu^r oportet arcus AB usque ad occursum arcus CE , ut habeatur triangulum CEB , rectangulum in E (n. 230. 231.); quia arcus AE transit per polum arcus CE . Jam verò in hoc triangulo cognoscitur latus BE , quod est complementum arcus AB ; præterea datur hypotenusa BC , latus unum trianguli propositi; & consequenter invenietur latus CE , quod est mensura anguli BAC (n. 237.), si adhibeatur analogia n. 345.

Si descriptus foret arcus AF , haberetur triangulum AFB , rectangulum in F , in quo cognoscitur latus BF , tanquam excessus arcus dati CB supra quadrantem circuli CF ; cognoscitur insuper hypotenusa AB per hyp.; itaque per eandem analogiam n. 345. invenietur latus AF , quod est mensura anguli ACF ; hic enim arcus AF descriptus est a puncto C , tanquam polo.



Scholion IV.

SI angulus quæsitus, esset adjacens lateri, quod ponitur esse quadrans circuli, describatur oportet arcus a vertice anguli quæsitæ. Itaque, si quæretur angulus BAC , describatur arcus CE ; si quæretur angulus ACB , describatur arcus AF .

Sin

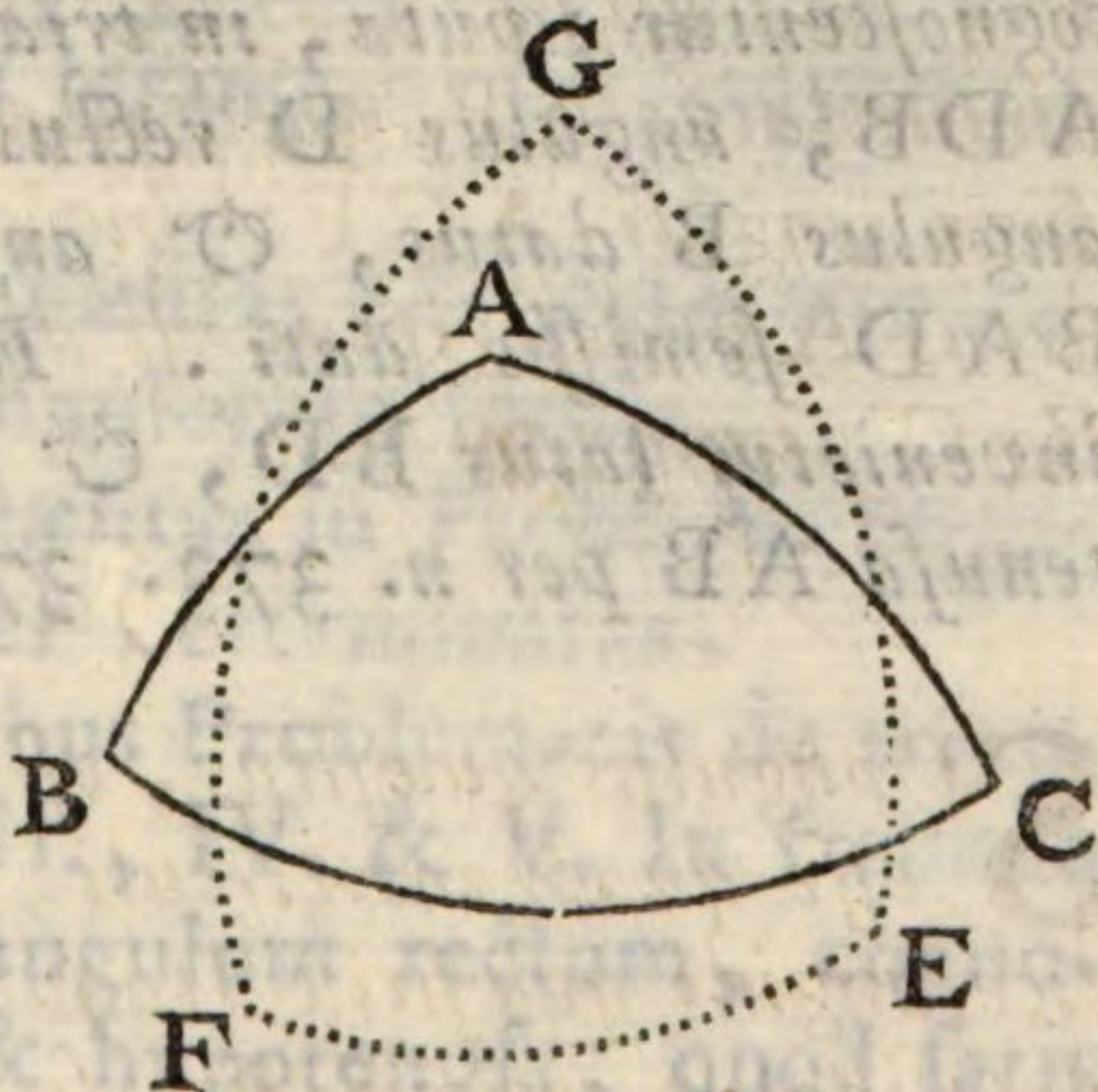
Sin autem inveniendus sit angulus B, oppositus quadranti circuli AC, describi poterit arcus vel a puncto A, vel a puncto C; si descriptus fuisset CE, inquireretur angulus CBE ope trianguli CEB, rectanguli in E; & usui erit analogia n. 344.; hic angulus CBE est supplementum anguli ABC.

PROBLEMA VI.

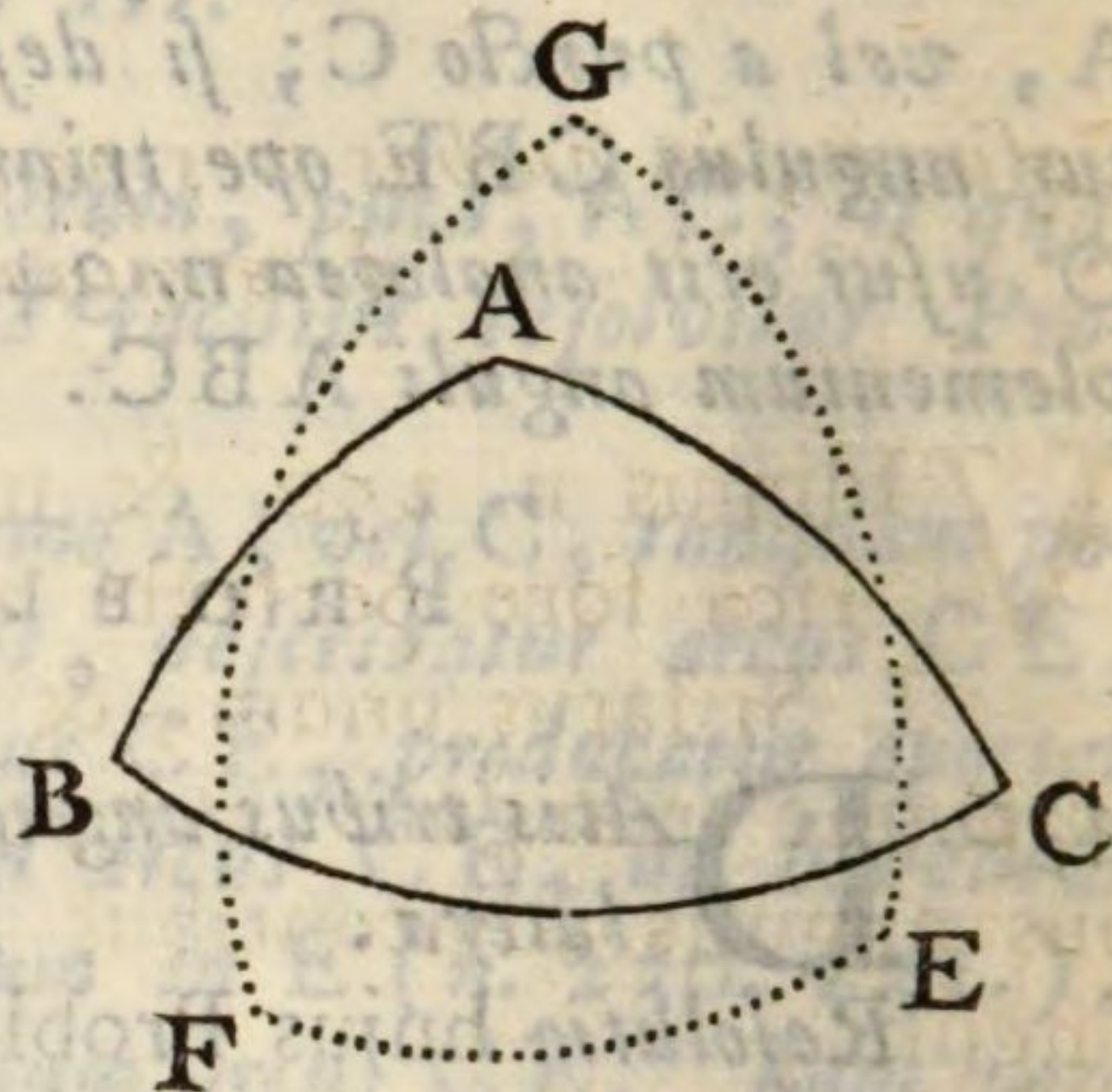
430. **D** *Atis tribus angulis trianguli sphærici, invenire latera.*

Resolutio hujus Problematis eadem methodo præcedentis conficitur. Nam, si concipiatur secundum triangulum, cujus latera sint supplementa angulorum primi trianguli propositi, demonstrabitur, latera hujus primi trianguli fore pariter supplementa angulorum secundi trianguli. Itaque invenientur hæc latera quæstis angulis secundi trianguli, ope suorum laterum, quæ sunt cognita, quoniam hæc sunt supplementa angulorum primi trianguli.

Exemplum. Esto triangulum BAC, cujus angulus A fit $88^{\circ}, 43'$; angulus B $68^{\circ}, 18'$; & angulus C $56^{\circ}, 2'$. Describatur triangulum EFG, cujus tria latera sint supplementa angulorum, qui primo triangulo respondent; nimirum, ponatur latus EF $91^{\circ}, 17'$; latus EG $111^{\circ}, 42'$; latus FG $123^{\circ}, 58'$. Ope præcedentis Problematis, cujus calculum mox subdam, quærantur anguli hujus ultimi trianguli: invenietur G $= 107^{\circ}, 18'$; F $= 117^{\circ}, 28'$; & E

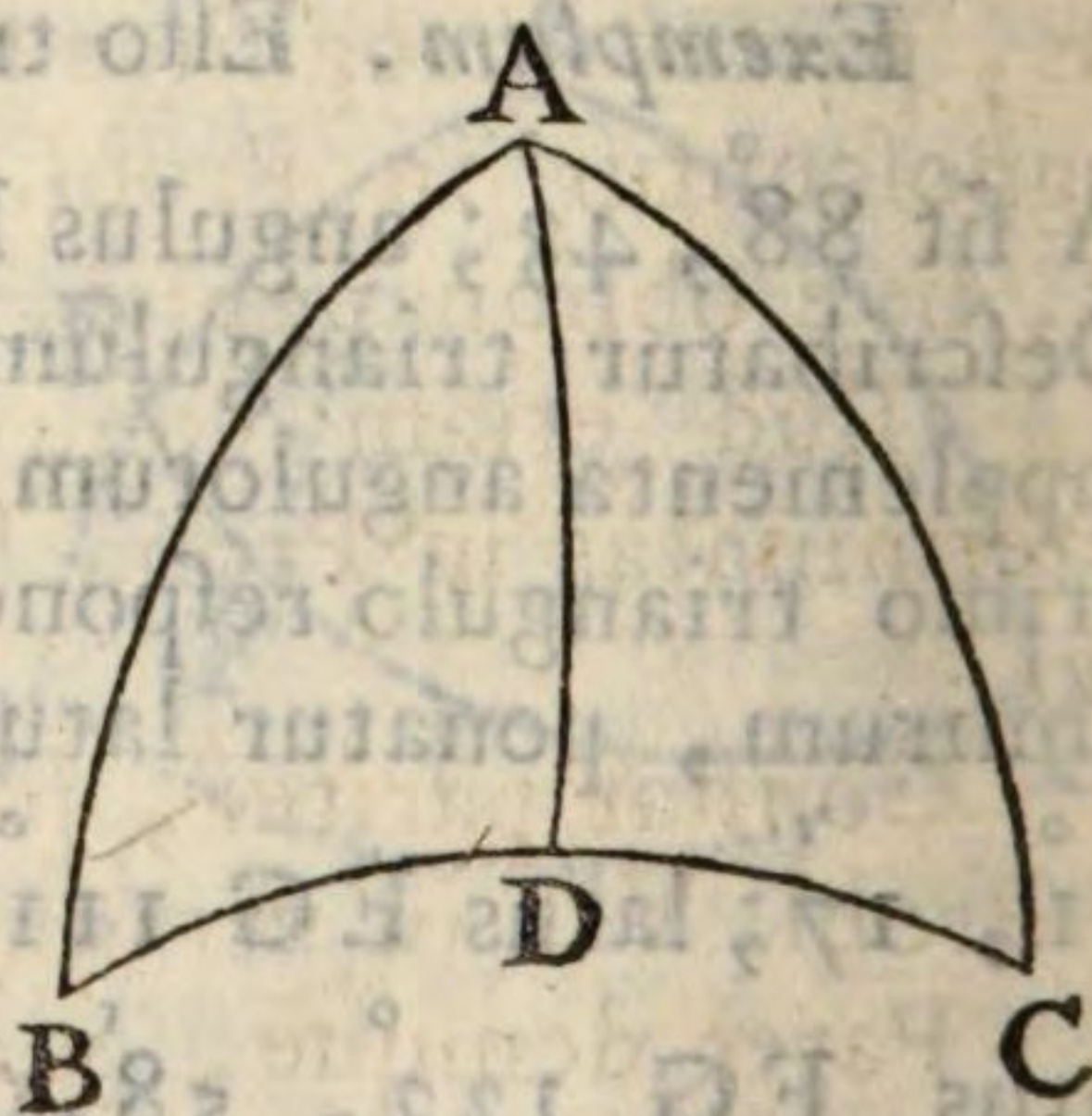


& $E = 127^{\circ}, 37'$. Atqui supplementa horum angulorum sunt $72^{\circ}, 42'$; $62^{\circ}, 32'$; & $52^{\circ}, 23'$; Ergo $BC = 72^{\circ}, 42'$; $AC = 62^{\circ}, 32'$; $AB = 52^{\circ}, 23'$.



Scholion.

SI quando contingat, ut duo anguli trianguli propositi sint æquales, multò facilius, quàm generali methode resolvi Problema poterit. Estò triangulum BAC , cujus duo anguli B & C sint æquales: ducatur in basim BC arcus perpendicularis AD , qui datum triangulum dividet in duo æqualia triangula rectangula (n. 264.), quorum anguli omnes cognoscentur; puta, in triangulo ADB , angulus D rectus est, angulus B datus, & angulus BAD semissis dati. Itaque invenietur latus BD , & hypotenusa AB per n. 373. 374.



SYNOPSIS

Casuum, in quibus tres partes cognitæ trianguli sphærici, determinant reliquas.

VIdimus n. 250. & n. 257., duo triangula sphærica fore perfectè æqualia,

I. Si latus unum, & duo anguli eidem adjacentes in primo triangulo, æquentur respectivè lateri, & duobus angulis adjacentibus in altero triangulo, singula singulis;

II. Si duo latera, & angulus ab iisdem interceptus in uno triangulo, æquentur duobus lateribus, & angulo intercepto, in altero triangulo;

III. Si tria latera unius trianguli æquentur tribus alterius, singula singulis;

IV. Si tres anguli unius æquentur tribus alterius trianguli, respectivè.

His positis, evidenter consequitur ex præcedentibus, partes incognitas fore determinatas per eas, quæ cognoscuntur in Probl. I. de triangulis sive rectangulis, sive obliquangulis.

Illud etiam consequitur, partes incognitas fore determinatas in Probl. III. in triangulis utriusque speciei.

Constat pariter, partes quæsitæ esse determinatas in Probl. VI. in utraque triangulorum specie.

Patet denique, partes quæsitæ in Probl. V. trianguli obliquanguli, esse pariter determinatas.

Idem etiam constat in tribus Problematis de triangulis rectangulis, nimirum, II., IV. & V. In secundo fit suppositio, quòd præter angulum rectum, cognoscatur pariter latus unum, & hypotenusæ; quod satis est, ut reliquæ partes determinantur; uti abunde con-

stare poterit ex analogiis adhibitis ad inveniendas easdem partes, & observationibus adjectis, ut harum partium species determinaretur; nimirum, ut determinaretur, an hæ partes essent majores, aut minores 90 gradibus. Hujusmodi observationibus opus erat, ut cognosceretur species partium; nam terminus analogiarum ultimus, est vel sinus, vel tangens, vel secans; quæ convenire possunt duobus arcubus, vel duobus angulis, quorum unus sit alterius supplementum. Itaque, quamvis analogia non determinet speciem partis quæsitæ, tamen hæc species satis determinatur ex observationibus adjectis cuilibet analogiæ Problematæ II.

Idem dicendum de Probl. V. in triangulis rectangulis.

Quod attinet ad IV. Probl., in quo, præter angulum rectum, supponitur cognitum latus unum, & angulus eidem oppositus, quamvis tres istæ partes cognitæ non sufficiant ad determinandam speciem reliquarum, tamen ex singulis analogiis cognoscitur, partem quæsitam continere non posse nisi certum numerum graduum infra 90, aut alium numerum graduum, qui sit supplementum primi; semperque ex particulari quæstione dijudicari poterit species partis quæsitæ, an minor esse debeat, aut major gradibus 90 (n. 363.).

Eadem observatio pertinet ad II. & IV. Problema in triangulis obliquangulis.

Idem etiam constat in tribus Problematæ de triangulis rectangulis, nimirum, II., IV. & V. In secundo, quod præter angulum rectum, cognitum sit latus unum, & hypotenusa; quod latus sit, ut præter latus unum, & hypotenusa, sit etiam cognitum latus alterum, & hypotenusa; uti abunde constat.

A P P E N D I X.

*De geometrica Logarithmorum origine,
& constructione.*

431. **G**eometria usque adeò cum Arithmetica conexa est, ut altera alteri præire videatur, facemque præferre. Nam, quemadmodum in Geometria linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita vicissim in Arithmetica interdum expedit, ut numeri per lineas exponantur; quod ut præstetur, assumatur oportet linea aliqua, quæ ipsa unitatem repræsentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps. Hac ratione quorundam numerorum genesis, & proprietates meliùs concipiuntur, ac multò clariùs in animo versantur, quàm per abstractos numeros.

Ut autem Tirones statim assequantur, qua methodo, quave analogià Arithmetica logarithmorum per curvam geometricam logarithmicam repræsentari possit, paucis quædam attingam, quæ de progressionibus geometricis, & earum logarithmis fusiùs exposui in Commentariis Arith. universalis Lib. II. parte III. n. 160.

D E F I N I T I O N E S.

432. **P**rogressio geometrica, seu termini in continua proportionem geometrica dici solent, quando per æquales rationes continuè proceditur; oriunturque continuè multiplicando per communis rationis exponentem, seu continuum multiplicatorem; crescendo quidem, si continuus ille multiplicator sit major unitate; decrescendo, si minor.

Ty-

Typus progressionis in ratione dupla crescentis, cujus communis multiplicator est $2 = m$.

$$2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 4 \cdot 2 \times 8 \cdot 2 \times 16.$$

$$a \cdot am \cdot am^2 \cdot am^3 \cdot am^4.$$

$$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32.$$

Typus progressionis in ratione subdupla decrescen-
tis, cujus continuus multiplicator est $\frac{1}{2} = \frac{1}{m}$; seu,
quod eodem recidit, cujus communis, & continuus
divisor est $2 = m$.

$$32 \cdot \frac{1}{2} \times 32 \cdot \frac{1}{4} \times 32 \cdot \frac{1}{8} \times 32 \cdot \frac{1}{16} \times 32.$$

$$a \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{a}{m^2} \cdot \frac{a}{m^3} \cdot \frac{a}{m^4}.$$

$$32 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2.$$

433. Progressio geometrica omnium simplicissima, & maximè naturalis, est ea, quæ ab 1 inchoatur, ut in sequenti typo. In hoc casu terminus secundus ab unitate, si progressio sit crescens, est communis multiplicator; sin autem progressio sit decrescens, est communis divisor.

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 4 \cdot 2 \times 8 \cdot 2 \times 16.$$

$$1 \cdot a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5.$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32}.$$

$$1 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^5}.$$

434. In progressionem geometricam, numeri cuilibet termino suffixi, non solum potestatem ejusdem, verum etiam distantiam a primo designant; ac proinde vocari solent indices distantiae, quam quisque terminus ab unitate obtinet; puta, a^4 , vel $\frac{1}{a^4}$, est in quarto ab unitate loco, progressionis vel crescentis, vel decre-
scentis; similiter a^5 , vel $\frac{1}{a^5}$, quinquies magis distat ab

unita-

unitate, quàm a , seu a^1 , qui immediate sequitur unitatem.

435. Quamobrem loca terminorum progressionis numerantur ab unitate exclusivè; puta, $1^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$. Hinc numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, supra progressionis terminos adscripti, indicant quotus quisque sit ab unitate, cujus index est 0; nam unitas non distat a seipsa.

436. Eadem series quantitatum geometricè proportionalium continuari potest utrinque, tam descendendo versùs sinistram, quàm ascendendo versùs dexteram; termini enim

$$\frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^1} \cdot 1^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 \text{ \&c.}$$

sunt omnes in eadem progressionem geometrica.

437. Cùm autem distantia ipsius a^1 ab unitate, sit versùs dexteram, & positiva, seu $+1$, distantia æqualis, in contrariam partem; scilicet distantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa, seu -1 , qui erit index termi-

ni $\frac{1}{a}$; pro quo scribi pariter potest a^{-1} . Similiter in

termino a^{-2} , index -2 ostendit, terminum in secundo loco ab unitate versùs sinistram locari; idemque valet terminus a^{-2} , ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} est idem, ac

$\frac{1}{a^3}$. Indices enim negativi ostendunt terminos, ad quos

pertinent, in partem discedere contrariam ei, qua ab unitate progrediuntur termini, quorum indices sunt positivi; ac proinde series quantitatum geometricè proportionalium utrinque continuata, descendendo versùs

sus sinistram ab unitate, & ascendendo versus dexteram, poterit etiam sic exhiberi:

$$a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . 1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 \&c.$$

438. Si inter terminos 1 & a inferatur medius proportionalis, qui est $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$; nam ejus distantia ab unitate erit semiffis distantiae a ab unitate; adeoque pro $\sqrt{a}$ scribi potest $a^{\frac{1}{2}}$. Et si inter a & a^2 inferatur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$, seu $\frac{3}{2}$; nam ejus distantia erit sesquialtera distantiae ipsius a ab unitate.

Si inter 1 & a inferantur duo medii proportionales, horum primus est radix cubica ipsius a ; cujus index debet esse $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille distat ab unitate, tertia dumtaxat parte distantiae ipsius a ; adeoque radix cubica scribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hæc uberius declarata, & demonstrata invenies in meis Comment. Arith. univers. Lib. II. p. III. n. 195. His præmissis, sit

LEMMA.

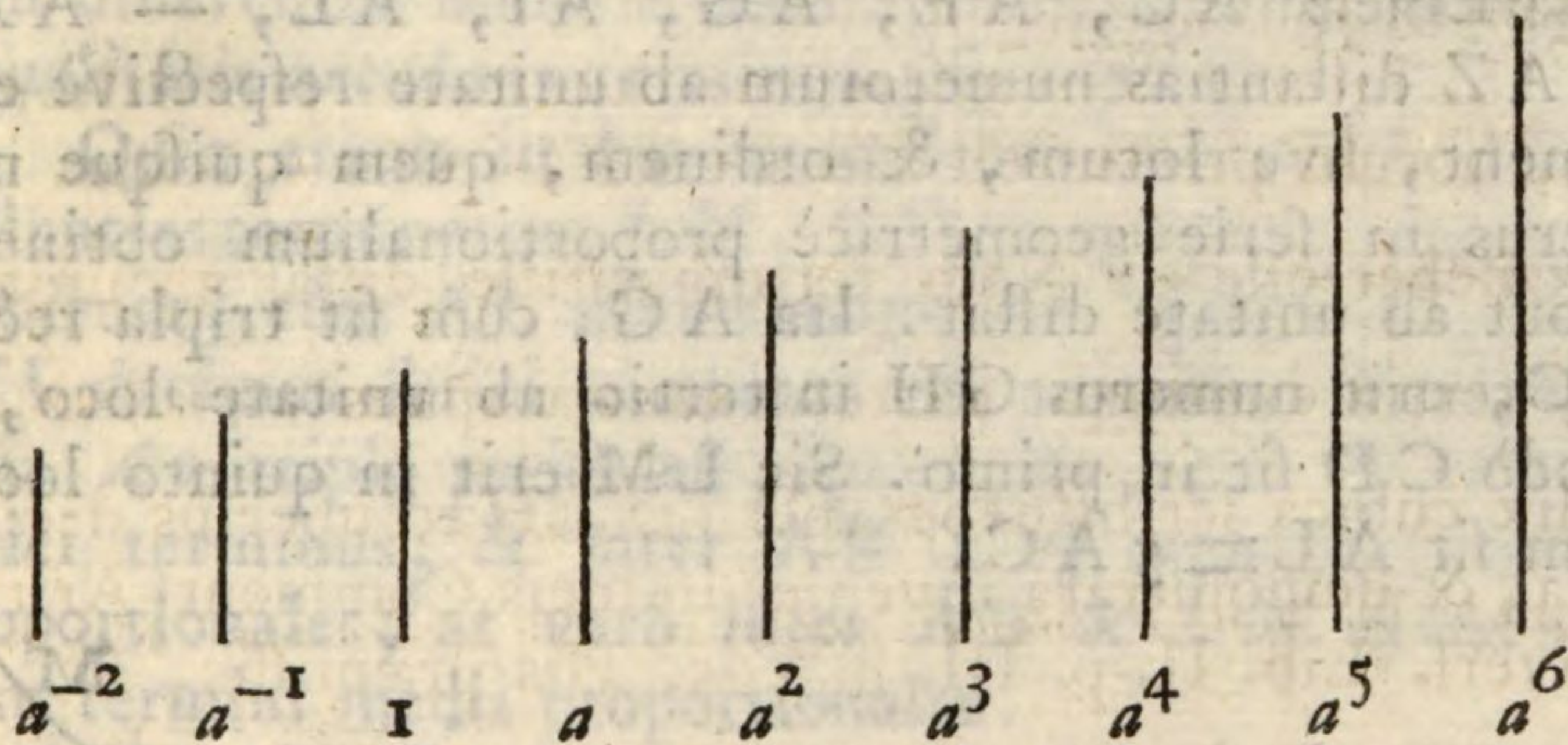
439. **S**eries linearum geometricè proportionalium continuari potest utrinque ab unitate, tam descendendo versus sinistram, quàm ascendendo versus dexteram.

Assumatur pro libito linea quævis 1, quæ unitatem repræsentet. Jam, si quælibet alia linea a in seipsam ducatur, quantitas a^2 , quæ exinde prodit, non æstimanda est tanquam duarum dimensionum, seu, ut quadratum geometricum, cujus latus sit linea a , sed tanquam linea, quæ sit tertia proportionalis lineæ pro unitate assumptæ, & alterius lineæ a .

Sic

Sic etiam, si a^2 per a multiplicetur, quæ pro-
dit a^3 , non erit trium dimensionum quantitas, seu cu-
bus geometricus; sed linea, quæ est quartus terminus
in progressionem geometrica, cujus primus terminus est
1, secundus a . Nam termini 1, a , a^2 , a^3 , a^4 &c.
sunt in continua ratione 1 ad a .

Similiter ab unitate versùs sinistram continuari
potest descendendo eadem series geometrica a^{-1} , a^{-2}
&c., uti nuper prædiximus; & quotlibet medii pro-
portionales inferi possunt.



Scholion.

440. **I**N nostris Commentariis Arith. univers. Lib. I. n.
8. cum Newtono multiplicationem definivimus
illam esse, in qua quæritur nova quantitas, in ea qua-
cunque ratione ad quantitatem multiplicandam, quam ha-
bet multiplicator ad unitatem. Hæc universalior notio ge-
nus omne quantitatum complectitur; neque tantum fit per
abstractos numeros, sed etiam per concretas quantitates,
ut per lineas, superficies, pondera &c.; quatenus hæ
ad aliquam sui generis quantitatem, tanquam unitatem,
relatæ, rationes numerorum exprimere possunt, & vices
supplere.

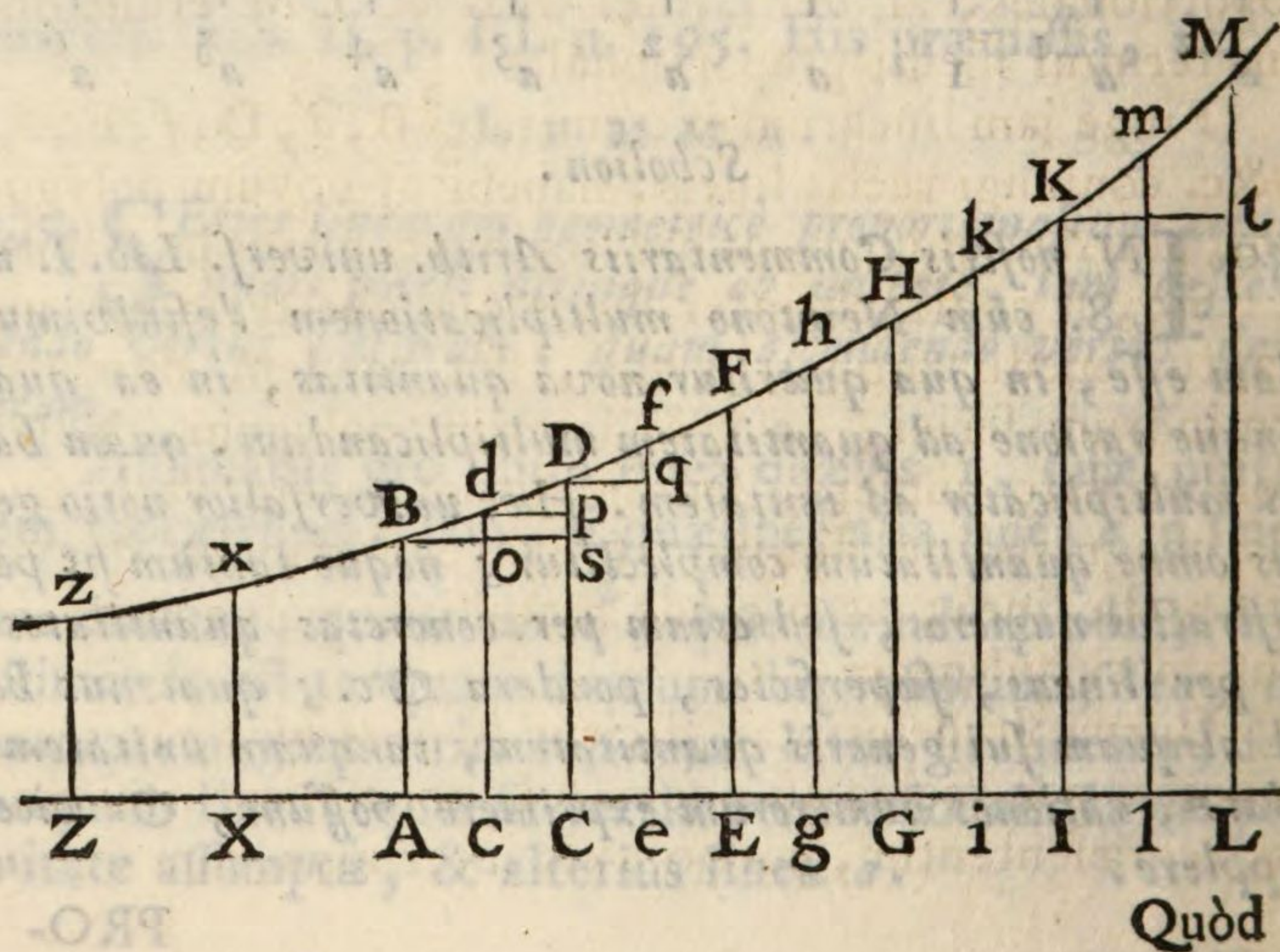
PRO-

PROPOSITIO I.

441. **G** *Enesis lineæ logarithmicæ.*

Resolutio. Super linea AL , utrinque indefinite extensa, capiantur AC, CE, EG, GI, IL dextrorsum, & pariter AX, XZ &c. sinistrorsum, omnes inter se æquales; & a punctis Z, X, A, C, E, G, I, L erigantur perpendiculares rectæ $Zz, Xx, AB, CD, EF, GH, IK, LM$, quæ sint omnes continuè proportionales, numerosque repræsentent, quorum AB sit unitas.

Lineæ AC, AE, AG, AI, AL , — AX , — AZ distantias numerorum ab unitate respectivè exponent, sive locum, & ordinem, quem quisque numerus in serie geometricè proportionalium obtinet, prout ab unitate distat. Ita AG , cùm sit tripla rectæ AC , erit numerus GH in tertio ab unitate loco, si modò CD sit in primo. Sic LM erit in quinto loco, cùm sit $AL = 5 AC$.



Quodd si proportionalium extremitates z, x, B, D, F, H, K, M rectis lineis jungantur; figura $zZLM$ erit polygonum, pluribus, aut paucioribus constans lateribus, prout plures, aut pauciores in progressionem termini fuerint.

Si rursus partes AC, CE, EG, GI, IL bisecentur in punctis c, e, g, i, l , & similiter excitentur perpendiculares cd, ef, gh, ik, lm , quæ sint mediæ proportionales inter AB, CD , inter CD, EF &c., nova orietur proportionalium series, cujus termini, incipiendo ab eo, qui proximè sequitur unitatem, duplò plures sunt, quàm in prima serie; & terminorum differentia minores fiunt; propiùsque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quàm prius.

Quin etiam in hac nova serie, rectæ AL, AC distantias terminorum LM, CD ab unitate exponent; nimirum, cum AL decies major sit, quàm Ac , erit LM decimus seriei terminus ab unitate. Similiter, quia Ae triplò major est, quàm Ac , erit ef tertius seriei terminus; & inter AB & ef erunt duo medii proportionales; at verò inter AB & LM erunt novem termini medii proportionales.

Finge jam linearum extremitates B, d, D, f, F, b, H &c. conjungi rectis lineis: habebitur novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus constans lateribus.

Sic, si continuò inter binos quosque terminos inferantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum seriei, sicut & laterum polygoni, major quolibet dato numero, seu infinitus; latera verò singula magnitudine diminuta, evadent minora quavis data recta linea; ac proinde mutabitur polygonum in figuram curvilineam.

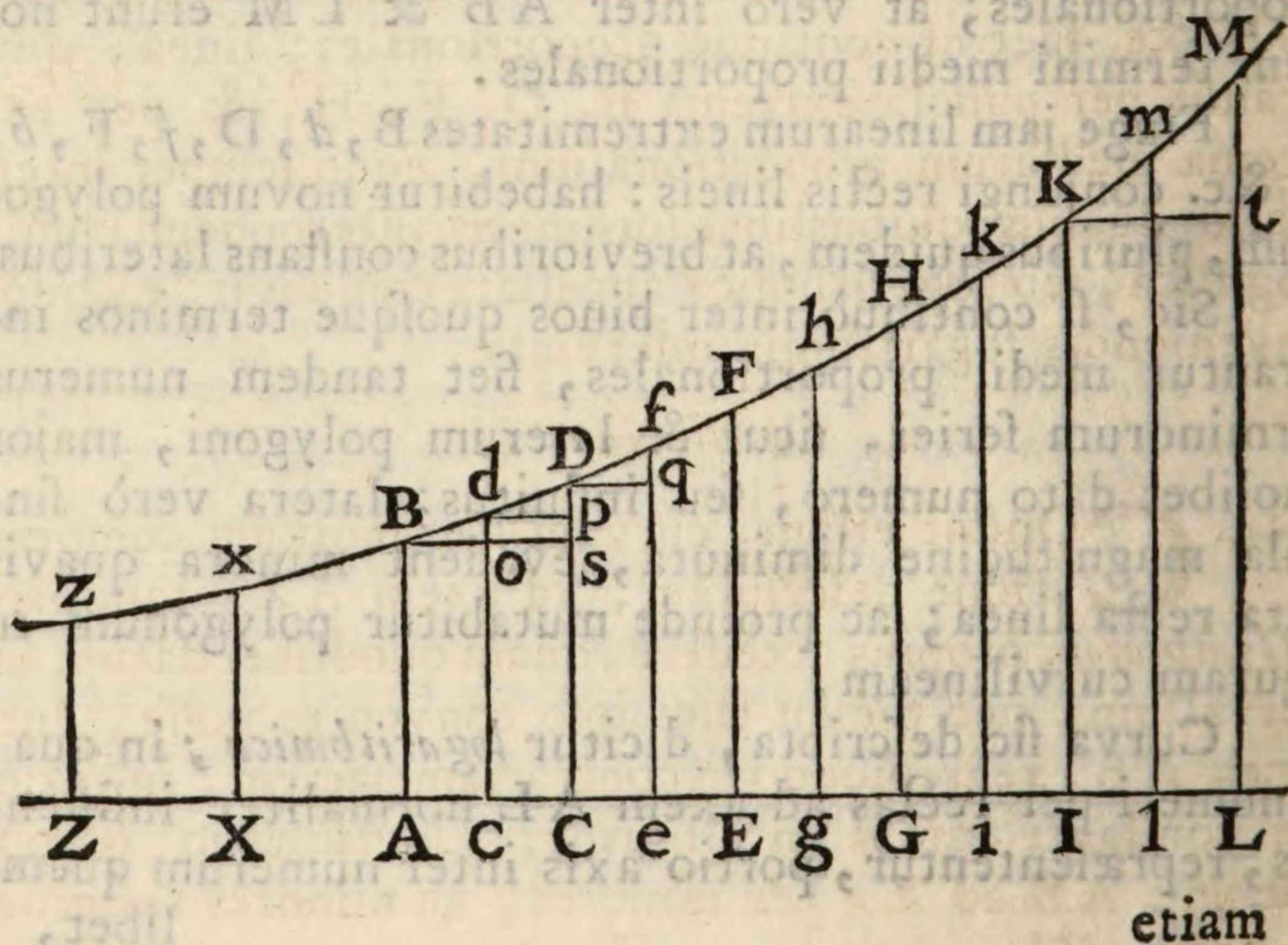
Curva sic descripta, dicitur *logarithmica*; in qua, si numeri per rectas ad axem AL normaliter insistentes, repræsententur, portio axis inter numerum quemlibet,

libet, & unitatem intercepta, ostendit locum, seu ordinem, quem numerus ille obtinet in serie geometrica proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem distantium; puta, si AL sit quintuplò major, quàm AC , sintque ab unitate ad LM mille termini continuè proportionales, erunt ab unitate ad CD ducenti termini ejusdem seriei; seu erit CD terminus seriei ducentessimus ab unitate AB .

PROPOSITIO II.

442. **G** *Enesis ejusdem curvæ logarithmicæ, duorum motuum compositione descriptæ.*

Resolutio. Primus logarithmorum inventor Neperus concipit, eandem curvam duobus motibus describi, quorum unus æquabilis est, alter verò in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur; videlicet, si recta AB super AL uniformiter incedat, adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus æqualia spatia describat; interea tamen ita crescat AB , ut æqualibus



etiam temporibus incrementa capiat, quæ sint toti lineæ crescenti proportionalia; nimirum, si AB , progrediendo in cd , augeatur parte od ; & hinc æquali tempore, quando in CD pervenerit, augeatur simili parte Dp , ita ut $Dp:dc::do:AB$, hoc est, incrementa Dp , do , æqualibus temporibus facta, semper sint totis dc , AB proportionalia; vel, si linea AB , regrediendo in contrariam partem, in ratione constanti ita minuatur, ut dum æqualia spatia AX , XZ pertransit, decrementsa patiat $AB - Xx$, $Xx - Zz$, quæ sint ipsis AB , Xx proportionalia; Lineæ sic crescentis, aut decrescens terminus logarithmicam describet. Nam, cum sit $AB:do::dc:Dp::DC:fq$, erit componendo, $AB:dc::dc:DC::DC:fe$; & ita deinceps.

Corollarium I.

443. **H**inc logistica, seu logarithmica dicitur *linea illa curva, in qua ordinatæ ad æquales axis partes, sunt geometricè proportionales*; nempe diviso axe AL in quotlibet partes æquales AC , CE , EG &c., si ad earumdem terminos ordinatæ AB , CD , EF , GH &c. fuerint continuè proportionales; linea, quæ transit per puncta extrema B , D , F , H , & per extrema mediarum proportionalium, æquo semper intervallo duabus quibuslibet ordinatis interponendarum, logistica, seu logarithmica appellari consuevit; eò quòd inveniendis logarithmis inserviat.

Corollarium II.

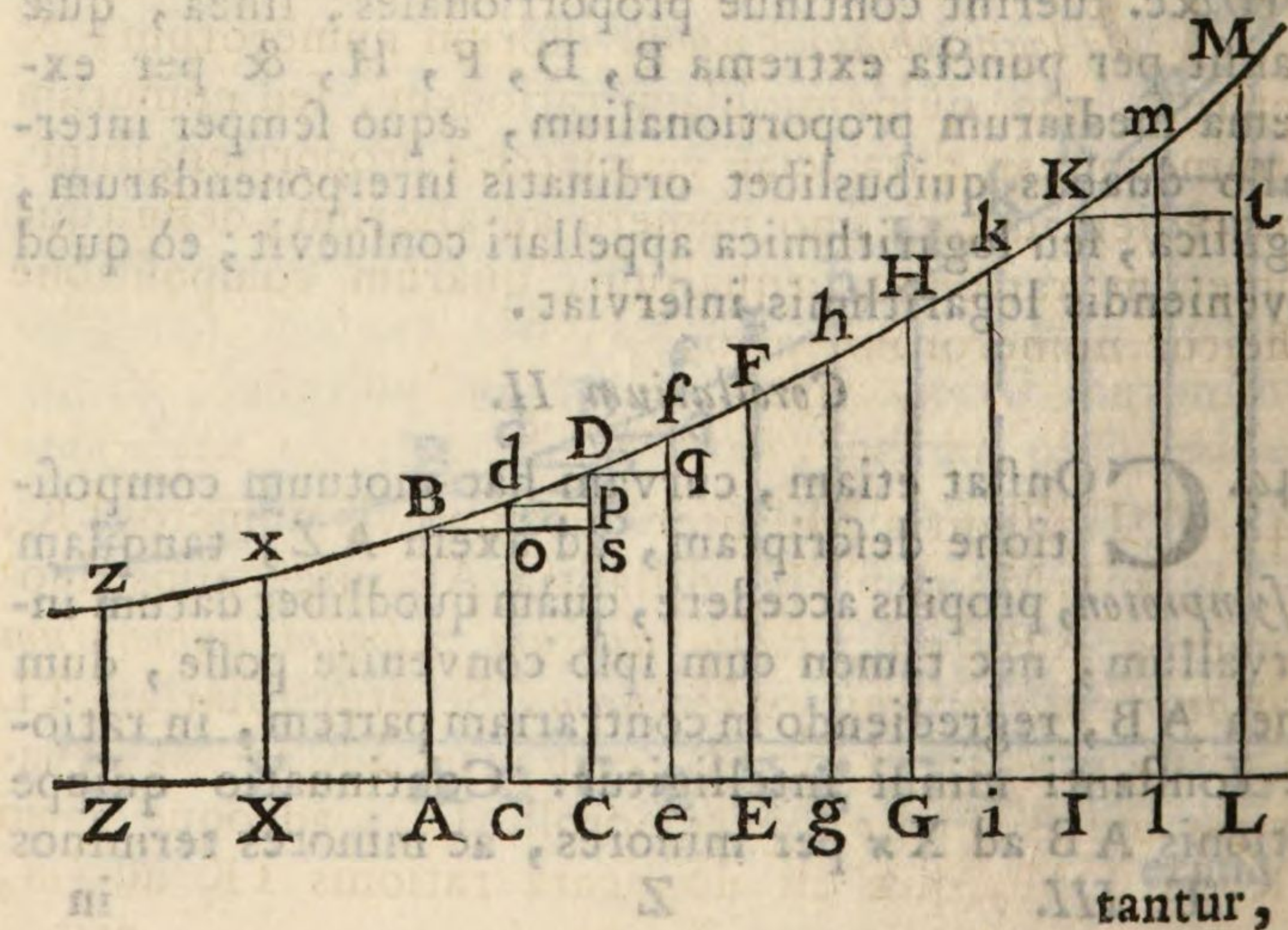
444. **C**onstat etiam, curvam hac motuum compositione descriptam, ad axem AZ , tanquam *Asymptoton*, propiùs accedere, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipso convenire posse, dum linea AB , regrediendo in contrariam partem, in ratione constanti minui intelligitur. Continuatio quippe rationis AB ad Xx per minores, ac minores terminos

in infinitum fieri potest, quin unquam minimus ejusmodi terminorum reperiatur, aut aliquis omnium ultimus fingi queat; uti perspicuum est ex doctrina progressionum geometricarum.

Sed & eadem ratione liquet, logisticam $B D H M$ in immensum supra ipsam $M L$ continuari posse; nec unquam ad certum aliquod curvæ hujus initium, ac veluti verticem, supremumque ejus punctorum fontem perveniri, sed varia dumtaxat ejusdem segmenta exhiberi abscissa per ordinatarum aliquam, veluti $H G$, vel $M L$; nec magis punctum B , quàm H , vel K , aut x , aut aliud quodvis pro logisticæ capite statui posse. Unde perinde est, undecunque incipias; ratio enim ordinatarum $A B$ & $C D$ tam bene ad majores terminos, quàm ad minores continuari potest.

Corollarium III.

445. **E**X hac logarithmicæ descriptione constat, *partes axis ita correspondere ordinatis, quemadmodum logarithmi respondent naturalibus numeris*; ac proinde numeros omnes, qui per ordinatas repræsen-



tantur, in æqualibus distantis esse continuè proportionales; siquidem æqualiter crescente axe, perinde æqualiter crescit ordinarum proportio; atque hæc erit primaria logistica proprietas, per quam poterit expressius definiri.

Corollarium IV.

446. **Q**uin etiam patet, quòd, si sint quatuor numeri AB, CD, IK, LM tales, ut distantia inter primum, & secundum sit æqualis distantia inter tertium, & quartum, qualiscunque sit distantia secundi a tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam, quia distantia AC, IL sunt æquales, erit AB ad incrementum DC , ut IK ad incrementum ML ; unde componendo, $AB:DC::IK:ML$. Et reciprocè, si quatuor numeri fuerint proportionales, erit distantia inter primum, & secundum æqualis distantia inter tertium, & quartum.

DEFINITIO.

447. **D**istantia inter duos quoslibet numeros dicitur logarithmus rationis istorum numerorum; & metitur, non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie geometrica proportionalium, progredientium ab uno numero ad alterum; definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Corollarium V.

448. **S**I distantia IL inter duos quosvis numeros IK, LM , dupla sit distantia Ac inter alios duos numeros AB, cd ; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Secetur bifariam IL in l . Quia $Ac = Il = lL$, erit ratio IK ad lm æqualis rationi AB ad cd per Coroll. IV.; adeoque ratio IK ad LM , quæ est duplicata rationis IK ad lm ,

Z 2
erit

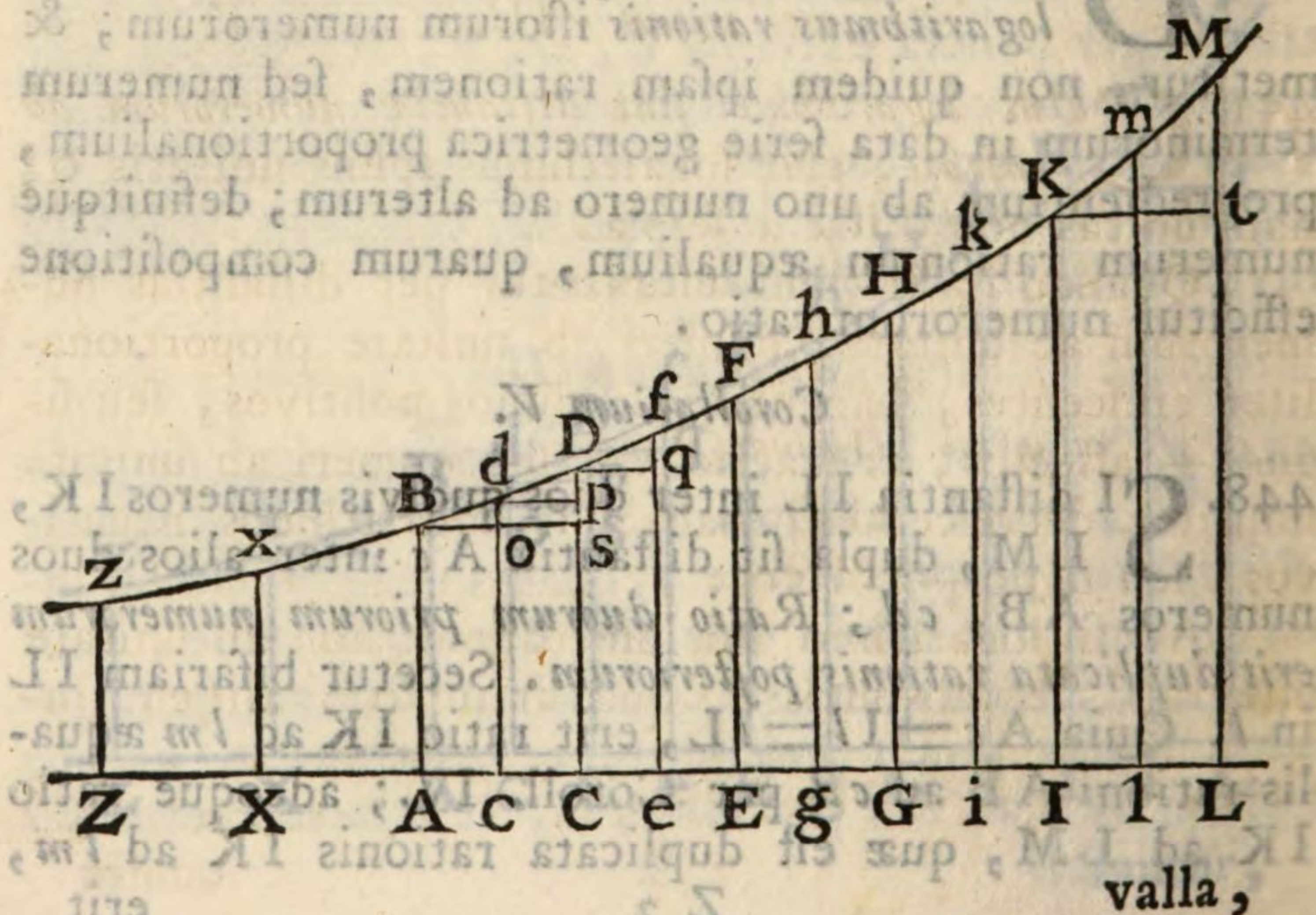
erit etiam, ex Elementis, duplicata rationis AB ad cd .

Similiter, si distantia EL sit tripla distantiae AC , erit ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD . Nam ob distantiam triplam, triplò plures erunt proportionales ab EF ad LM , quàm sint ejusdem rationis termini ab AB ad CD . Cùm autem omnis ratio componatur ex rationibus æqualibus intermediis, hinc ratio EF ad LM , ex triplò pluribus rationibus composita, triplicata erit rationis AB ad CD ; atque ita porro de reliquis distantis.

Corollarium VI.

449. **I**Taque numeri cujuslibet logarithmus, est logarithmus *rationis unitatis ad ipsum numerum*, vel est distantia inter unitatem, & illum numerum; ac proinde exponit potestatem, locum, & ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie geometrica proportionalium.

Quod ut clariùs intelligas, & doctrina jam tradita in canone logarithmico illustretur, finge tibi proportionem, quam habet 1 ad 10, divisam esse in inter-



valla, seu proportiunculas 10000000; ac proinde ab unitate usque ad denarium inclusivè numerari terminos 10000000 minimos proportionales: numerus 10 erit in loco 10000000^{mo}; ac per calculum invenies esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3010300; hoc est, numerus binarius stabit in loco 3010300^{mo}. Similiter ab unitate usque ad 3 invenientur termini proportionales 4771213; qui numerus definit locum numeri ternarii. Quamobrem numeri 10000000, 3010300, 4771213 erunt logarithmi numerorum 10, 2, 3.

Corollarium VII.

450. **O**Mnes itaque numeri in serie geometrica erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum logarithmi. Si primus progressionis geometricæ terminus ab unitate dicatur x , erit secundus terminus x^2 , tertius x^3 &c. Cùm autem ponatur numerus denarius seriei terminus 10000000^{mus}, erit $x^{10000000} = 10$; $x^{3010300} = 2$; $x^{4771213} = 3$; & ita deinceps.

Corollarium VIII.

451. **C**Um logarithmi sint distantie numerorum ab unitate, erit logarithmus ipsius unitatis 0; nam unitas non distat a seipsa.

Quando logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate, numeri ab unitate proportionaliter crescentes, habent logarithmos positivos, seu signo + affectos; at fractiones, seu numeri ab unitate similiter decrescentes, habebunt logarithmos negativos, seu signo — affectos.

At si logarithmi initium capiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in loco aliquo fractionum decimalium, puta, a fractione $\frac{1}{10000}$, tunc

omnes fractiones hac majores, habebunt logarithmos positivos; reliquæ minores, logarithmos negativos.

Corollarium IX.

452. **N**umerorum geometricè proportionalium logarithmi sunt omnes in progressionè arithmetica. Cum enim in numeris continuè proportionalibus distantiae sint æquales, erunt horum numerorum logarithmi æquidifferentes, seu in progressionè arithmetica.

De Proprietatibus, & Usu Curvæ logarithmicæ.

Quamvis logarithmi ad facilitandum calculum trigonometricum fuerint primitus excogitati; tamen & in communibus Arithmeticæ operationibus maximo usui eisdem esse jam docuimus; ac præsertim viam aperiunt inveniendi terminum quemlibet in serie proportionalium sive crescente, sive decrescente; quæ supputatio, ubi agatur de fœnore composito ad plures annos, solet esse operosa in Arithmetica vulgari. Quamobrem, ne quid huic nostro Operi desit, hanc tractationem subnectam, si prius pauca quædam attingam de logisticæ proprietatibus, ex quibus hujusmodi praxes arithmeticæ proficiuntur.

PROPOSITIO III.

453. **S**i in axe logarithmicæ ubivis capiantur partes quælibet SV, VY, YO &c. æquales, & ad puncta S, V, Y, O &c. erigantur perpendiculares ST, VX, YZ, OP &c.; ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua incrementa Xx, Zz, Pp erunt totis proportionalia.

Dem. Quoniam $ST:VX::VX:YZ::YZ:OP$,
erit dividendo, $ST:Xx::VX:Zz::YZ:Pp$;
& componendo, $VX:Xx::YZ:Zz::OP:Pp$.
Quod erat &c.

Hinc,

Hinc, si Xx sit pars quælibet rectæ ST , erit Zz eadem pars rectæ VX , & Pp quoque eadem pars rectæ YZ ; puta, si Xx sit $\frac{1}{20} ST$, erit $Zz = \frac{1}{20} VX$,

$$\& Pp = \frac{1}{20} YZ; \text{ five } VX = ST + \frac{1}{20} ST;$$

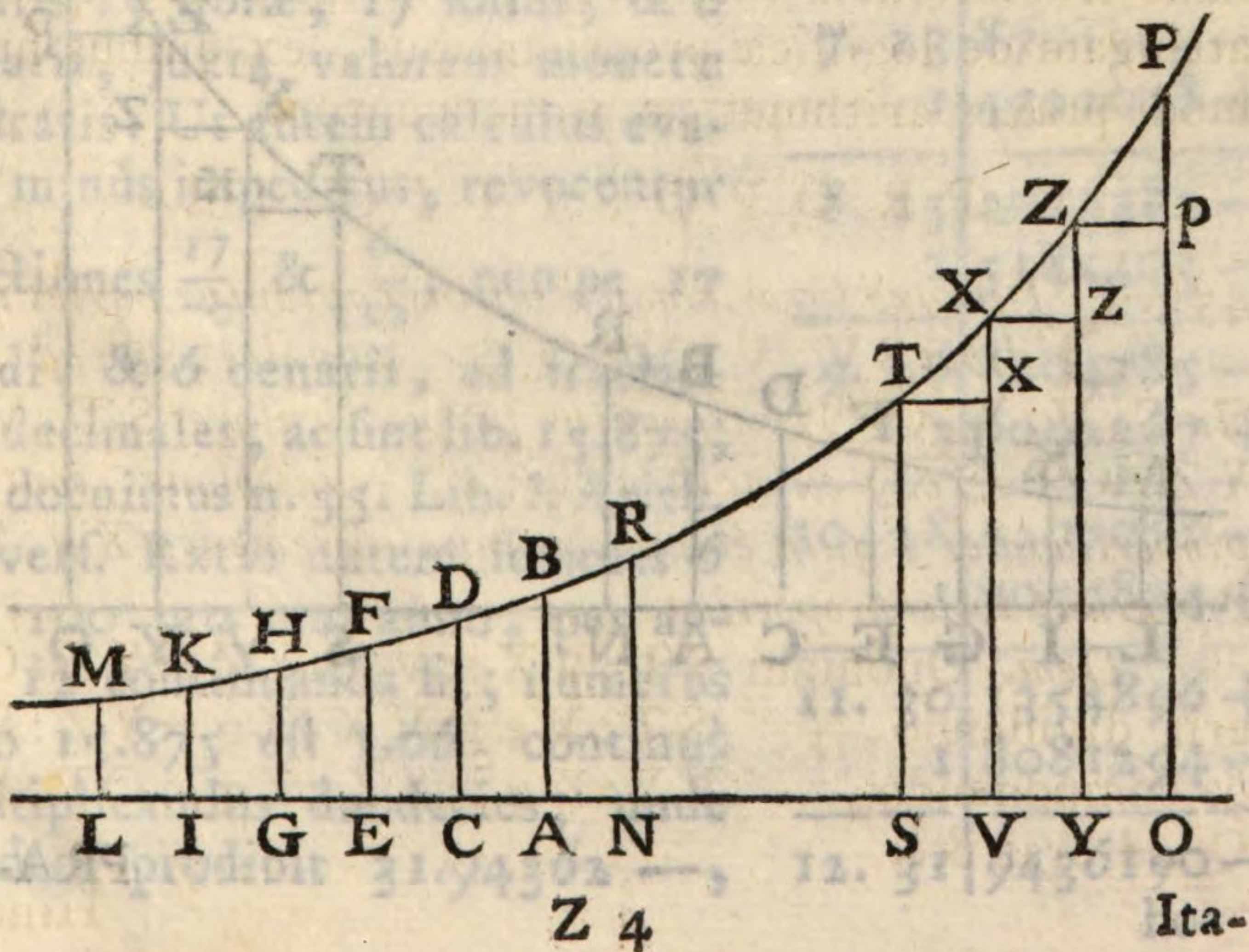
$$YZ = VX + \frac{1}{20} VX;$$

$$OP = YZ + \frac{1}{20} YZ.$$

PROPOSITIO IV.

454. **I**N serie proportionalium crescente, si logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam a primo termino, & productum addatur logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini.

Demonstratio. Fiat, ut ST ad VX , ita AB unitas ad NR : erit $AN = SV$; adeoque rectæ SV , VY , YO &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN .



Itaque AV logarithmus termini VX , erit æqualis $AS + AN =$ logarithmo ipsius $ST + \log.$ ipsius NR .

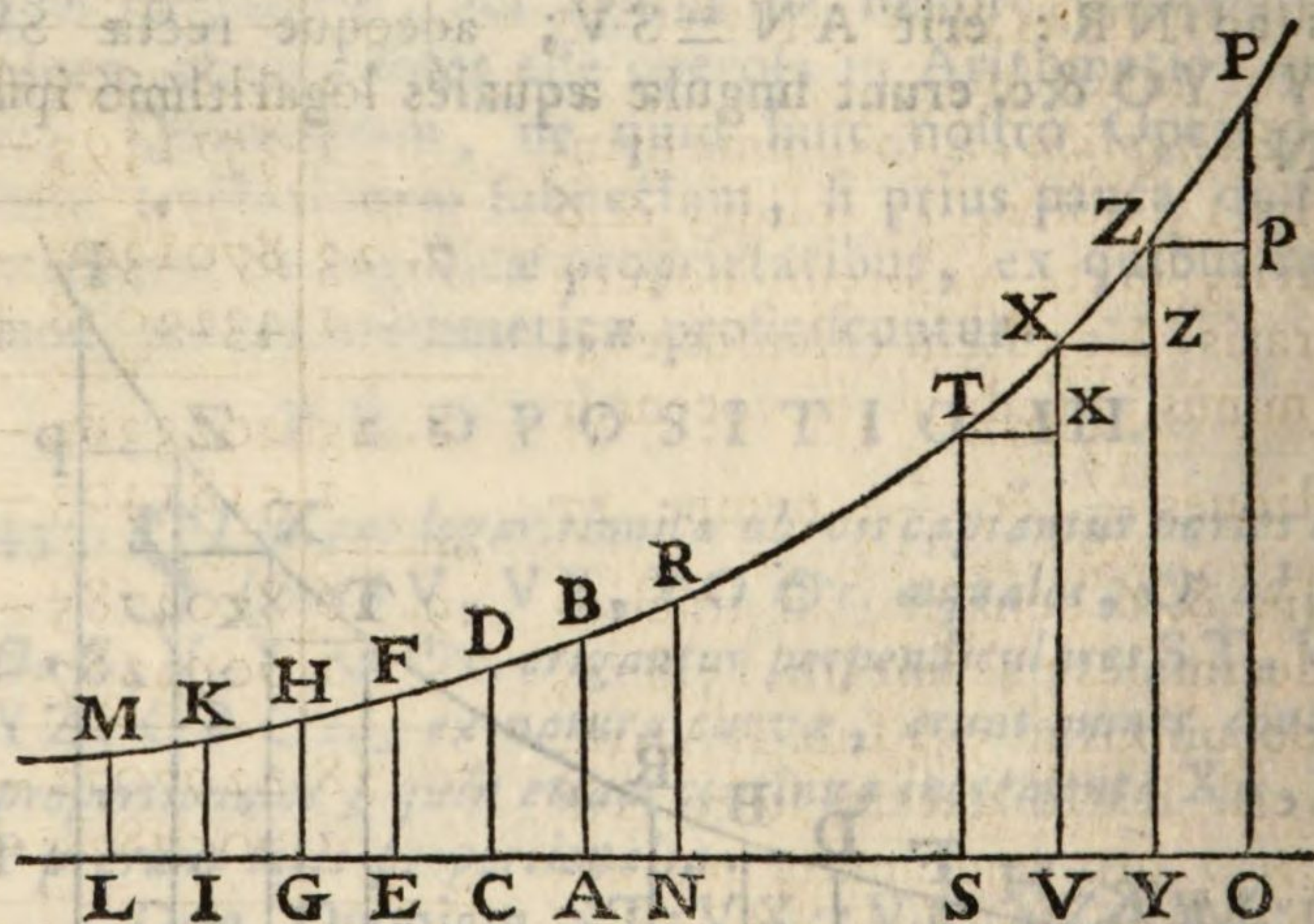
Item AY logarithmus termini YZ , æqualis erit $AS + 2AN =$ logarithmo $ST + 2 \log.$ NR .

Et AO logarithmus termini OP , æqualis erit $AS + 3AN = \log.$ $ST + 3 \log.$ NR .

Et universaliter, in serie proportionalium crescente &c.

Corollarium.

AT si series proportionalium sit decrescens, seu termini in continua ratione minuantur, & OP sit primus, habebitur logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando logarithmum numeri NR per numerum, qui exponit ejus termini distantiam a primo, & subducendo productum e logarithmo primi.



PRAXIS ARITHMETICA

In supputatione fœnoris compositi ad plures annos.

455. **S**It fœnoris compositi supputatio ineunda in ratione 6 per 100 in singulos annos; quippe tum erit, ut 100 ad 106, five, ut 1 ad $1\frac{6}{100}$, vel, ut 1 ad 1.06; sic summa capitalis, seu principalis, ad summam fœnore auctam pro uno anno; adeoque multiplicanda erit summa principalis per 1.06 pro anno primo; quodque hinc prodit, multiplicandum erit per 1.06 pro anno secundo; & sic continuè pro annorum numero, ut habeatur summa, quæ coalescit in fine tot annorum.

Exemplum. Esto summa principalis 15 libræ, 17 solidi, & 6 denarii, juxta valorem monetæ nostratis. Ut autem calculus evadat minùs impeditus, revocentur fractiones $\frac{17}{20}$ & $\frac{6}{12}$, nempe 17 solidi, & 6 denarii, ad fractiones decimales; ac sint lib. 15.875; uti docuimus n. 55. Lib. I. Arith. univers. Ratio autem fœnoris 6 per 100 pro uno anno, per annos 12 continuanda sit; numerus ergo 15.875 est 1.06, continuè multiplicandus duodecies; unde tandem prodibit 31.94362 —,

0. 15	875
	95250
1. 16	82750
1	0096500
2. 17	8371500
1	0702290
3. 18	9073790
1	1344427 +
4. 20	0418217 +
1	2025093 +
5. 21	2443310 +
1	2746599 —
6. 22	5189909 +
1	3511395 —
7. 23	8701304 —
1	4322078 +
8. 25	3023382 —
1	5181403 —
9. 26	8204785 —
1	6092287 +
10. 28	4297072 —
1	7057824 +
11. 30	1354896 +
1	8081294 —
12. 31	9436190 —
	hoc

hoc est, reductis decimalibus ad pristinam fractionum speciem, lib. 31, sol. 18, den. $10\frac{1}{2}$ ferè.

Scholion.

Notabis, signis + & — designari excessum, vel defectum numerorum, facile in praxi vel contemnendum, vel mutuo compensandum.

P R A X I S L O G A R I T H M I C A

*In supputatione fœnoris compositi
ad plures annos.*

456. **O**missis continuis multiplicationibus, per logarithmos sic proceditur. Logarithmo summæ principalis addendus est logarithmus numeri 1.06 tot vicibus, quot sunt anni, ut habeatur logarithmus summæ post tot annos emergentis; cui correspondens numerus absolutus, est summa quæsitæ.

Exemplum. Numeri 1.06, pro ratione fœnoris expositi, logarithmus est 0.0253058 ;
hujus duodecuplum pro num. annorum, est 0.3036696 ;
summæ principalis logarithmus est 1.2007137 ;
qui duo logarithmi simul juncti faciunt log. 1.5043833 ;
cui respondet numerus absolutus 31.943562 proximè,
ut constet ex tabulis, hoc est, facta reductione, lib. 31, sol. 18, d. $10\frac{1}{2}$ ferè, ut prius.

Hinc per regressum solvuntur sequentes quæstionculæ.

Quæ-

Quæstio I.

Dato tempore, & fœnoris ratione, ut prius, cum summa oriunda 31 94362 —, quæritur a qua summa principali hæc oriatur.

Resol. Ex summæ oriundæ logarithmo 1.5043833 subtrahatur 0.3036696, duodecuplum nempe logarithmi numeri 1.06; restabit 1.2007137 logarithmus quæsitæ summæ principalis.

$$\begin{array}{r} 1.5043833 \\ 0.3036696 \\ \hline 1.2007137 \end{array}$$

Quæstio II.

Datis, summa oriunda, & summa principali, & tempore, invenire rationem fœnoris.

Resol. Ex summæ oriundæ logarithmo 1.5043833 subtrahatur summæ principalis logarithmus 1.2007137; residuum 0.3036696 dividatur per numerum annorum; hoc est, hujus residui sumatur pars duodecima 0.0253058; hæc erit logarithmus numeri 1.06 pro ratione fœnoris.

$$\begin{array}{r} 1.5043833 \\ 1.2007137 \\ \hline 0.3036696 \end{array} \begin{array}{l} (12 \\ (0.0253058 \end{array}$$

Quæstio III.

Datis, summa oriunda, & summa principali, & ratione fœnoris, invenire tempus, seu numerum annorum.

Resolutio. Præcedentis subductionis residuum 0.3036696 per 0.0253058 logarithmum numeri 1.06 pro ratione fœnoris divisum, dat quotientem 12; qui est numerus annorum, in quibus ex tali summa principali, secundum hanc fœnoris rationem, talis proveniret summa.

$$\begin{array}{r} 0.3036696 \\ 0.0253058 \\ \hline 12 \end{array}$$

Si-

Simili forma solvuntur aliæ quæstiones, quæ ad supputationem fœnoris compositi spectant.

Quæstio IV.

PAriter logarithmorum Arithmetica locum habet in nota illa quæstione *de unitate continuè duplicanda*, quæ jactari solet, de equo vendendo secundum numerum clavorum 24, quibus suffigi solent ungulis suis soleæ ferreæ. Posito nimirum exiguo pretio pro clavo primo, ejusque duplo pro secundo, hujusque itidem duplo pro tertio, & sic continuè duplicando pro clavis singulis, ad quam immensam tandem summam perveniatur.

Cujus quidem quæstionis occasionem primam eam fuisse existimat Joannes Wallis in opere arithmetico cap. 31; Nimirum, cum Sessa quidam indus ludum latrunculorum invenisset primus, Regique suo indicasset; a Rege, cui summè placuit, jussus præmium, quod vellet, inventionis suæ petere; petiit ille, ut pro abaci lusorii areola prima daretur tritici granum unum, pro secunda duo, & sic continuè duplicando secundum areolarum 64 numerum. Cumque hoc Regi, qui præmium satis amplum datum iri vellet, displicuisset, quod tam exiguum petiisset, Sessa respondit, se hoc exiguo contentum fore; quod itaque, cum Rex dari jussisset, miratus est summopere, ubi ad tam incredibilem quantitatem excrescere deprehenderit, ut per universum terrarum orbem tantundem tritici non sup peteret.

Quantus sit futurus horum granorum numerus, investigabitur, numerum 1 continuè duplicando vicibus 63, ut habeatur numerus loco ultimo debitus; & una porro vice, ut habeatur omnium summa; quippe duplum ultimi, uno minùs, est omnium summa.

Id

Id autem per logarithmos expeditius fiet; nimirum, si ipsi 0 logarithmo unitatis, addatur numeri binarii logarithmus 0.3010299 per 64 multiplicatus, hoc est, 19.2659136; cui convenit numerus absolutus, major quidem, quàm 18446, 00000, 00000, 00000, sed minor, quàm 18447, 00000, 00000, 00000. In hisce autem immensis adeo supputationibus consulendæ sunt tabulæ majores logarithmorum.

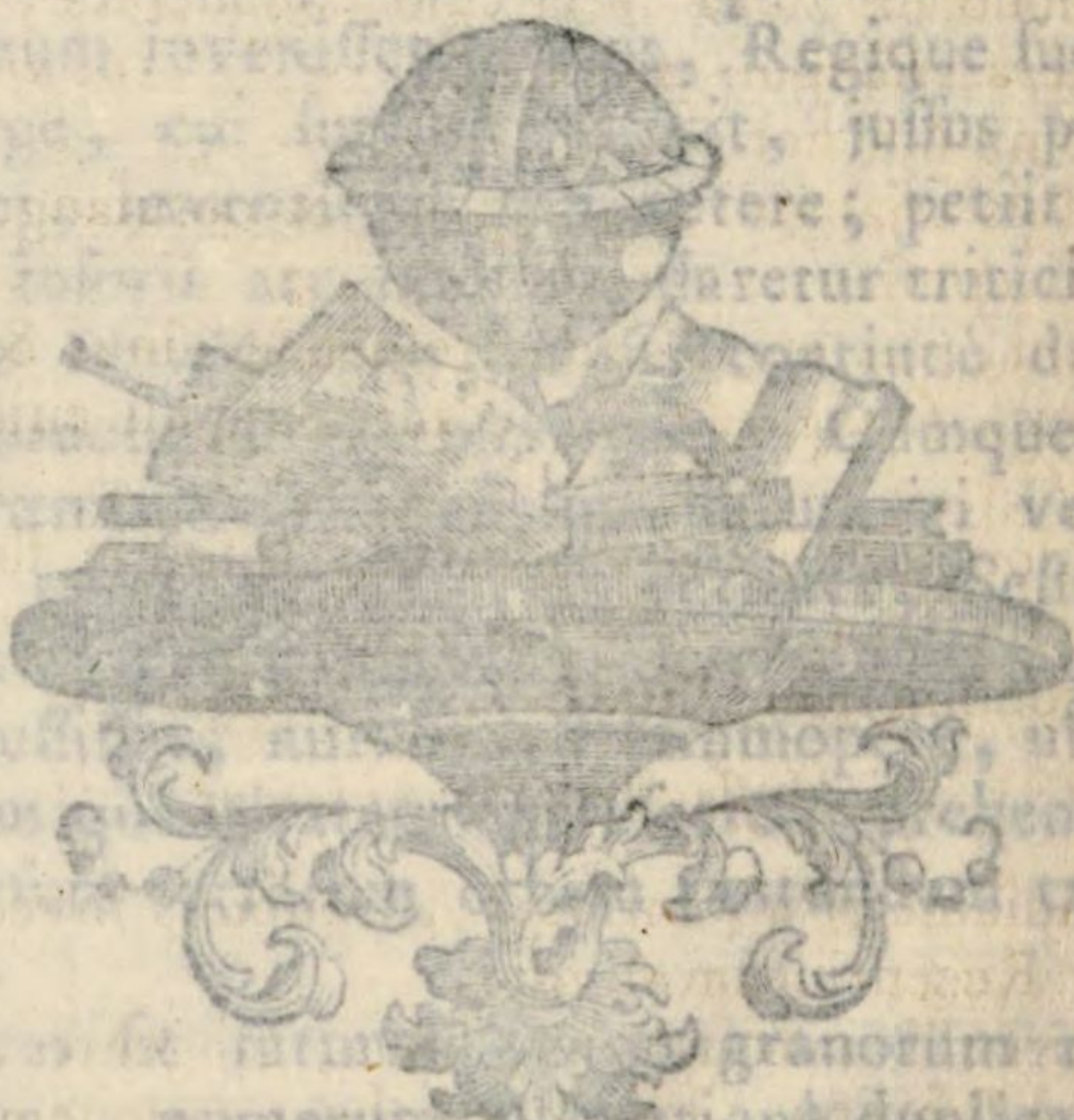
Qui plura volet de logistica proprietatibus, adeat opus egregium P. Guidonis Grandi, quod inscribitur: *Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam lineam.*

F I N I S.



DE LOGARITHMORUM ORIGINIBUS. 367
 Id autem per logarithmos expeditius fiet; nimirum, si ipsi o logarithmo unitatis, addatur numerus binarii logarithmus 0.301030 per 64 multiplicatus, hoc est, 19.2629136; cui convenit numerus absolutus, major quidem, quam 18446, 00000, 00000, sed minor, quam 18447, 00000, 00000. In his autem immensis adeo supputationibus consulenda sunt tabulae maiores logarithmorum.
 Qui plura velit de logarithicis proprietatibus, ad opus egregium P. Guionis Grandi, quod inscribitur: *Geometria demonstratio Theorematum Harmoniarum* etc. etc. referatur.

...E. I. N. 3. ...
 ...in opere arithmetico
 ...quidam indus ludum
 ...Regique suo indicat
 ...iusus premium
 ...petit illi
 ...tritur tritici granum
 ...hoc Rex
 ...veller, si
 ...respon
 ...cui
 ...ut de ibi
 ...et
 ...tritici non
 ...granorum numerum
 ...duplicando
 ...ut habeatur numerus loco ultimo debitus
 ...ut habeatur numerus summa quippe
 ...ultimo illi omnium summa



INDEX.

- N**ecessitas, & origo Trigonometriæ. num. 1.
Ufus scalæ geometricæ incertus in maximis intervallis. ibid.
Varia inter se collata Theoremata. 2. 3. 4.
Trigonometriæ origo adumbrata. 5. 6.
Trigonometria quid sit; ejusque partitio in planam, & sphaericam. 7.

P A R S I.

De Trigonometria plana, seu rectilinea.

DEFINITIONES.

- Q**uid sint Sinus, Tangentes, Secantes &c. 8. usque ad 15.
Quomodo hæ lineæ in circulo consideratæ, traducantur ad latera trianguli rectanguli. 16. usque ad 24.
Iconismus omnium notionum. 25.
Latera cujusvis trianguli acutanguli, & obtusanguli, ad arcus circuli constanter referuntur. 26.
Cui libet arcui, aut angulo suus respondet sinus &c. 27.
Invenire sinus, tangentes, & secantes anguli cujuslibet, & arcus. 28.
In tabulis non exhibetur magnitudo absoluta sinuum, sed tantum respectiva. 29.
Canon Trigonometricus linearis. 31. 34.

De constructione Tabularum.

- Divisio semidiametri ab antiquis Astronomis inventa. 36.
Commodior Recentiorum divisio. 38. 39.
Theor. In circulis inæqualibus, sinus, tangentes, & secantes arcuum similium, eandem habent rationem ad radios suorum circulorum. 40.
Theor. Si quadrilaterum circulo sit inscriptum, factum duarum diagonalium æquatur summæ factorum, laterum oppositorum. 42.

Probl.

- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam supplementi ad semicirculum. num. 43.
- Probl.* Cognitis chordis duorum arcuum, invenire chordam summæ eorundem arcuum. 44.
- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus dupli. 45.
- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus tripli. 46.
- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam arcus quintupli. 47.
- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam semisseos ejusdem arcus. 48.
- Probl.* Cognitâ chordâ alicujus arcus, invenire chordam trientis ejusdem arcus. 49.
- Coroll.* Eadem methodo invenietur chorda quintæ partis alicujus arcus. 50.
- Probl.* Ope præcedentium Problematum invenire chordas arcuum quadrantis, ab arcu duorum minutorum usque ad 90 gradus, continuo duorum minutorum augmento. 51.
- Probl.* Invenire sinus omnes uno tantum minuto differentes, usque ad gradus 45. 52.
- Probl.* Dato sinu cujusvis arcus, complementi sinum invenire. 53.
- Coroll.* Cognitis sinibus ab uno minuto ad grad. 45, cognoscuntur reliqui ad grad. 90. 54.
- Probl.* Inventis sinibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire tangentes omnes. 55.
- Theor.* Sinus totus est medius proportionalis inter tangentem arcus, & tangentem sui complementi. 57.
- Coroll.* Cognitis tangentibus ab uno minuto ad gradus 45, cognoscuntur reliquæ tangentes ad grad. 90. 58.
- Probl.* Cognitis tangentibus omnium arcuum quadrantis circuli, invenire secantes. 59.
- Theor.* Tangens arcus grad. 45, æquatur radio. 60.
- Theor.* Secans arcus grad. 60, æquatur diametro. 61.
- Probl.* Canonem Trigonometricum sinuum, tangentium, & secantium construere. 62.

De usu Tabularum.

Probl. Dato quovis arcu, aut angulo, eruere e tabulis sinum ipsi respondentem. num. 63.

Probl. Datis sinibus binorum arcuum, qui inter se parum differant, hoc est, quarum differentia non sit major 45 minutis, invenire sinum cujuscunque intermedii arcus dati. 64.

Probl. Dato quovis arcu, qui contineat gradus, & minuta prima, eruere e tabulis sinum &c. ipsi arcui respondentem. 65.

Probl. Invenire sinum unius, vel plurium secundorum minutorum. 66.

Probl. Invenire sinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam secunda contineat. 67.

Probl. Dato sinui, vel tangenti &c. correspondentem arcum, aut angulum in eodem canone invenire. 68.

A P P E N D I X.

Observ. I. Quid causæ fuerit, cur tutior, & commodior visa fuerit divisio radii in particulas 10000000, vel saltem 100000, quàm in pauciores. 69.

Observ. II. Quid præterea agendum, ut tabula sinuum exquisitiùs construatur, posito sinu toto partium 100000, aut etiam pauciorum. 70.

Observ. III. Exponitur ratio, cur abjectis duabus primis figuris ex sinu quocunque, respectu sinus totius 10000000, relinquatur idem sinus respectu sinus totius 100000, licet prior ille non sit exquisitè inventus. 71.

Observ. IV. Si ad sinum quemcunque respectu sinus totius 100000, adjiciantur duæ ciphre ad dexteram, fit idem sinus respectu sinus totius 10000000. 72.

Observ. V. In abjiciendis tamen a sinu invento totidem ciphris, quot fuerant adjunctæ sinui toto, cautio altera habenda est, ut ad sinum, quoad fieri possit, accuratissimè inveniendum accedamus. 73.

Observ. VI. Quid repræsentent numeri canonis trigonometrici, & quarum rerum sint symbola. 74.

P A R S II.

Analysis Trianguli rectilinei.

Theor. I. **I**N omni triangulo rectangulo sinus totus est ad sinum alterutrius duorum angulorum acutorum, uti hypotenusa est ad latus eidem angulo oppositum. *num.* 75.

Coroll. Hinc permutando, & invertendo, eliciuntur duæ reliquæ analogiæ, quoties hypotenusa in quæstionem cadit. 76.

Coroll. Cognitis angulis in triangulo rectangulo, etiam laterum proportio cognoscitur. 77.

Theor. II. In omni triangulo rectangulo sinus totus est ad tangentem unius, aut alterius duorum angulorum acutorum, uti latus adjacens huic angulo, est ad latus oppositum eidem angulo. 78.

Coroll. Hinc quoties hypotenusa in quæstionem non cadit, duæ analogiæ locum habent. 79.

Theor. III. In omni triangulo rectangulo radius est ad secantem alterutrius anguli acuti, uti latus adjacens huic angulo, est ad hypotenusam. 80.

Coroll. Tres analogiæ. 81.

Coroll. Eadem hypotenusa secans est utriusvis angulorum acutorum. 82.

Coroll. Modus alter inveniendi laterum proportionem ex angulis cognitis. 83.

Theor. IV. In quolibet triangulo rectilineo latera eandem inter se rationem habent, quam sinus angulorum ipsis oppositorum. 84.

Coroll. In quolibet triangulo proportionem laterum habentur, si lateribus sinus angulorum oppositorum adscribantur. 85.

Coroll. Datis angulis magnitudo absoluta laterum decerni non potest, nisi ipsorum unum innotescat. 86.

Coroll. Hinc in omni triangulo acutangulo, & rectangulo duæ semper analogiæ locum habent; in obtusangulo autem substituendus erit sinus supplementi anguli obtusi. 87.

Theor. V. In omni triangulo obtusangulo, sinus unius, aut alterius

terius ex duobus angulis acutis, est ad sinum supplementi anguli obtusi, uti latus oppositum angulo acuto, est ad latus oppositum angulo obtuso. num. 88.

Theor. VI. In omni triangulo, ut summa duorum quorumvis laterum ad eorundem differentiam; sic tangens semisummæ angulorum iisdem lateribus oppositorum, est ad tangentem semidifferentiæ eorundem. 89.

Coroll. In omni triangulo summa laterum, differentia laterum, tangens semisummæ angulorum oppositorum, & tangens semidifferentiæ eorundem, sunt termini proportionales. 90.

Theor. VII. In omni triangulo, ut est latus maximum ad summam reliquorum; ita horum differentia est ad differentiam inter segmenta facta a perpendiculari, ab angulo opposito demissa in latus maximum. 91.

Coroll. In omni triangulo latus maximum, summa laterum reliquorum, differentia eorundem, differentia segmentorum lateris maximi, sunt termini proportionales. 93.

Analysis Trianguli rectanguli.

Probl. I. Datis, hypotenusà, & angulo adjacentē, reliqua latera invenire. 101.

Probl. II. Datis, hypotenusà, & uno latere, invenire acutos angulos, & latus alterum. 102.

Probl. III. Datis, crure, & angulo opposito, invenire hypotenusam. 103.

Probl. IV. Duobus lateribus datis, quærere utrumque angulum acutum, & hypotenusam. 104.

De usu Tangentium, & Secantium.

Probl. V. Datis, latere, & angulo adjacentē, quærere latus oppositum. 105.

Probl. VI. Datis, latere, & angulo adjacentē, invenire hypotenusam. 108.

Probl. VII. Datis, hypotenusà, & uno latere, invenire angulum ab iisdem interceptum. 109.

Probl. VIII. Cognitâ hypotenusà, & angulo adjacentē, quærere latus adjacens eidem angulo. 110.

Analysis Trianguli obliquanguli.

Probl. IX. Datis angulis, & uno latere, invenire latera reliqua. num. 113.

Lemma. Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor; si verò semisummæ duarum quantitatum addatur semidifferentia, prodit quantitas major. 115.

Probl. X. Datis duobus lateribus, & angulo ab iisdem intercepto, reliquos angulos invenire. 117.

Probl. XI. Datis duobus lateribus, & angulo intercepto, invenire tertium latus. 120.

Probl. XII. Datis tribus lateribus, quærere angulum quemvis. 121.

Probl. XIII. Datis duobus lateribus trianguli obliquanguli, & dato angulo opposito uni eorum laterum, quærere angulum oppositum reliquo dato lateri. Oportet autem angulum quæsitum esse specie præcognitum. 122. 123.

Synopsis solutionis trigonometricæ trianguli rectanguli, & obliquanguli. ibid.

PRAXIS TRIGONOMETRICA

Altimetriæ, & Longimetriæ.

Definitiones. 124. usque ad 130.

Probl. I. Distantiam in una dumtaxat extremitate accessibilem metiri. 131.

Coroll. Usus Problematis in Ichnographia, & Architectura militari. 133.

Probl. II. Invenire distantiam inter duo objecta, ambo inaccessibleia, quæ tamen conspici possint. 135.

Coroll. Hinc per datum punctum duci potest parallela rectæ inaccessiblei. 136.

Probl. III. Distantiam inaccessibleam montis, vel turris per duas stationes metiri. 137.

Probl. IV. Altitudinem inaccessibleam montis, vel turris metiri. 138.

Probl. V. Altitudinem accessibilem metiri. 139.

Probl. VI. Altitudinem nubis metiri. 140.

Probl. VII. Ichnographiam Regni, aut Provinciæ trigonometricè perficere. 141.

OBSERVATIONES

*Fallaciarum complurium, quæ in praxim trigonometricam
Altimetriæ, & Longimetriæ solent irrepere.*

Observ. I. **E**rror vel minimus sub angulo altitudinis valde parvo commissus, multò majorem distantiaë causat errorem, quàm defectus idem sub angulo altitudinis magno. num. 142.

Observ. II. Quoties duabus stationibus mensuranda est altitudo, aut distantia, tantum debet esse intervallum stationum, quantum satis est, ut differentia angulorum obtineatur. 146.

Observ. III. Dato quovis altitudinis angulo in statione una, definire, quanto opus sit stationum intervallo, ut acquiratur in statione altera angulus altitudinis, differens gradu uno, aut pluribus. 148.

Observ. IV. Definiri pariter trigonometricè potest, quæ sit proportio altitudinis ad distantiam sub variis angulis. 149.

Observ. V. Non tutò ex qualibet distantia altitudines mensurantur. 150.

Observ. VI. Ex omni ea distantia satis tutò altitudo mensurabitur, ad quam ipsa proportionem habeat sensibilem. 151.

Observ. VII. Quantum erroris invehatur rotunditas terræ in altitudinum mensuram. 152.

Observ. VIII. Quamvis rotunditas terræ multum detrahat altitudini mensurandæ, eadem tamen nihil ferè officit mensurationi distantiaë. 153.

Observ. IX. Præcipuus, & frequentior error, quo altitudinum dimensio vitiatur, ex defectu perpendiculi. 154.

Observ. X. Definiri potest quantitas erroris, ex defectu perpendiculi in altitudinis mensuram derivata. 155.

Observ. XI. Datis omnibus iisdem, quæ supra, sub angulo altitudinis vel nimis parvo, vel valde magno, major evadet, ac sensibilibior error, qui oritur ex defectu perpendiculi. 160.

P A R S III.

De Canone logarithmico.

Definitio. **L**ogarithmi sunt numeri arithmetice proportionales, adjuncti, aut respondentes numeris geometricè proportionalibus. num. 162.

Vel, logarithmi sunt numeri artificiales, apti ad solvendam multiplicationem sola additione, & divisionem sola subtractione. 163.

Logarithmorum species præstantissima, ac commodissima. 165.

De Logarithmorum proprietatibus, & inventione.

Lemma. I. Si fuerint quatuor numeri arithmetice, siue continuè, siue non continuè, proportionales, summa extremorum æquabitur summæ mediorum. Et contra. 168.

Lemma. II. Si fuerint tres numeri arithmetice proportionales, summa extremorum æquabitur duplo medii. Et contra. 169.

Theor. I. Si quatuor numeri sint geometricè proportionales, summa ex logarithmis extremorum, æquabitur summæ ex logarithmis mediorum. Et contra. 170.

Coroll. Quatuor numerorum geometricè proportionalium datis tribus, quartus logarithmicè invenietur. 171.

Theor. II. Si sint tres numeri geometricè proportionales, summa ex logarithmis extremorum, æquabitur duplo logarithmi medii. Et contra. 173.

Coroll. Trium numerorum geometricè proportionalium datis duobus, tertius logarithmicè invenitur. 174.

Theor. III. Cùm unitatis logarithmus est 0, summa ex logarithmis numerorum multiplicandi, & multiplicantis, æquatur logarithmo producti. 175.

Theor. IV. Si unitatis logarithmus sit 0, logarithmus cujuscunque numeri duplicatus facit logarithmum quadrati, triplicatus logarithmum cubi ejusdem numeri. 176.

Theor. V. Posito unitatis logarithmo ciphra, seu 0, logarithmus numeri dividendi, æquatur logarithmis divisoris, & quotientis simul. 178.

Theor. VI. Existente unitatis logarithmo ciphra, si cujuscunque numeri

numeri logarithmus bifecetur, hoc est, ejusdem sumatur dimidium, proveniet logarithmus quadratæ radicis; si capiatur tertia pars, habebitur logarithmus radicis cubicæ numeri ejusdem. *num.* 179.

Coroll. Hinc totus pendet usus logarithmorum in operationibus arithmeticis. 181.

Probl. Scopum canonis logarithmici aperire. 182.

Probl. Invenire logarithmos omnium numerorum, qui primi vocantur, quique terminis progressionis geometricæ decuplæ interjecti sunt. 183.

Probl. Invenire logarithmos omnium numerorum compositorum. 185.

Probl. Cognitis logarithmis omnium numerorum ab 1 usque ad 1000, canonem logarithmicum producere usque ad 10000, ad 100000 &c. 186.

OBSERVATIONES

In constructione Tabularum.

Observ. I. Quid causæ sit, cur numeri progressionis decuplæ 1, 10 &c. totidem ciphris augeantur, quot logarithmus denarii. 187.

Observ. II. Leges characteristicæ in tabulis logarithmicis. 188.

Observ. III. Cur logarithmus denarii augendus sit tribus saltem ciphris, ut logarithmi aliorum numerorum inveniantur. 189.

Observ. IV. Cur logarithmi sine ullis fractionibus in canone disponi possint; cum tamen sæpe fractiones continere deberent. 190.

Observ. V. Logarithmus cujusvis numeri indicat, quot proportionum minimarum interjiciantur inter unitatem, & ipsum numerum, sive designat distantiam, quam habet idem numerus ab unitate. 191.

Observ. VI. Quo pacto logarithmi numerorum etiam naturalium 2, 3, 4, 5 &c. sint indices, saltem quàm proximè, proportionum minimarum, quæ inter unitatem, & numerum quemvis interjiciuntur. 192.

De usu Tabularum.

- Probl. I.* Dato numero absoluto, non excedente 1000 maximum tabularum, ejus logarithmum e tabulis elicere. *num.* 193.
Probl. II. Dati numeri excedentis 1000, maximum tabularum, quibus uteris, invenire logarithmum vero proximum. 200.
Probl. III. Dato logarithmo non excedente 3.0000000 maximum tabularum, ad quem canonis logarithmici extensio continuata ponatur, invenire in eodem canone numerum eidem respondentem. 205.
Probl. IV. Dato logarithmo excedente 3.0000000, nempe ultimum tabulæ, qua uteris, invenire in eodem canone numerum eidem respondentem. 207.
Probl. V. Dato logarithmo negativo, invenire numerum eidem congruum. 210.
Probl. VI. Dati cujuscunque sinus logarithmum invenire. 211.
Coroll. Logarithmi tangentium, & secantium, eadem methodo obtinentur. 212.

De usu constructi Canonis.

- Probl. VII.* Datis gradibus cujusvis arcus, eruere e tabulis logarithmum sinus ipsis respondentem. 213.
Probl. VIII. Dato logarithmo sinus, invenire arcum ipsi respondentem. 214.
Probl. IX. Cognitis angulis acutis, & hypotenusâ trianguli rectanguli, invenire latera. 215.
Probl. X. Datis, uno latere, & angulis trianguli rectanguli, invenire aliud latus. 216.
Probl. XI. Cognitis duobus lateribus trianguli rectanguli, invenire acutos angulos. 217.
Probl. XII. Cognitis duobus lateribus, & angulo intercepto, in triangulo obliquangulo, invenire reliquos angulos. 218.

P A R S IV.

De Triangulis sphericis.

DEFINITIONES, ET PRINCIPIA.

Defin. I. **G** Enesis sphæræ, ejusque elementa. *num.* 219.
220. 221.

Coroll. Si sphæra secetur quocunque plano, communis intersectio ejusdem cum sphæra erit circulus. 222.

Coroll. Circuli, qui transeunt per centrum sphæræ, sunt inter se æquales, & omnium maximi. 223.

Coroll. Circuli maximi se omnes mutuò bifariam secant; & communis intersectio planorum eorundem est diameter sphæræ. 224.

Coroll. Per duo quævis puncta assumpta in superficie sphæræ, potest duci circulus maximus. 226.

Defin. II. Axis sphæræ est sola diameter fixa, circa quam sphæra convertitur.

Poli sphæræ sunt puncta extrema axis.

Axis circuli est linea recta, quæ transit per ejus centrum, & est plano ejusdem circuli perpendicularis.

Poli circuli sunt duo puncta extrema ejusdem axis, posita in superficie sphæræ. 228.

Coroll. Polus quilibet circuli æquidistat ab omnibus punctis suæ circumferentiæ. 229.

Coroll. Si maximus circulus transeat per polos alterius maximi circuli, huic erit perpendicularis. Et reciprocè. 230. 231.

Coroll. I. Si maximus circulus transit per polos alterius, hic quoque transibit per polos primi.

II. Si plures arcus sese intersecent in polo alterius circuli, erunt omnes eidem perpendiculares.

III. A puncto, quod non sit polus sui arcus, unicus arcus perpendicularis in eundem duci potest. 232.

Coroll. Polus quilibet distat gradibus 90 ab omnibus punctis sui arcus, vel circumferentiæ. 233.

Coroll. Si in circumferentia circuli maximi accipiantur duo puncta, quæ non sint invicem separata per semicircumferentiam, horum quodlibet distare non poterit gradibus 90

- ab alio puncto, quod non sit polus ejusdem circuli. *num.* 234.
- Coroll.** Si duo puncta arcus minoris semicircumferentiæ circuli, distent singula gradibus 90 ab alio puncto, hoc punctum erit polus ejusdem arcus. 235.
- Sin autem duo puncta sint extremitates arcus æqualis semicircumferentiæ, poterunt singula distare gradibus 90 ab aliquo puncto, quod non sit polus ejusdem. 235.
- Defin. III.** Angulus sphæricus dicitur ille, quem in sphæræ superficie duo maximorum circulorum arcus sese mutuò secantes continent; & æqualis est inclinationi duorum planorum utriusque maximi circuli. 236.
- Coroll.** Dato angulo sphærico, si concipiatur tertius circulus, cujus polus sit summitas anguli sphærici, arcus hujus circuli, interceptus a duobus lateribus, est mensura anguli sphærici. 237.
- Coroll.** Vertex anguli sphærici est polus arcus, qui eundem angulum metitur. 238.
- Coroll.** Mensura anguli sphærici est perpendicularis suis lateribus. Et reciprocè. 239.
- Coroll.** Si bina anguli latera æquent singula quadrantem circuli, arcus, qui basis est, metitur eundem angulum. Et reciprocè. 240. 241.
- Coroll.** Si duo arcus maximorum circulorum occurrant in duobus punctis, anguli oppositi sunt æquales. 242.
- Coroll.** Duo maximorum circulorum arcus, quorum unus minor sit semicircumferentiâ circuli, non possunt claudere spatium in superficie sphæræ. 243.
- Coroll.** Si duo latera anguli sphærici transeant vicissim per polos alterius lateris, angulus erit rectus. Et reciprocè, si angulus sit rectus, latus alterum per alterius polum transibit. 245.
- Coroll.** Anguli ad verticem oppositi, sunt æquales. Item anguli, qui sunt deinceps consequentes, æquantur duobus rectis. 246.
- Defin. IV.** Triangulum sphæricum dicitur illud, quod continetur in superficie sphæræ tribus maximorum circulorum arcubus, qui dicuntur ejus latera. Et consideratur instar pyramidis triangularis, cujus vertex sit in centro sphæræ, & basis sit portio superficiiei sphæricæ, terminata tribus arcibus

- cubus maximorum circulorum. num. 247.
- Triangulum** sphæricum, sicuti rectilineum, dividitur in æquilaterum, isosceles, & scalenum; similiter in rectangulum, obtusangulum, & acutangulum. 248.
- Coroll.** Hinc proprietates quædam triangulis sphæricis, ac rectilineis communes deducuntur. 250.
- Coroll.** Quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora. 252.
- Theor. I.** Trianguli latera sunt circumferentiâ circuli minora. 253.
- Theor. II.** Quodlibet trianguli latus minus est semicircumferentiâ circuli. 254.
- Theor. III.** Si tres vertices trianguli sphærici sint poli trium arcuum, ex quibus triangulum aliud constat, quodvis trium laterum secundi erit supplementum angulorum oppositorum primi. Et reciprocè. 255.
- Coroll.** Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera. 257.
- Theor. IV.** Trianguli sphærici tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis. 259.
- Coroll.** Datis duobus angulis trianguli sphærici, determinari non potest valor tertii.
- Et quod majora sunt latera trianguli sphærici, eò majores quoque evadunt anguli, quamvis non eadem proportionem. 261.
- Theor. V.** In triangulis isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales. Et reciprocè, si anguli ad basim fuerint æquales, triangulum erit isosceles. 262.
- Coroll.** Omne triangulum æquilaterum est æquiangulum. Et vicissim. 263.
- Theor. VI.** Si ab angulo verticali, intercepto a lateribus æqualibus trianguli isoscelis, demittatur arcus, qui basim bifariam secet, I. triangulum dividitur in duo æqualia triangula; II. idem arcus est basi perpendicularis. 264.
- Coroll.** Si ab eodem angulo demittatur arcus in basim perpendicularis, hic dividet I. triangulum isosceles in duo æqualia triangula; II. bifariam quoque secabit & eundem angulum verticalem, & basim. 265.
- Coroll.** Si arcus bifariam secet angulum verticalem, bifariam quoque secabit triangulum isosceles, & erit basi perpendicularis. 267.

Coroll.

Coroll. Hinc, si triangulum isosceles unam habeat ex dictis quatuor conditionibus, tres reliquæ elicientur. *num.* 268.

Theor. VII. In omni triangulo sphærico major angulus majori lateri subtenditur. Et vicissim. 269.

Theor. VIII. In omni triangulo sphærico, si summa duorum laterum sit æqualis, vel major, aut minor semicircumferentiâ circuli, angulus internus, oppositus uni lateri, erit æqualis, vel major, vel minor angulo externo, adjacenti eidem lateri. 270.

Coroll. Duo triangula sphærica possunt esse inæqualia, quamvis duo anguli unius sint æquales duobus alterius, singuli singulis, & latus unum uni æquale; quæ duo latera æqualibus angulis opponantur. 271.

Theor. IX. In omni triangulo sphærico, si angulus internus, oppositus uni lateri, sit æqualis, aut major, vel minor angulo externo, adjacenti eidem lateri, erit summa duorum laterum æqualis, aut major, vel minor semicircumferentiâ circuli. 272.

De Triangulis rectangulis.

Theor. X. In omni triangulo rectangulo crura angulum rectum continentia, sunt ejusdem affectionis cum angulis oppositis. Et reciprocè. 274.

Coroll. In omni triangulo rectangulo, si alterum duorum crurum anguli recti, sit æquale, vel minus, vel majus quadrante circuli, hoc idem latus erit pariter æquale, vel minus, vel majus hypotenusâ. 275.

Theor. XI. In quovis triangulo, si ab angulo verticali in basim perpendicularis arcus demissus cadat intra triangulum, uterque angulorum ad basim erit ejusdem affectionis; si cadat extra, erit diversæ affectionis. 276.

Coroll. Et reciprocè. 277.

Theor. XII. In omni triangulo rectangulo, si crus unum anguli recti minus sit quadrante circuli, hypotenusâ erit in eadem affectione, seu specie, in qua est latus alterum. 278.

Coroll. Si duo crura trianguli rectanguli sint ejusdem affectionis, idest, utrumque vel majus, vel minus quadrante, hypotenusâ minor erit quadrante circuli. 279.

Scho-

Scholion. Si duo crura anguli recti sint quadrantes circuli, hypotenusa erit pariter quadrans. num. 280.

Coroll. Si duo crura anguli recti differant specie, hoc est, alterum minus sit, & alterum majus quadrante circuli, hypotenusa erit quoque major quadrante. 281.

Scholion. Si duo latera anguli recti ita differant specie, ut alterum sit quadranti æquale, & alterum quadrante majus, vel minus, hypotenusa erit pariter quadrans. 282.

Coroll. Si hypotenusa sit quadrante minor, duo latera erunt ejusdem speciei; si quadrante major, duo latera specie different. 283.

Scholion. Si hypotenusa sit quadrans circuli, necesse est, saltem alterutrum duorum crurum, esse quadrantem circuli. 284.

Coroll. Si anguli adjacentes hypotenusæ, sint in eadem specie, hypotenusa minor erit quadrante. 286.

Coroll. Si sint in diversa specie, hypotenusa major erit quadrante. 287.

Coroll. Et reciprocè. 288.

Scholion. Si duo anguli adjacentes hypotenusæ, sint ambo recti, vel rectus alter, & alter obliquus, hypotenusa erit quadrans circuli. Et reciprocè. 289.

Coroll. In triangulo rectangulo, si latus, & angulus adjacens eidem lateri, & hypotenusæ, sint in eadem specie, hoc est, vel utrumque majus, vel utrumque minus quadrante circuli, hypotenusa minor erit quadrante. 290.

Scholion. In triangulo rectangulo, si latus, & angulus eidem adjacens, sint ambo graduum 90, hypotenusa erit pariter graduum 90. 291.

Coroll. Si latus, & angulus adjacens sint in diversa specie, hoc est, alterum minus, & alterum majus gradibus 90, hypotenusa major erit quadrante. 292.

Scholion. Si latus esset quadrans circuli, & angulus adjacens obliquus, hypotenusa esset pariter quadrans. 293.

Coroll. Si hypotenusa sit minor quadrante circuli, latus quodlibet, ejusque angulus adjacens sunt in eadem specie. Et rursus, erunt in diversa specie, si hypotenusa sit major quadrante. 294.

Scholion. Si hypotenusa æquet quadrantem circuli, latus quod-

quodlibet, ejusque angulus adjacens, esse possunt singula
graduum 90. num. 295.

Coroll. Si angulus adjacens lateri, minor sit gradibus 90,
erit hoc latus ejusdem speciei, in qua est hypotenusæ. 296.

Scholion. Quando angulus adjacens lateri, excedit 90 gra-
dus, vel ab iisdem deficit, si hypotenusæ est quadrans cir-
culi, latus erit quoque quadrans. 297.

Coroll. Si tres anguli trianguli sint acuti, tria latera erunt
singula minora quadrante circuli. 298.

Scholion. Propositio conversa hujus corollarii non est in om-
ni casu vera. 299.

Coroll. Si tria latera trianguli sint singula majora quadran-
te circuli, tres anguli erunt obtusi. 300.

Scholion. Propositio conversa hujus corollarii non est vera in
omni casu. 301.

Coroll. Si tria latera trianguli singula æquent quadrantem
circuli, tres anguli erunt recti. Et reciprocè. 302.

Defin. V. Quid sint Sinus, Tangens, & Secans anguli sphæ-
rici. 303.

THEORIA

Sinuum &c. in Triangulo sphærico rectangulo.

Theor. I. **I**N omni triangulo sphærico rectangulo sinus totus,
sive radius est ad sinum hypotenusæ, uti sinus
utriusvis angulorum adjacentium hypotenusæ, est ad latus
prædicto angulo oppositum. 304. &c.

Coroll. Sinus angulorum proportionales sunt sinibus laterum
oppositorum. 310.

Theor. II. In omni triangulo sphærico rectangulo radius est ad
sinum alterutrius lateris, uti tangens anguli intercepti ab
eodem latere, & hypotenusà, est ad tangentem lateris
oppositi. 312.

Coroll. Demonstrantur reliqui casus, in quibus eadem analo-
gia locum habet. 313.

Lemma. Dato triangulo rectangulo, cujus latera sint singu-
la minora quadrante circuli, si certa lege, qualis expri-
mitur in Lemmate, producantur latera, habebuntur nova
trian-

triangula rectangula, quorum partes erunt æquales parti-
 bus primi trianguli, aut earum complementis. *num.* 314.
Coroll. Radius, seu sinus totus est ad sinum anguli adjacen-
 tis hypotenusæ, uti cosinus, seu sinus secundus lateris,
 cui adjacet idem angulus, est ad cosinum anguli oppositi
 huic lateri. 315.
Coroll. Sinus totus est ad cosinum unius lateris, uti cosinus
 alterius lateris est ad cosinum hypotenusæ. 316.
Coroll. Aliæ ex aliis analogiæ. 317. &c.
Coroll. Sinus totus est ad cosinum anguli adjacentis uni la-
 teri, uti cotangens hujus lateris est ad cotangentem hy-
 potenusæ. 321.
Coroll. Sinus totus est ad cosinum hypotenusæ, uti tangens
 anguli adjacentis hypotenusæ, est ad cotangentem alterius
 anguli, ejusdem hypotenusæ. 322.
Coroll. Aliæ analogiæ calculo perutiles. 323. 324.
Monitum I. An, & qua methodo in aliqua analogia termi-
 ni cognomines alicujus trianguli invicem substitui possint,
 manente semper vera proportione. 325.
Monitum II. Expositæ analogiæ quomodo aptari possint om-
 nibus triangulis rectangulis. 326.
Monitum III. Sex analogiæ, usui magis utiles. 327. &c.
Theor. III. In triangulo sphærico rectangulo, si latus unum sit
 quadrans circuli, latus alterum tot gradus continet, quot
 angulus oppositus. 334.
Theor. IV. Et vicissim, si in eodem triangulo latus unum ma-
 jus, aut minus quadrante, contineat totidem gradus,
 quot angulus oppositus, latus alterum erit quadrans cir-
 culi. 335.
Theor. V. Radius, seu sinus totus est medius proportionalis
 inter sinum arcus, & cosecantem ejusdem arcus, sive se-
 cantem sui complementi. 336.
Theor. VI. Tangentes duorum arcuum, vel duorum angulorum
 sunt inter se reciprocè, uti eorum cotangentes, sive re-
 ciprocè, uti tangentes suorum complementorum. 338.

Analysis Trianguli sphaerici rectanguli.

Partitio Problematum. num. 340.

Probl. I. Datis duobus cruribus, invenire I. duos angulos iidem oppositos, II. hypotenusam. 341. &c.

Probl. II. Datà hypotenusà, & altero crurum, quærere I. angulum dato cruri oppositum, II. angulum dato cruri adjacentem, III. crus reliquum. 343. &c.

Appendix variarum observationum in triangulis sphaericis rectangulis. 349. &c.

Probl. III. Dato crure, & angulo intercepto ab eodem crure, & hypotenusà, invenire I. angulum dato lateri oppositum, II. latus alterum, III. hypotenusam. 354. &c.

Probl. IV. Datis, crure, & angulo eidem opposito, invenire I. angulum interceptum inter latus cognitum, & hypotenusam, II. latus alterum, III. hypotenusam. 360. &c.

Probl. V. Cognità hypotenusà, & altero angulorum eidem adjacentium, quærere I. angulum reliquum ejusdem hypotenusæ, II. latus dato angulo oppositum, III. latus dato angulo adjacens. 367. &c.

Probl. VI. Datis duobus angulis adjacentibus hypotenusæ, quærere I. latera, II. hypotenusam. 373. &c.

PRAXIS ASTRONOMICA

Trianguli sphaerici rectanguli.

Probl. I. **S**olis declinationem ad singulos gradus Eclipticæ supputare; & tabulam declinationum construere. 377.

Probl. II. Ascensionem rectam singulorum graduum Eclipticæ supputare. 378.

Probl. III. Angulum Eclipticæ, & Meridiani invenire. 379.

Probl. IV. Data declinatione Solis, quæ observatione cognoscitur, habetur ejus ascensio recta, & locus in Ecliptica, longitudo, declinatio, & angulus Eclipticæ, & Meridiani. 380.

Probl. V. Amplitudinem ortivam graduum Eclipticæ invenire. 381.

-mN

De

De Climatibus.

Probl. VI. Invenire latitudinem, per quam terminatur *Clima.* num. 382.

De Crepusculis Quæstiuncula.

Quæst. I. An crepera illa, & dubia lux mane ante Solis ortum, & vespere post ejus occasum conspicua, quæ *Crepusculum* dicitur, ab *Athmosphæræ* illuminatione oriatur. 383.

Quæst. II. An ex duratione *Crepusculi* inveniri possit altitudo aeris. 384.

Quæst. III. An ex data duratione *Crepusculi*, & declinatione Solis, ejus depressio infra horizontem investigari possit. Et vicissim. 385.

T H E O R I A, E T A N A L Y S I S

Trianguli spherici obliquanguli.

Theor. I. **I**N omni triangulo spherico obliquangulo, sinus angulorum, sinibus oppositorum laterum directè sunt proportionales. 386.

Theor. II. In omni triangulo spherico obliquangulo, ab angulo verticali in oppositam basim demisso arcu perpendiculari, erunt sinus secundi, seu cosinus laterum adjacentium eidem angulo, sinibus secundis, seu cosinibus segmentorum ad basim, directè proportionales. 387.

Theor. III. Iisdem positis, sinus angulorum verticalium sunt directè proportionales sinibus secundis, seu cosinibus angulorum ad basim. 388.

Theor. IV. Iisdem positis, sinus secundi, seu cosinus angulorum verticalium sunt directè proportionales cotangentibus laterum. 389.

Theor. V. Iisdem positis, cosinus angulorum verticalium sunt reciprochè proportionales tangentibus laterum. 390.

Theor. VI. Iisdem positis, sinus segmentorum baseos sunt directè proportionales cotangentibus angulorum ad eandem basim. 391.

Theor.

Theor. VII. Iisdem positis, sinus segmentorum baseos sunt reciproce proportionales tangentibus angulorum ad basim. num. 392.

Lemma. I. Dato triangulo sphærico isoscele, datâque chordâ, quæ vicem basis obit, si per verticem ducatur recta, quæ sit tangens circuli, cujus circumferentia transeat per tres vertices dati trianguli; dico, hanc rectam fore parallelam datæ chordæ. 393.

Lemma. II. Dato triangulo sphærico obliquangulo, cujus duo latera sint inæqualia, determinari potest arcus, qui sit excessus semisummæ trium laterum vel supra majus latus, vel supra minus. 394.

Coroll. Hujus arcus determinari potest sinus. 395.

Theor. VIII. Iisdem stantibus, I. si in triangulo sphærico, quod non sit æquilaterum, producaturs minus latus unius anguli, donec æquetur majori, II. si a majori latere subducatur excessus, III. si ducantur arcus maximorum circulorum; dico, rectangulum factum a sinibus semissium horum arcuum, æquari rectangulo facto a sinibus differentiarum laterum anguli alterius, adjacentis prædicto minori lateri, a semisumma trium laterum. 396.

Theor. IX. In omni triangulo sphærico, rectangulum factum a sinibus laterum anguli cujuscvis, est ad quadratum sinus totius, uti rectangulum factum a sinibus differentiarum horum laterum a semisumma trium laterum trianguli, est ad quadratum sinus semisseos ejusdem anguli. 397.

Lemma. Iisdem stantibus, differentia majoris lateris a semisumma trium laterum, æquatur semidifferentiæ baseos, & excessus ejusdem majoris lateris supra minus. 398.

Theor. X. Rectangulum factum a sinibus laterum anguli cujuscvis, est ad rectangulum factum a sinu semisummæ baseos, & excessus majoris lateris supra minus, in sinum semidifferentiæ baseos, & ejusdem excessus; uti quadratum sinus totius est ad quadratum sinus semisseos prædicti anguli. 399.

Analysis Trianguli sphærici obliquanguli.

Partitio Problematum. 400.

Regulæ generales in triangulis obliquangulis. 402. &c.

Probl. I. Datis duobus lateribus trianguli sphærici, & angulo ab

- ab iisdem intercepto, invenire I. duos reliquos angulos,
II. tertium latus. *num.* 414. &c.
- Probl. II.* Datis lateribus duobus, & angulo uni eorum opposito, invenire I. angulum alteri lateri cognito oppositum, II. angulum a lateribus datis comprehensum, III. latus tertium. 417. &c.
- Probl. III.* Dato quovis latere, & angulis eidem adjacentibus, invenire I. tertium angulum, II. duo reliqua latera. 420. &c.
- Probl. IV.* Datis duobus angulis, & latere uni eorum opposito, invenire I. tertium angulum, II. latus oppositum alteri angulo cognito, III. latus, quod a duobus angulis cognitis intercipitur. 423. &c.
- Probl. V.* Cognitis tribus lateribus trianguli sphærici, invenire angulos. 426. &c.
- Probl. VI.* Datis tribus angulis trianguli sphærici, invenire latera. 430.
- Synopsis casuum, in quibus tres partes cognitæ trianguli sphærici, determinant reliquas. *ibid.*

A P P E N D I X.

De geometrica Logarithmorum origine, & constructione.

- D***E*finitiones. 432. &c.
- Lemma.* Series linearum geometricè proportionalium continuari potest utrinque ab unitate, tam descendendo versùs sinistram, quam ascendendo versùs dexteram. 439.
- Prop. I.* Genesis lineæ logarithmicæ. 441.
- Prop. II.* Genesis ejusdem curvæ logarithmicæ, duorum motuum compositione descriptæ. 442.
- Coroll.* Hinc logistica dicitur linea illa curva, in qua ordinatæ ad æquales axis partes, sunt geometricè proportionales. 443.
- Coroll.* Hinc constat, curvam logarithmicam ad axem, tanquam Asymptoton, propiùs accedere, quàm quodlibet datum intervallum, nec tamen cum ipso convenire posse. 444.
- Coroll.* Constat etiam, partes axis ita correspondere ordinatis,

tis, quemadmodum logarithmi respondent naturalibus numeris. num. 445.

Coroll. Hinc etiam patet, quod si sint quatuor numeri tales, ut distantia inter primum, & secundum sit æqualis distantia inter tertium, & quartum, qualiscunque sit distantia secundi a tertio, erunt illi numeri proportionales. 446.

Defin. Distantia inter duos quoslibet numeros dicitur logarithmus rationis eorumdem. 447.

Coroll. Si distantia inter duos quosvis numeros dupla sit distantia inter alios duos numeros, ratio duorum priorum erit duplicata rationis posteriorum. 448.

Coroll. Itaque numeri cujuslibet logarithmus, est logarithmus rationis unitatis ad ipsum numerum. 449.

Coroll. Et omnes numeri in serie geometrica sunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum logarithmi. 450.

Coroll. Cum logarithmi sint distantia numerorum ab unitate, erit logarithmus ipsius unitatis 0. 451.

Coroll. Numerorum geometricè proportionalium logarithmi sunt omnes in progressionem arithmetica. 452.

De proprietatibus, & usu Curvæ logarithmicæ.

Prop. III. Si in axe logarithmicæ capiantur partes quælibet æquales, & ab earundem extremis punctis erigantur perpendiculares, ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales; quin etiam continua perpendicularium incrementa erunt totis proportionalia. 453.

Prop. IV. In serie proportionalium crescente, si logarithmus alicujus numeri multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam a primo termino, & productum addatur logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. 454.

Praxis Arithmeticæ communis in supputatione fœnoris compositi ad plures annos. 455.

Praxis logarithmica. 456.

Quæstiunculæ logarithmicæ de supputatione fœnoris compositi. ibid.

F I N I S.



Lecchi, Antonio,

Trigonometria theoretico-practica

Mediolanum 1756

Math.p. 293

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082268-3